L. A. LJUSTERNIK · W. I. SOBOLEW

Elemente der Funktionalanalysis

AKADEMIE-VERLAG · BERLIN



A. LJUSTERNIK · W. I. SOBOLEW

ELEMENTE DER FUNKTIONALANALYSIS

MATHEMATISCHE LEHRBÜCHER UND MONOGRAPHIEN

HERAUSGEGEBEN VON DER
DEUTSCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN
INSTITUTE FÜR MATHEMATIK

I. ABTEILUNG
MATHEMATISCHE LEHRBÜCHER

BAND VIII

ELEMENTE DER FUNKTIONALANALYSIS

VON

L. A. LJUSTERNIK · W. I. SOBOLEW



AKADEMIE-VERLAG · BERLIN
1968

L. A. LJUSTERNIK · W. I. SOBOLEW

ELEMENTE DER FUNKTIONALANALYSIS

Vierte, neubearbeitete und erweiterte Auflage

In deutscher Sprache herausgegeben von
Dipl.-Math. KONRAD GRÖGER, Berlin

Mit 7 Abbildungen





AKADEMIE-VERLAG · BERLIN
1968

Л. А. Люстерник и В. И. Соболев
Элементы функционального анализа
Erschienen im Verlag „Nauka“, Moskau

Deutsche Übersetzung: Dr. Klaus Fiedler, Berlin

Erschienen im Akademie-Verlag GmbH, 108 Berlin, Leipziger Straße 3—4
Lizenznummer: 202 · 100/432/68

Gesamtherstellung: VEB Druckerei „Thomas Müntzer“, 582 Bad Langensalza
Bestellnummer: 5141 · ES 19 B 4

VORWORT

Seit dem Zeitpunkt des Erscheinens der ersten Auflage des vorliegenden Buches vergingen mehr als zehn Jahre. In dieser Zeit erfolgte sowohl eine allseitige Entwicklung der Funktionalanalysis als auch ein intensives Eindringen der Ideen und Methoden der Funktionalanalysis in die verschiedenen Teilgebiete der Mathematik und nicht nur der Mathematik. Der Funktionalanalysis beginnt man sich auf breitester Grundlage in der Mechanik und in den Ingenieurwissenschaften zu bedienen, gar nicht zu reden von der Physik, die eine der ersten war, die sich funktionalanalytische Begriffe und Methoden in ihren theoretischen Untersuchungen zu eigen machte. Deshalb besteht keine Notwendigkeit, die Bedeutung der Funktionalanalysis und ihren Platz im System der mathematischen Disziplinen zu erläutern.

Die Entwicklung der Funktionalanalysis und das wachsende Interesse an ihr seitens der Mathematiker, Physiker und Mechaniker hatte das Erscheinen einer Reihe vortrefflicher Lehrbücher und Monographien, die der allgemeinen Funktionalanalysis gewidmet waren, zur Folge. Hinreichend bekannt sind die Bücher von L. W. KANTOROWITSCH und G. P. AKILOW [14], A. N. KOLMOGOROW und S. W. FOMIN [16], W. I. SMIRNOW [33], B. S. WULICH [39], N. I. ACHIESER und I. M. GLASMANN [2], F. RIESZ und B. Sz. NAGY [31], N. DUNFORD und J. T. SCHWARTZ [6] u. a. Wir haben jedoch den Eindruck, daß die vorliegende zweite Auflage dieses Buches die bekannten Lehrbücher und Monographien nicht kopiert. In der zweiten Auflage wurde im Grunde der elementare Charakter der Darlegung beibehalten, und deshalb scheint uns unser Buch im Vergleich zu anderen Büchern für einen Anfänger geeigneter zu sein.

Im Vergleich mit der ersten Auflage des Buches ist die zweite umgestaltet worden. Gestrichen ist eine Reihe von Fragen, die dem Umfang nach unerheblich sind und meistens entweder etwas aus dem Rahmen der allgemeinen Darstellung herausfallen oder nur illustrierenden Charakter tragen, hinzugekommen ist zur Genüge neues Material. Die bedeutendsten Ergänzungen sind die SOBOLEWschen Räume und ihre Einbettungssätze, die Theorie von RIESZ-SCHAUDER für lineare Operatorgleichungen mit vollstetigen Operatoren in beliebigen BANACH-Räumen, das Fixpunktprinzip von J. SCHAUDER und die Grundlage der Spektraltheorie unbeschränkter linearer Operatoren im HILBERT-Raum. Demgegenüber werden wie in der ersten Auflage solche wichtigen Teilgebiete der Funktionalanalysis wie topologische lineare Räume, normierte Algebren, Dar-

stellungstheorie, teilweise geordnete Räume, verallgemeinerte Funktionen und ihre Anwendungen u. a. nicht entwickelt oder behandelt. Die Autoren gehen von dem bekannten Prinzip von K. PRUTKOW über die Unmöglichkeit, Unermeßliches zu erfassen, aus und verweisen den an den genannten Problemen interessierten Leser auf andere Monographien.

Während der Vorbereitung der zweiten Auflage unseres Buches benutzten wir eine Reihe von Lehrbüchern und Monographien der Funktionalanalysis. In erster Linie waren es die Bücher von L. W. KANTOROWITSCH und G. P. AKILOW, W. I. SMIRNOW, F. RIESZ und SZ. NAGY. Bei der Wiedergabe der Spektraltheorie linearer Operatoren im HILBERT-Raum folgten wir im Prinzip den Plänen und Ideen von A. I. PLESSNER [27, 28], der ein heftiger Verfechter der Spektraltheorie linearer Operatoren, ja der Funktionalanalysis überhaupt, in den Jahren war, als eine breite Entwicklung dieses Teilgebietes der Mathematik in der Sowjetunion einsetzte.

Das Manuskript des Buches lasen A. I. PEROW, D. A. RAJKOW und J. B. RUTIZKIJ, die viele wertvolle Bemerkungen anbrachten. Eine Reihe von ihnen vorgeschlagener Verbesserungen der Darstellung wurden in dem Buch benutzt, und wir sprechen ihnen unseren aufrichtigen Dank aus.

Die Autoren

INHALTSVERZEICHNIS

EINFÜHRUNG

Verallgemeinerungen von Grundbegriffen aus Analysis, Geometrie und Algebra

Zu Beginn dieses Jahrhunderts entwickelte sich eine neue Disziplin der Analysis, die sogenannte Funktionalanalysis.

Die fundamentalen Begriffe und Methoden der Funktionalanalysis entstanden allmählich in den ältesten Gebieten der Analysis: in der Variationsrechnung, in der Theorie der Differentialgleichungen, in der Approximationstheorie von Funktionen, in der praktischen Analysis und besonders in der Theorie der Integralgleichungen.

Das Wesen der Funktionalanalysis besteht darin, daß Begriffe und Methoden der elementaren Analysis sowie benachbarter Gebiete der Algebra und Geometrie auf allgemeinere Objekte übertragen werden. Weitgehend werden geometrische und algebraische Gedankenvorgänge verwendet. Eine derartige Verallgemeinerung erlaubt es, von einem einheitlichen Gesichtspunkt an Fragen heranzugehen, die früher in den speziellen analytischen Disziplinen isoliert betrachtet wurden. Ferner lassen sich Zusammenhänge zwischen entfernten mathematischen Theorien herstellen und dadurch wird die Entdeckung neuer mathematischer Erkenntnisse ermöglicht. Um sich von der Richtigkeit dieser Behauptung zu überzeugen, genügt es, auf gewisse Existenzsätze bei Differential- und Integralgleichungen usw. zu verweisen, die in den letzten Jahren mit Hilfe der Funktionalanalysis gefunden wurden.

Diese Verallgemeinerungen wurden möglich, da sich im Verlauf der Entwicklung die Grundbegriffe der Analysis als sehr allgemein erwiesen. Dabei fanden diese Begriffe und Methoden oft Analoga in Algebra und Geometrie. So wird durch sukzessive Approximation die Lösung verschiedener Aufgaben aus Algebra und Analysis gefunden. Ferner sind die Definitionen eines Funktionals, eines Extremums des Funktionals und die Bedingungen für die Existenz eines Extremums in der Variationsrechnung völlig analog den Definitionen einer Funktion (von einer oder mehreren Veränderlichen), eines Extremums der Funktion und den Existenzbedingungen solch eines Extremums in der Differentialrechnung.

Allgemein bekannt sind die Analogien zwischen den linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen und den linearen Differenzengleichungen einerseits und den linearen algebraischen Gleichungssystemen andererseits. Noch besser treten diese Analogien in der historisch später entstandenen Theorie der Integralgleichungen zutage.

Parallel zur Analysis wurde im 19. Jahrhundert auch die Geometrie verallgemeinert. Den Anstoß gab die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie

durch N. I. Lobatschewskij. Die Schaffung der n-dimensionalen Geometrie erlaubt es, Funktionen von mehreren Veränderlichen geometrisch zu deuten. Gleichzeitig wurden neue Beziehungen zwischen Analysis und Geometrie aufgedeckt. Diese Verknüpfungen zwischen Geometrie und Analysis erforderten neue Erweiterungen der geometrischen Begriffe. Hier einige Beispiele. Die Menge aller Lösungen einer linearen homogenen gewöhnlichen Differentialgleichung n-ter Ordnung ist isomorph dem n-dimensionalen Vektorraum. Für die Menge der Lösungen einer linearen homogenen partiellen Differentialgleichung ist das geometrische Analogon der unendlich dimensionale Vektorraum. Ein bemerkenswertes Beispiel einer weitgehenden Analogie zwischen Analysis und Geometrie stellt die Entwicklung von Funktionen nach Elementen von Orthogonalsystemen dar. Diese Systeme ähneln den Orthogonalsystemen von Vektoren des Euklidischen Raumes. Diese Analogie wird durch die Bezeichnung unterstrichen. Der Zerlegung eines Vektors in Komponenten entspricht die Zerlegung einer Funktion in eine Fourier-Reihe, dem Satz des Pythagoras, die Vollständigkeitsrelation usw. Die geometrische Darstellung eines unendlichen Orthogonalsystems von Funktionen erfordert den unendlich dimensionalen Euklidischen Raum.

Mit der Entwicklung der Analysis und der Geometrie nahm nicht nur die Zahl der Analogien zwischen den Begriffen verschiedener Gebiete der Analysis sowie zwischen denen der Analysis und der Geometrie zu, sondern es stellte sich heraus, daß die Analogien in den entwickelten Theorien Folgerungen der Verwandtschaft der ihnen zugrunde liegenden Begriffe sind. Solche Begriffe sind: Funktion, Grenzübergang, Approximation, Abstand. Sie werden explizit oder implizit in verschiedenen Formen in den Theorien benutzt.

Für die Funktionalanalysis ist nicht nur die Verallgemeinerung, sondern auch die Geometrisierung von Grundbegriffen und Methoden der klassischen Analysis charakteristisch. Funktionen mit bestimmten Eigenschaften betrachtet man als Elemente von „Funktionenräumen". Wie wir schon früher erwähnten, erfordern solche Betrachtungen Erweiterungen der Begriffe — wie z. B. unendlich dimensionaler Raum, metrischer Raum usw. Dies führt dann zum „abstrakten Raum", der sowohl die geometrischen als auch die Funktionenräume umfaßt.

Die abstrakten Räume gestatten es, Fragen der Analysis geometrisch zu behandeln. Eine solche geometrische Darstellung analytischer Theorien ist in der mathematischen Literatur, aber auch in Physik und Mechanik weit verbreitet. Vieles wurde dabei durch Analogien zur n-dimensionalen Geometrie erraten. Die Beweise mancher Sätze erhielt man auf geometrischem Wege. So wurde in der Analysis eine neue geometrische Methode gewonnen.

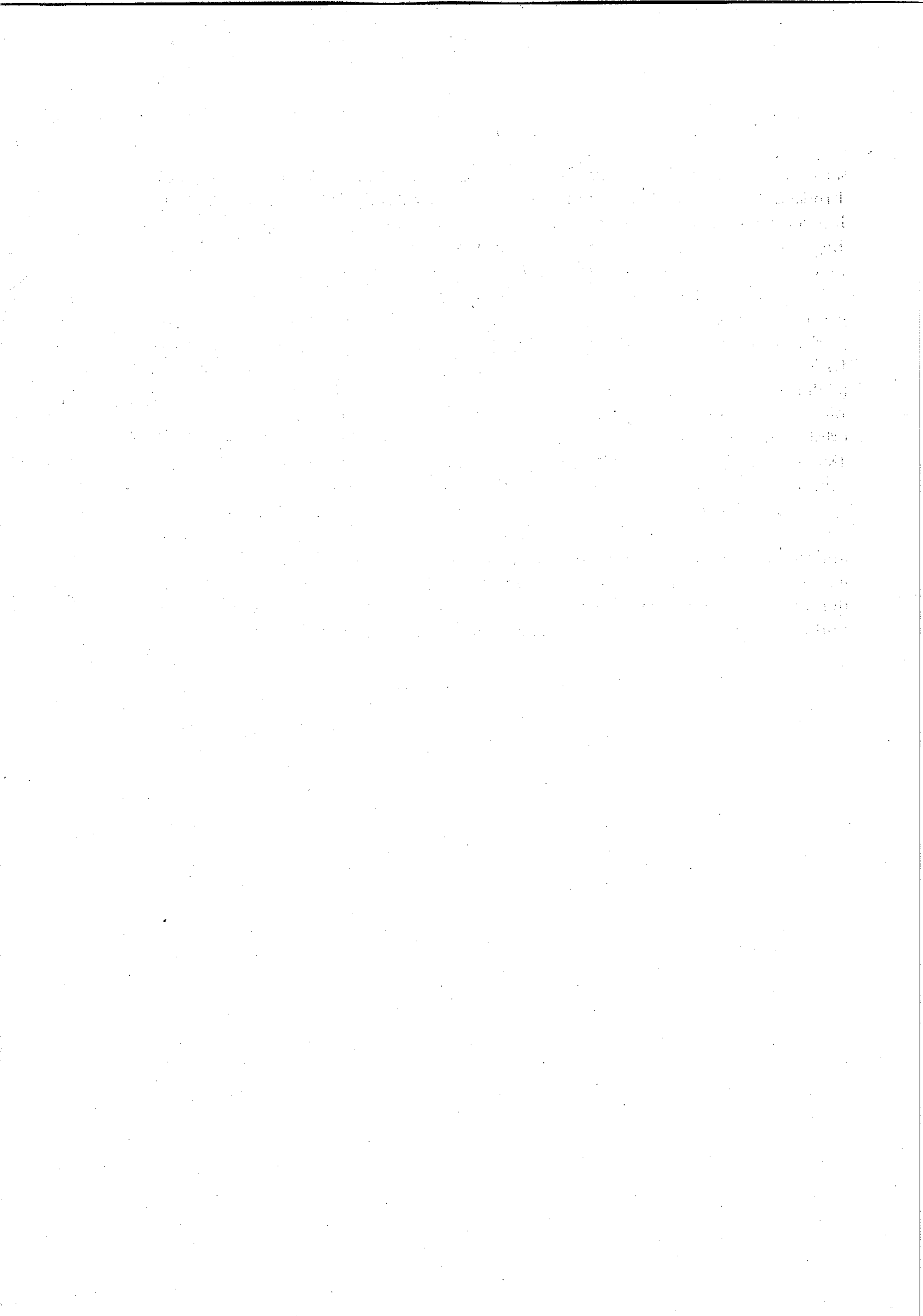
Im 19. Jahrhundert verlief gleichzeitig mit der Verallgemeinerung geometrischer Begriffe die der algebraischen. Einerseits wurden Zahlenoperationen auf Objekte allgemeinerer Natur (Matrizen, Operatoren usw.) übertragen. Die Begriffe Gruppe, Ring, Körper usw. entstanden und wurden in verschiedenen Gebieten der Mathematik eingeführt. Im Zusammenhang mit der Anwendung algebraischer Begriffe in der Analysis beginnt man, algebraische Konstruktionen

zu betrachten, die den Grenzübergang enthalten. Andererseits wird in größter Breite der Fakt ausgenutzt, daß Operationen der Analysis Grenzbildungen algebraischer Operationen darstellen. So spielt die Verallgemeinerung algebraischer Begriffe in der Funktionalanalysis dieselbe Rolle wie die entsprechenden elementaren Teile der Algebra in der gewöhnlichen klassischen Analysis.

So entspricht der linearen Algebra die Theorie der linearen Operatoren, der ein großer Teil dieses Buches gewidmet ist.

Ein wesentliches Verfahren der Analysis — die Approximation nichtlinearer Objekte durch lineare — wird auch auf die Funktionalanalysis übertragen (siehe Kap. VIII). Dem Übergang von Polynomen mit Zahlargument zu beliebigen Funktionen entspricht der Übergang von „Polynomen auf Ringen" (Matrizenringen, Operatoren usw.) zu beliebigen Funktionen dieser Argumente. Darauf gründen sich wichtige Disziplinen, wie z. B. die Matrizen-, die Operatorenrechnung und die Spektraltheorie linearer Operatoren (siehe Kap. VII).

Obwohl sich die Funktionalanalysis zu einer großen selbständigen mathematischen Disziplin entwickelt hat, fährt sie auch heute noch fort, die Methoden anderer, schon neuerer mathematischer Disziplinen aufzunehmen und zu verallgemeinern. Es genügt, die in den letzten Jahren intensiv entwickelte Theorie der linearen topologischen Räume, die Theorie der Darstellung von Gruppen und einige andere moderne Teilgebiete der Funktionalanalysis zu nennen.



KAPITEL I

METRISCHE RÄUME

§ 1. Funktionen (Operatoren). Räume. Ordnungen

Ein fundamentaler Begriff der Analysis ist der der Funktion. Man definiert ihn folgendermaßen: X und Y seien zwei Mengen reeller Zahlen. Wenn jeder Zahl x aus X nach einer Vorschrift eindeutig eine Zahl y aus Y zugeordnet ist, so sagt man, daß auf der Menge X eine *eindeutige Funktion* $y = f(x)$ definiert sei, deren *Wertebereich* in der Menge Y liegt. Die Menge X heißt *Definitionsbereich* der Funktion.

Wie man leicht sieht, ist es für das Wesen der funktionalen Zuordnung nicht notwendig, daß X und Y Mengen von reellen Zahlen sind. Wenn man unter X und Y beliebige Mengen versteht, gelangt man zu einem weit allgemeineren Funktionsbegriff. Beispiele gibt es in verschiedenen Zweigen der Analysis.

Beispiele. 1. Es sei $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine reelle Funktion von n reellen Veränderlichen. Dann ist X eine Menge von n-Tupeln reeller Zahlen, Y eine Menge reeller Zahlen.

2. Es sei $\mathfrak{y} = f(x)$ eine Vektorfunktion, die den reellen Zahlen x n-dimensionale Vektoren zuordnet. Hier ist X eine Menge reeller Zahlen, Y eine Menge n-dimensionaler Vektoren.

3. In der Variationsrechnung betrachtet man die Funktionale

$$I(\gamma) = \int_a^b F(x, y, y')\, dx ,$$

wobei γ eine durch eine Gleichung $y = f(x)$ gegebene Kurve ist, die erstens der Klasse C_1 derjenigen Funktionen angehört, die eine stetige Ableitung besitzen, und die zweitens durch zwei gegebene Punkte $A(a, y_a)$ und $B(b, y_b)$ geht. In diesem Fall ist X die Menge der Kurven mit den angegebenen Eigenschaften, und Y ist eine Menge reeller Zahlen.

4. In der Theorie der Integralgleichungen betrachtet man Ausdrücke der Form

$$y(s) = \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt .$$

Man setzt voraus, daß der Kern $K(s, t)$ definiert und stetig im Quadrat $a \leqq s \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$ ist. Dann kann man obige Gleichung als eine Vorschrift betrachten, durch die jeder auf $[a, b]$ stetigen Funktion $x(s)$ eine andere Funktion zugeordnet ist, die auf demselben Intervall stetig ist. Hier sind X und Y Mengen stetiger Funktionen.

Wir führen jetzt eine allgemeine Definition der Zuordnung ein.

Es seien zwei beliebige Mengen X und Y gegeben und eine Vorschrift, durch die jedem Element $x \in X$ ein eindeutig bestimmtes Element $y \in Y$ zugeordnet ist. Dann sagen wir, es sei eine *abstrakte Funktion* (oder ein *Operator*) $y = f(x)$ oder $y = f\,x$ gegeben, die auf der Menge X definiert ist und deren Wertebereich

in der Menge Y gelegen ist.[1]) Ein auf X mit dem Wertebereich Y definierter Operator heißt auch *Abbildung* der Menge X in die Menge Y. Sind speziell die Werte des Operators reelle Zahlen, so heißt der Operator ein *Funktional*.

Das Element $y \in Y$, das bei der Abbildung $y = f(x)$ dem Element $x \in X$ entspricht, heißt *Bild* des Elementes x, und x heißt *Urbild* des Elementes $y \in Y$.

Wenn die Abbildung $y = f(x)$ X auf Y überführt, dann existiert zu jedem Element $y \in Y$ mindestens ein Urbild x. Besitzt jedes $y \in Y$ nur ein Urbild $x \in X$, so heißt die durch $y = f(x)$ erzeugte Abbildung von X auf Y *eineindeutig*.

Über die Eigenschaften dieser so allgemein definierten Operatoren ist fast nichts zu sagen. Wir machen jetzt einige zusätzliche Voraussetzungen.

Zusammen mit dem Funktionsbegriff erscheint ein anderer wichtiger Begriff der Analysis, der Grenzwert und im Zusammenhang damit die Stetigkeit. Eine Menge, in der irgendein Grenzwert einer Folge definiert ist, heißt ein *abstrakter Raum*. Abstrakte Räume, deren Elemente Funktionen oder Zahlenfolgen sind, heißen *Funktionenräume*. Das Studium gewisser Klassen von Operatoren, die in Funktionenräumen definiert sind, ist der wesentliche Inhalt der Funktionalanalysis.

Wir gehen auf einige Begriffe ein, die in der Funktionalanalysis benutzt werden.

In der Menge X irgendwelcher Objekte sei für bestimmte Paare von Elementen $a, b, c, \ldots$ dieser Menge eine Relation

$$a < b$$

eingeführt. Diese Relation genüge folgenden Bedingungen:

1. aus $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$;
2. $a < a$;
3. aus $a < b$ und $b < a$ folgt $a = b$.

Dann heißt die Menge X *teilweise geordnet*, und Elemente a und b, für die die Relation $a < b$ oder $b < a$ gilt, heißen *vergleichbar*.

Die Menge X heißt *geordnet* (oder *linear geordnet*), wenn für zwei verschiedene, aber sonst beliebige Elemente a und b entweder $a < b$ oder $b < a$ ist.

Eine Teilmenge Y einer teilweise geordneten Menge heißt *nach oben beschränkt*, wenn ein Element b existiert mit $y < b$ für alle $y \in Y$. Das Element b nennt man eine *obere Schranke* der Menge Y. Die kleinste aller oberen Schranken heißt die *obere Grenze* der Menge.

Analog werden *eine nach unten beschränkte Menge, eine untere Schranke* und die *untere Grenze* einer Menge festgelegt.

Schließlich heißt das Element $z_0 \in X$ *maximal*, wenn in X kein Element $x \neq z_0$ existiert, das der Relation $z_0 < x$ genügt.

Es gilt das folgende, äußerst wichtige

[1]) Wir vereinbaren, von einem Sachverhalt zu sagen, daß er „auf einer Menge" bzw. „in einer Menge" erfüllt ist, wenn er für alle Elemente dieser Menge bzw. möglicherweise nicht für alle Elemente der Menge gilt.

ZORNsche Lemma. *Wenn in einer teilweise geordneten Menge X für jede geordnete Teilmenge Y die obere Grenze existiert, dann gibt es in X ein maximales Element z_0.*

Eine geordnete Menge heißt *wohlgeordnet,* wenn jede beliebige nichtleere Teilmenge von ihr ein minimales Element besitzt, d. h. ein allen Elementen der Teilmenge vorangehendes erstes Element.

Der Satz von ZERMELO. *Jede Menge kann durch Einführung einer Ordnungsrelation wohlgeordnet werden.*

Der Beweis des Satzes von ZERMELO stützt sich auf das sogenannte ZERMELOsche Auswahlaxiom, das besagt, daß *zu einem beliebigen System nichtleerer disjunkter Mengen eine Menge existiert, die mit jeder Menge des Systems genau ein Element gemeinsam hat.*

Man kann zeigen, daß das ZORNsche Lemma, das ZERMELOsche Axiom und der Satz von ZERMELO einander äquivalente Aussagen sind.

Ausführlicheres hierüber s. [5] und [24].

Beispiel. M sei eine nichtleere Menge und $T = \{t\}$ die Gesamtheit ihrer Teilmengen t. Wir schreiben $t_1 < t_2$, wenn $t_1 \subset t_2$ ist. Die so eingeführte Ordnungsrelation genügt den oben erwähnten drei Bedingungen. Wenn die Menge M mehr als zwei Elemente enthält, so wird die Menge T dadurch nicht geordnet (und noch weniger wohlgeordnet).

Ist S eine beliebige Teilmenge von T, so ist sie nach oben beschränkt, und ihre obere Grenze ist die Menge

$$s = \bigcup_{t \in S} t .$$

In T existiert ein maximales Element, und zwar ist das die Menge M selbst als Teilmenge betrachtet, und das ZORNsche Lemma ist in diesem Falle offensichtlich. Der Satz von ZERMELO behauptet jedoch, daß T durch Einführung einer anderen Ordnungsrelation wohlgeordnet werden kann, doch wie das zu erfolgen hat, läßt die Theorie offen, da der Beweis nichtkonstruktiv ist.

§ 2. Metrische Räume

In der Analysis gibt es mehrere Konvergenzbegriffe. In gewissen Fällen werden für ein und dieselbe Folge im Zusammenhang mit verschiedenen Aufgaben verschiedene Grenzbegriffe eingeführt. Vor allem hat man den Limesbegriff bei Folgen von reellen Zahlen. Dieser Begriff läßt sich unmittelbar auf Folgen komplexer Zahlen und n-dimensionaler Vektoren verallgemeinern. Für eine Funktionenfolge kennt man eine Reihe von Konvergenzbegriffen: gewöhnlich (nicht gleichmäßig), gleichmäßig, fast überall konvergent usw.

Alle diese Konvergenzbegriffe haben gemeinsam, daß die Konvergenz einer Folge von Elementen x_n (die Zahlen, Vektoren oder Funktionen sein können) gegen ein Element x eine unbeschränkte „Annäherung" von x_n an x bedeutet, d. h. eine unbeschränkte Verringerung des „Abstandes" zwischen diesen Elementen bei wachsendem n. Je nachdem, wie wir den Abstand zwischen den Elementen x_n und x verstehen, erhalten wir verschiedene Definitionen des Grenzwertes. Daher erscheint es notwendig, eine allgemeine Definition des Abstandes zwischen den Elementen zu geben, die die betrachteten speziellen

Fälle umfaßt, und dann mit Hilfe dieses Abstandes in der Menge den Begriff des Grenzüberganges einzuführen. Diese Menge wird dann zu einem abstrakten Raum.

Definition. Eine Menge X heißt *metrischer Raum*, wenn jedem Elementpaar x, y dieser Menge eine nichtnegative reelle Zahl $\varrho_X(x, y)$ zugeordnet ist, die folgenden Bedingungen genügt:

1. $\varrho_X(x, y) = 0$ *genau dann, wenn* $x = y$ (*Identität*).
2. $\varrho_X(x, y) = \varrho_X(y, x)$ (*Symmetrie*).
3. $\varrho_X(x, y) + \varrho_X(y, z) \geqq \varrho_X(x, z)$ (*Dreiecksungleichung*).

Die Zahl $\varrho_X(x, y)$ heißt *Abstand* zwischen den Elementen x und y, und die obigen drei Bedingungen nennt man *metrische Axiome*. Offensichtlich bringen die Axiome der Metrik die fundamentalen Eigenschaften des Abstandes zwischen den Punkten des dreidimensionalen Euklidischen Raumes zum Ausdruck.

Wenn im weiteren festliegt, welcher metrische Raum vorliegt, so wollen wir anstelle $\varrho_X(x, y)$ einfach $\varrho(x, y)$ schreiben.

Die Elemente eines metrischen Raumes werden auch *Punkte* genannt.

Schließlich bemerken wir, daß jede in einem metrischen Raum X liegende Menge Y, für die derselbe Abstand zwischen ihren Elementen eingeführt wurde wie in X, selbst einen metrischen Raum bildet und *Teilraum* von X genannt wird.

Der Grenzwert. Ein Element x eines metrischen Raumes M heißt *Grenzwert* einer Folge von Elementen $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ aus M, wenn gilt $\varrho(x_n, x) \to 0$ für $n \to \infty$. In diesem Fall schreiben wir $x_n \to x$ oder $\lim\limits_n x_n = x$.

Für konvergente Punktfolgen eines metrischen Raumes kann man einige Sätze beweisen.

Satz 1. *Wenn eine Punktfolge $\{x_n\}$ eines metrischen Raumes X gegen einen Punkt $x \in X$ konvergiert, so konvergiert auch jede Teilfolge $\{x_{n_k}\}$ der Folge $\{x_n\}$ gegen denselben Punkt.*

Der Beweis ist trivial.

Satz 2. *Eine Punktfolge $\{x_n\}$ eines metrischen Raumes kann höchstens gegen einen Grenzwert konvergieren.*

Es konvergiere $x_n \to x$ und $x_n \to y$. Dann ist für jedes $\varepsilon > 0$

$$\varrho(x, y) \leqq \varrho(x, x_n) + \varrho(x_n, y) < \varepsilon$$

für hinreichend große n. Da x und y fest sind und ε eine beliebige positive Zahl ist, so ist die Ungleichung nur richtig, falls $\varrho(x, y) = 0$, d. h. $x = y$ ist.

Satz 3. *Wenn eine Punktfolge $\{x_n\}$ aus X gegen einen Punkt $x \in X$ konvergiert, so ist sie in folgendem Sinne beschränkt: Für jeden festen Punkt θ des Raumes ist die Menge der Zahlen $\varrho(x_n, \theta)$ beschränkt.*

Nach der Dreiecksungleichung gilt für jedes n $\varrho(x_n, \theta) \leqq \varrho(x_n, x) + \varrho(x, \theta) \leqq L + \varrho(x, \theta) = K$, da $\{\varrho(x_n, x)\}$ als konvergente Zahlenfolge beschränkt ist, und somit die Zahlen $\varrho(x_n, x)$ nicht größer sind als eine Konstante L.

Als *Kugel* (*abgeschlossene Kugel*) mit dem Mittelpunkt a und dem Radius r bezeichnen wir die Menge aller Punkte x des Raumes X, die der Ungleichung $\varrho(x, a) < r$ bzw. $\varrho(x, a) \leqq r$ genügen. Diese Kugel werden wir mit $S(a, r)$ bzw. $\bar{S}(a, r)$ bezeichnen.

Ferner verstehen wir unter einer *Umgebung* eines Punktes x jede Kugel mit x als Mittelpunkt. Dann sieht man leicht, daß x Grenzwert einer Folge $\{x_n\}$ genau dann ist, wenn jede Umgebung des Punktes x von einer gewissen Nummer an alle Punkte der betrachteten Folge enthält. Eine Menge, die innerhalb einer Kugel gelegen ist, heißt *beschränkt.*

Manchmal ist in einem Raum direkt der Begriff des Grenzwertes einer Folge von Elementen gegeben. Wenn in diesem Raum eine Metrik so eingeführt werden kann, daß sich der von ihr bestimmte Grenzwertbegriff mit dem schon vorliegenden deckt, so nennt man den gegebenen Raum *metrisierbar.*

Die abgeschlossene Hülle. In allgemeinen metrischen Räumen kann man viele Begriffe einführen, denen wir in der Theorie der linearen Punktmengen begegnet sind. Wenn eine Menge $M \subseteq X$ gegeben ist, dann heißt ein Punkt $a \in X$ *Häufungspunkt* dieser Menge, wenn jede Umgebung des Punktes a mindestens einen Punkt der Menge $M - a$ enthält, d. h., wenn $S(a, r) \cap (M - a) \neq \Phi$ für jedes r ist. Die Menge, die man erhält, wenn man zu M alle ihre Häufungspunkte hinzunimmt, heißt *abgeschlossene Hülle* der Menge M, und man bezeichnet sie mit $\bar{M}$.

Leicht stellt man folgende grundlegenden Eigenschaften dieses Abschließungsprozesses von Punktmengen eines metrischen Raumes fest:

1. $\overline{M \cup N} = \bar{M} \cup \bar{N}$.
2. $M \subseteq \bar{M}$.
3. $\bar{\bar{M}} = \bar{M}$.
4. $\bar{\Phi} = \Phi$.

Eine Menge M heißt *abgeschlossen*, wenn $M = \bar{M}$ ist. Eine Menge M ist *offen*, wenn ihre Komplementärmenge $X - M$ abgeschlossen ist. Eine Menge M nennt man *dicht* in einer offenen Menge G, wenn $G \subseteq \bar{M}$. Speziell heißt M *überall dicht in einem Raum* X oder einfach *überall dicht*, wenn $\bar{M} = X$ ist. Schließlich ist M *nirgends dicht in einem Raum* X, wenn jede Kugel dieses Raumes eine Kugel enthält, die frei ist von Punkten der Menge M.

Eine ausführliche Darlegung der Eigenschaften abgeschlossener und offener Mengen in metrischen Räumen findet sich in [3].

Stetige Funktionen. X und Y seien zwei gegebene metrische Räume und $y = f(x)$ eine auf einer Menge M des Raumes X definierte Funktion, deren Werte im Raum Y liegen. Die Funktion $f(x)$ heißt *stetig im Punkt* $x_0 \in M$, wenn für

jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß $\varrho_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ für jeden Punkt $x \in M$ ist, der der Ungleichung $\varrho_X(x, x_0) < \delta$ genügt.

Aus der Definition der Stetigkeit von $f(x)$ folgt: Geht

$$x_n \to x_0 \quad (x_n, x_0 \in M)\,,$$

so strebt

$$f(x_n) \to f(x_0)\,.$$

Es gilt die Umkehrung: Strebt

$$f(x_n) \to f(x_0)$$

für eine beliebige, gegen $x_0 \in M$ konvergierende Folge $\{x_n\} \subseteq M$, so ist die Funktion $f(x)$ stetig im Punkt x_0. Der Beweis der Behauptung verläuft genauso wie bei den reellen Funktionen einer reellen Veränderlichen.

Homöomorphismus. X und Y seien zwei gegebene metrische Räume, und es existiere eine umkehrbare eindeutige Abbildung des Raumes X auf Y. Ist diese Abbildung in beiden Richtungen stetig, so heißen die Räume X und Y *homöomorph.*

§ 3. Beispiele von metrischen Räumen

Die Zahlengerade. Sei $X = R$, wobei R die Menge aller reellen Zahlen ist (Zahlengerade). Sind $x \in R$, $y \in R$, so setzen wir $\varrho(x, y) = |x - y|$. Es gelten die metrischen Axiome. Die Konvergenz in X ist die übliche Konvergenz einer Zahlenfolge.

Der Euklidische Raum. X sei ein arithmetischer n-dimensionaler Raum, d. h. die Menge aller n-Tupel von reellen Zahlen. Sind $x = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ und $y = \{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$ Elemente aus X, so setzen wir

$$\varrho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \eta_i)^2}\,.$$

Offensichtlich sind die Axiome der Metrik erfüllt.

Es sei $x_k = \{\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \ldots, \xi_n^{(k)}\}$, $k = 1, 2, \ldots$, und $\varrho(x, x_k) \to 0$,

d.h., $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\xi_i^{(k)} - \xi_i)^2} \to 0$ für $k \to \infty$.

Das ist der Bedingung $\xi_i^{(k)} \to \xi_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, für $k \to \infty$ gleichwertig.

Also ist die Konvergenz in dem betrachteten Raum die *koordinatenweise Konvergenz.*

Ein Raum X mit dieser Metrik heißt *n-dimensionaler euklidischer Raum.* Wir bezeichnen ihn mit E_n.

Der Raum der stetigen Funktionen mit Tschebyschew-Metrik. Es sei X die Menge aller stetigen Funktionen, die auf dem Intervall $[0, 1]$ definiert sind.

Wir führen in X eine Metrik ein, indem wir $\varrho(x, y) = \max\limits_{0 \leqq t \leqq 1} |x(t) - y(t)|$ setzen. Man sieht, daß die metrischen Axiome erfüllt sind. Denn es ist $\varrho(x, y) \geqq 0$ und $\varrho(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x(t) \equiv y(t)$. Ebenso erkennt man, daß $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$ ist. Ferner gilt für jedes $t \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} |x(t) - z(t)| &= |[x(t) - y(t)] + [y(t) - z(t)]| \\ &\leqq |x(t) - y(t)| + |y(t) - z(t)| \\ &\leqq \max_t |x(t) - y(t)| + \max_t |y(t) - z(t)| \\ &= \varrho(x, y) + \varrho(y, z)\,. \end{aligned}$$

Daher ist $\varrho(x, z) = \max\limits_t |x(t) - z(t)| \leqq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$.

Die Menge der stetigen Funktionen, die auf dem Intervall $[0, 1]$ mit der obigen Metrik definiert sind, heißt *Raum der stetigen Funktionen.* Man schreibt dafür $C[0, 1]$. Wir werden auch *Raum der stetigen Funktionen mit* TSCHEBYSCHEW-*Metrik* sagen.

Wir betrachten die Konvergenz im Raum $C[0, 1]$. Es sei eine Folge $\{x_n(t)\}$ von Elementen aus $C[0, 1]$ gegeben, die gegen $x(t)$ konvergiert (d. h. $\varrho(x_n, x) \to 0$ für $n \to \infty$). Dies besagt, daß $\max_t |x(t) - x_n(t)| \to 0$ für $n \to \infty$, d. h., zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine natürliche Zahl $n_0 = n_0(\varepsilon)$, so daß $\max_t |x(t) - x_n(t)| < \varepsilon$ ist für alle $n \leqq n_0(\varepsilon)$. Folglich ist $|x(t) - x_n(t)| < \varepsilon$ für alle $n \leqq n_0(\varepsilon)$ und für jedes $t \in [0, 1]$. Das heißt aber, daß die Folge $\{x_n(t)\}$ *gleichmäßig* gegen die Funktion $x(t)$ konvergiert. Wie man leicht sieht, gilt auch die Umkehrung: Wenn eine Folge $\{x_n(t)\}$ gleichmäßig gegen $x(t)$ konvergiert, so ist $\varrho(x_n, x) \to 0$. Also ist die Konvergenz im Raum $C[0, 1]$ die gleichmäßige Konvergenz auf dem Intervall $[0, 1]$.

Der Raum der beschränkten Zahlenfolgen. Es sei X der Raum der beschränkten Zahlenfolgen

$$x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots\} = \{\xi_i\}.$$

Dies bedeutet, daß es zu jedem x eine Konstante K_x gibt, so daß $|\xi_i| \leqq K_x$ ist für alle i.

Sind $x = \{\xi_i\}$ und $y = \{\eta_i\}$ aus dem Raum X, so führen wir den Abstand

$$\varrho(x, y) = \sup_i |\xi_i - \eta_i|$$

ein.

Eine Nachprüfung verlangt nur die Dreiecksungleichung. Es gilt

$$|\xi_i - \zeta_i| \leqq |\xi_i - \eta_i| + |\eta_i - \zeta_i| \leqq \sup_i |\xi_i - \eta_i| + \sup_i |\eta_i - \zeta_i| = \varrho(x, y) + \varrho(y, z).$$

Folglich ist auch

$$\sup_i |\xi_i - \zeta_i| = \varrho(x, z) \leqq \varrho(x, y) + \varrho(y, z).$$

Der so erhaltene Raum ist der *Raum m der beschränkten Zahlenfolgen.*

x_n und x seien Elemente aus m, $x_n = \{\xi_i^{(n)}\}$, $x = \{\xi_i\}$ und $\varrho(x_n, x) \to 0$ für $n \to \infty$. Dies besagt, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index $n_0(\varepsilon)$ gibt, so daß

$$\varrho(x_n, x) = \sup_i |\xi_i^{(n)} - \xi_i| < \varepsilon \quad \text{für} \quad n \geqq n_0(\varepsilon)$$

ist. Daraus folgt

$$|\xi_i^{(n)} - \xi_i| < \varepsilon$$

für $n \geqq n_0(\varepsilon)$ und jedes i.

Wie man leicht sieht, gilt auch umgekehrt: Falls $|\xi_i^{(n)} - \xi_i| < \varepsilon$ ist für $n \geqq n_0(\varepsilon)$ und alle i, so ist $\varrho(x_n, x) \to 0$ für $n \to \infty$. Folglich ist die Konvergenz im Raum m die *bezüglich der Indizes gleichmäßige koordinatenweise Konvergenz.*

Der Raum der konvergenten Zahlenfolgen. Es sei X die Menge der konvergenten Zahlenfolgen

$$x = \{\xi_i\},$$

wobei

$$\lim_i \xi_i = \xi$$

existiert. Ist

$$x = \{\xi_i\}, \qquad y = \{\eta_i\}, \qquad x \in X, \qquad y \in Y,$$

so setzen wir

$$\varrho(x, y) = \sup_i |\xi_i - \eta_i|.$$

Der Raum c der konvergenten Zahlenfolgen ist ein Teilraum des Raumes m der beschränkten Zahlenfolgen.

Daraus folgt, daß die metrischen Axiome in c erfüllt sind und daß die Konvergenz in c die *bezüglich der Indizes gleichmäßige koordinatenweise Konvergenz* ist.

Der Raum der beschränkten reellen Funktionen. Wir betrachten die Menge aller im Intervall $[0, 1]$ gegebenen beschränkten Funktionen $x(t)$ der reellen Veränderlichen t. Wir führen eine Metrik ein und setzen

$$\varrho(x, y) = \sup_t |x(t) - y(t)| .$$

Mühelos lassen sich alle metrischen Axiome nachprüfen. Die Menge aller reellen beschränkten Funktionen mit dieser Metrik nennt man den *Raum* $M[0, 1]$. Die Konvergenz im Raum $M[0, 1]$ ist die *gleichmäßige Konvergenz im Intervall* $[0, 1]$. Es gilt $C[0, 1] \subset \subset M[0, 1]$.

Der Raum der beschränkten meßbaren Funktionen. Wir führen zunächst einen Begriff ein.

$\alpha(t)$ sei eine in $[0, 1]$ meßbare Funktion. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{E}$ die Klasse aller in $[0, 1]$ liegenden Mengen E vom Maß Null. Auf $\mathfrak{E}$ wird die folgende Funktion betrachtet:

$$\sup_{[0,1]\setminus E} \alpha(t) = \mu_0(E) .$$

Wir zeigen: Ist diese Funktion endlich für beliebiges $E \in \mathfrak{E}$, so nimmt sie auf einer bestimmten Menge E_α ihren minimalen Wert an. Es sei

$$\mu_0 = \inf_{E \in \mathfrak{E}} \mu_0(E) .$$

Auf Grund der Definition der unteren Grenze kann eine solche Folge von Mengen $\{E_n\} \subset \mathfrak{E}$ angegeben werden, daß

$$\mu_0 \leqq \sup_{[0,1]\setminus E_n} \alpha(t) < \mu_0 + \frac{1}{n}$$

ist.

Sei nun $E_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, so ist $m\, E_\alpha = 0$ und

$$\mu_0 \leqq \sup_{[0,1]\setminus E_\alpha} \alpha(t) \leqq \sup_{[0,1]\setminus E_n} \alpha(t) < \mu_0 + \frac{1}{n} .$$

Da diese Ungleichung für beliebiges n gilt, folgt daraus $\mu_0 = \mu_0(E_\alpha)$. Die Zahl μ_0 heißt *wesentliches Maximum* der Funktion $\alpha(t)$ auf $[0, 1]$ und wird durch

$$\operatorname*{vrai\,max}_{[0,1]} \alpha(t) = \min_{E \in \mathfrak{E}} \{ \sup_{[0,1]\setminus E} \alpha(t)\}$$

bezeichnet.

X sei die Menge aller auf $[0, 1]$ meßbaren Funktionen $x(t), y(t), z(t), \ldots$, deren wesentliche Maxima endlich sind. Zwei Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ aus X sehen wir als identisch an, wenn sie fast überall gleich sind.

Für zwei Funktionen $x(t), y(t) \in X$ setzen wir

$$\varrho(x, y) = \operatorname*{vrai\,max}_{[0,1]} |x(t) - y(t)| .$$

Wir kontrollieren die Erfüllung der metrischen Axiome.

1. Da

$$\sup_{[0,1]\setminus E} |x(t) - y(t)| \geqq 0$$

ist, gilt $\varrho(x, y) \geqq 0$, wobei $\varrho(x, y) = 0$ ist, wenn fast überall $x(t) = y(t)$ gilt. Ist umgekehrt $\varrho(x, y) = 0$, dann gibt es eine Menge E_{xy} vom Maße Null mit

$$\sup_{[0,1]\setminus E_{xy}} |x(t) - y(t)| = 0 ,$$

d. h., $x(t) = y(t)$ gilt außerhalb E_{xy}, und folglich sind $x(t)$ und $y(t)$ fast überall gleich.

2. $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$ ist unmittelbar erfüllt.

3. $x(t)$, $y(t)$ und $z(t)$ seien Funktionen aus X und E_{xz}, E_{yz} Mengen vom Maße Null mit

$$\varrho(x, z) = \sup_{[0,1]\setminus E_{xz}} |x(t) - z(t)| , \quad \varrho(y, z) = \sup_{[0,1]\setminus E_{yz}} |y(t) - z(t)| .$$

Setzen wir $E_{xy} = E_{xz} \cup E_{yz}$, so wird

$$\begin{aligned}\sup_{[0,1]\setminus E_{xy}} |x(t) - y(t)| &\leqq \sup_{[0,1]\setminus E_{xy}} |x(t) - z(t)| + \sup_{[0,1]\setminus E_{xy}} |z(t) - y(t)| \\ &\leqq \sup_{[0,1]\setminus E_{xz}} |x(t) - z(t)| + \sup_{[0,1]\setminus E_{yz}} |z(t) - y(t)| \\ &= \varrho(x, z) + \varrho(z, y) .\end{aligned}$$

Dann gilt erst recht

$$\varrho(x, y) = \operatorname*{vrai\,max}_{[0,1]} |x(t) - y(t)| \leqq \varrho(x, z) + \varrho(z, y) ,$$

und die Dreiecksungleichung ist bewiesen.

Den so erhaltenen *Raum* bezeichnen wir mit $\tilde{M}[0, 1]$.

Wir untersuchen die Konvergenz in diesem Raum. Es sei $x(t) \in \tilde{M}[0, 1]$, $x_n(t) \in \tilde{M}[0, 1]$ $(n = 1, 2, \ldots)$ und $\varrho(x, x_n) \to 0$ für $n \to \infty$. Dies besagt, daß zu vorgegebenem $\varepsilon_k > 0$

$$\varrho(x_n, x) = \min_{E} \{ \sup_{t \in [0,1]\setminus E} |x_n(t) - x(t)|\} < \varepsilon_k$$

ist für $n \geqq n_0(\varepsilon_k)$. Dann gibt es eine Menge E_k vom Maße Null, so daß

$$\sup_{t \in [0,1]\setminus E_k} |x_n(t) - x(t)| < \varepsilon_k, \quad \text{falls} \quad n \geqq n_0(\varepsilon_k)$$

ist. Daher gilt $|x_n(t) - x(t)| < \varepsilon_k$ für $n \geqq n_0(\varepsilon_k)$ und für jedes $t \in [0, 1] \setminus E_k$.

Wir nehmen jetzt eine Nullfolge $\{\varepsilon_m\}$ und die dazugehörigen Mengen E_m. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gilt $|x_n(t) - x(t)| < \varepsilon_k < \varepsilon$ für $n \geqq n_0(\varepsilon) = n_0(\varepsilon_k)$ und für alle $t \in [0, 1] \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$. Also gilt $x_n(t) \to x(t)$ fast überall gleichmäßig auf $[0, 1]$.

Möge umgekehrt $\{x_n(t)\}$ gleichmäßig fast überall gegen $x(t)$ konvergieren. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index $n_0(\varepsilon)$ und eine Menge E_ε vom Maße Null, so daß $|x_n(t) - x(t)| < \varepsilon$ ist für $n \geqq n_0(\varepsilon)$ und jedes $t \in [0, 1] \setminus E_\varepsilon$. Dann ist aber auch

$$\sup_{t \in [0,1]\setminus E_\varepsilon} |x_n(t) - x(t)| \leqq \varepsilon$$

für $n \geqq n_0(\varepsilon)$. Daraus wiederum folgt

$$\min_{E} \{ \sup_{t \in [0,1]\setminus E} |x_n(t) - x(t)|\} \leqq \varepsilon$$

für $n \geqq n_0(\varepsilon)$, d. h., es gilt $\varrho(x_n, x) \to 0$ für $n \to \infty$.

Folglich ist die Konvergenz im Raum $\tilde{M}[0, 1]$ *die fast überall gleichmäßige Konvergenz.*

Der Raum aller Zahlenfolgen. Es sei X die Menge aller reellen Zahlenfolgen. In dieser Menge führen wir den Limesbegriff ein, indem wir festsetzen, daß $x_n = \{\xi_i^{(n)}\}$ gegen $x = \{\xi_i\}$ konvergiert, wenn $\xi_i^{(n)} \to \xi_i$ geht für $n \to \infty$ und alle $i = 1, 2, \ldots$ (im allgemeinen ungleichmäßig bezüglich i). So erhalten wir einen nichtmetrischen *Raum*, den wir mit s bezeichnen.

Wir zeigen, daß der Raum s metrisierbar ist.

Es sei $x = \{\xi_i\}$, $x \in s$ und $y = \{\eta_i\}$, $y \in s$. Wir setzen

$$\varrho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i - \eta_i|}{1 + |\xi_i - \eta_i|}$$

und beweisen, daß die Axiome der Metrik für diesen Abstand erfüllt sind. Daß

1. $\varrho(x, y) \geqq 0$ und $\varrho(x, y) = 0$ nur für $x = y$ gilt, und daß
2. $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$ ist, sieht man unmittelbar.
3. Die Dreiecksungleichung folgt aus der Beziehung

$$\frac{|a + b|}{1 + |a + b|} \leqq \frac{|a|}{1 + |a|} + \frac{|b|}{1 + |b|},$$

die man folgendermaßen beweist.

a und b mögen dasselbe Vorzeichen haben. Man kann voraussetzen, daß $a > 0$ und $b > 0$ ist, dann gilt

$$\frac{|a + b|}{1 + |a + b|} = \frac{a + b}{1 + a + b} = \frac{a}{1 + a + b} + \frac{b}{1 + a + b} < \frac{a}{1 + a} + \frac{b}{1 + b}.$$

Wenn a und b jetzt verschiedenes Vorzeichen besitzen, können wir $|a| \geqq |b|$ voraussetzen. Dann ist $|a + b| \leqq |a|$.

Wir betrachten die Funktion $f(x) = \dfrac{x}{1 + x}$. Es gilt $f'(x) = \dfrac{1}{(1 + x)^2}$, $f'(x) > 0$, also ist $f(x)$ eine monoton wachsende Funktion.

Somit gilt

$$\frac{|a + b|}{1 + |a + b|} \leqq \frac{|a|}{1 + |a|} \leqq \frac{|a|}{1 + |a|} + \frac{|b|}{1 + |b|}.$$

Kehren wir zur Dreiecksungleichung zurück, so finden wir

$$\varrho(x, z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i - \zeta_i|}{1 + |\xi_i - \zeta_i|} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i - \eta_i + \eta_i - \zeta_i|}{1 + |\xi_i - \eta_i + \eta_i - \zeta_i|}$$

$$\leqq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i - \eta_i|}{1 + |\xi_i - \eta_i|} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\eta_i - \zeta_i|}{1 + |\eta_i - \zeta_i|} = \varrho(x, y) + \varrho(y, z),$$

was zu zeigen war.

Wir beweisen, daß die Konvergenz im Sinne der eingeführten Metrik koordinatenweise ist (im allgemeinen ist sie ungleichmäßig bezüglich der Indizes). Es sei $x_n = \{\xi_i^{(n)}\}$, $x = \{\xi_i\}$ und $\varrho(x_n, x) \to 0$, dies besagt, daß

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i^{(n)} - \xi_i|}{1 + |\xi_i^{(n)} - \xi_i|} < \varepsilon$$

ist für $n \geqq n_0(\varepsilon)$. Dann ist aber für jedes feste i erst recht

$$\frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i^{(n)} - \xi_i|}{1 + |\xi_i^{(n)} - \xi_i|} < \varepsilon$$

für $n \geqq n_0(\varepsilon)$, und da ε beliebig, sowie i fest war, gilt $|\xi_i^{(n)} - \xi_i| \to 0$ für $n \to \infty$. Umgekehrt: Es gehe $|\xi_i^{(n)} - \xi_i| \to 0$ für $n \to \infty$ und jedes i. Wir nehmen ein beliebiges $\varepsilon > 0$ und bestimmen ein m so, daß

$$\sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt. Dann ist

$$\varrho(x_n, x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i^{(n)} - \xi_i|}{1 + |\xi_i^{(n)} - \xi_i|} + \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i^{(n)} - \xi_i|}{1 + |\xi_i^{(n)} - \xi_i|}$$

$$< \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i^{(n)} - \xi_i|}{1 + |\xi_i^{(n)} - \xi_i|} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da die Anzahl der Glieder in der ersten Summe endlich und fest ist, kann man ein $n_0(\varepsilon)$ so wählen, daß

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i^{(n)} - \xi_i|}{1 + |\xi_i^{(n)} - \xi_i|} < \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt für $n \geqq n_0(\varepsilon)$. Für diese n ist dann

$$\varrho(x_n, x) < \varepsilon,$$

was zu zeigen war.

Aus dem Bewiesenen folgt, daß die Konvergenz im Sinne der eingeführten Metrik mit der des Raumes s zusammenfällt. Die Einführung dieser Metrik stellt also eine Metrisierung des Raumes dar.

Der Raum der Konvergenz dem Maße nach. X sei die Gesamtheit aller auf $[0, 1]$ definierten meßbaren Funktionen $x(t)$. Zwei fast überall übereinstimmende Funktionen bezeichnen wir als identisch.

Wir führen eine Metrik mittels der Gleichung

$$\varrho(x, y) = \int_0^1 \frac{|x(t) - y(t)|}{1 + |x(t) - y(t)|} \, dt$$

ein. Wie auch im vorangegangenen Beispiel überzeugen wir uns von der Gültigkeit der metrischen Axiome.

Der erhaltene *Raum* heißt $S[0, 1]$. Die Konvergenz in $S[0, 1]$ ist die *Konvergenz dem Maße* nach. Zur Definition der Konvergenz dem Maße nach siehe [24].

Der Raum der in p-ter Potenz integrablen Funktionen. Es sei X die Menge aller Funktionen $x(t)$, die zu $L_p[0, 1]$ gehören. Zwei Funktionen, die sich nur auf einer Menge vom Maße Null unterscheiden, wollen wir wiederum als gleich betrachten.

Ist $x(t) \in L_p[0, 1]$ und $y(t) \in L_p[0, 1]$, so setzen wir

$$\varrho(x, y) = \left(\int_0^1 |x(t) - y(t)|^p \, dt \right)^{1/p}.$$

Man bestätigt leicht, daß die metrischen Axiome erfüllt sind. Daß $\varrho(x, y) \geqq 0$ ist, wobei $\varrho(x, y) = 0$ nur für $x = y$ gilt, und daß $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$ ist, sieht man unmittelbar. Die Gültigkeit des Dreiecksaxioms folgt aus der Ungleichung von Minkowski für Integrale.

Der Raum $L_2[0, 1]$ heißt Hilbert*scher Funktionenraum.*

Es sei $x_n(t) \in L_p[0, 1]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, und es konvergiere $\{x_n(t)\}$ gegen $x(t)$, $x(t) \in L_p[0,1]$, d. h., es gehe

$$\int_0^1 |x_n(t) - x(t)|^p \, dt \to 0$$

für $n \to \infty$. Dann sagt man, die Funktionenfolge $\{x_n(t)\}$ konvergiere *im Mittel* von p-ter Potenz gegen die Funktion $x(t)$. Für $p = 2$ spricht man schlechthin von *Konvergenz im Mittel.*

Der Raum der Zahlenfolgen l_p ($p \geqq 1$). X sei die Menge der zu l_p gehörenden reellen Zahlenfolgen $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots\}$. Ist

$$x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots\} \quad \text{und} \quad y = \{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots\},$$

so definieren wir den Abstand durch

$$\varrho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \eta_i|^p\right)^{1/p}.$$

Sofort bestätigt man, daß die Axiome der Metrik erfüllt sind. $\varrho(x, y) \geqq 0$, $\varrho(x, y) = 0$ nur für $x = y$ und $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$ sind evident. Das Dreiecksaxiom folgt aus der Ungleichung von MINKOWSKI für Summen.

Der Raum l_2 heißt HILBERT*scher Folgenraum.*

Man kann zeigen: Die Konvergenz einer Folge $\{x_n\}$, $x_n = \{\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots, \xi_i^{(n)}, \ldots\}$, gegen ein Element $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$ im Raum l_p bedeutet, daß

1. $\xi_i^{(n)} \to \xi_i$ geht für $n \to \infty$ für alle i und
2. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zahl $N_0(\varepsilon)$, so daß

$$\left(\sum_{i=N+1}^{\infty} |\xi_i^{(n)}|^p\right)^{1/p} < \varepsilon \quad \text{ist für } N \geqq N_0(\varepsilon) \text{ und beliebiges } n.$$

Der Raum $l_p^{(n)}$. Es sei X ein arithmetischer n-dimensionaler Raum $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ und $y = \{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n\}$. Wir setzen $\varrho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i - \eta_i|^p\right)^{1/p}$. Den so erhaltenen Raum nennen wir $l_p^{(n)}$. Speziell ist $l_2^{(n)}$ der n-dimensionale euklidische Raum.

Man kann annehmen, daß $l_p^{(n)} \subseteq l_p$ ist, wenn man jedes Element $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\} \in l_p^{(n)}$ als Element $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, 0, 0, \ldots\} \in l_p$ auffaßt. Hieraus folgt sofort, daß für $l_p^{(n)}$ die metrischen Axiome erfüllt sind. Die Konvergenz im Raum $l_p^{(n)}$ ist die koordinatenweise Konvergenz.

Komplexe Räume. Neben den Räumen $C[0, 1]$, $L_p[0, 1]$, c, l_p kann man die sie umfassenden komplexen Räume, genannt *komplexe* $C[0, 1]$, $L_p[0, 1]$, c, l_p betrachten. Die Elemente des komplexen Raumes $C[0, 1]$ sind komplexwertige stetige Funktionen einer reellen Veränderlichen, die des Raumes $L_p[0, 1]$ sind komplexwertige Funktionen von summierbarer p-ter Potenz. Die Elemente des komplexen Raumes c (bzw. l_p) sind die konvergenten Folgen komplexer Zahlen (bzw. die Folgen komplexer Zahlen, für die die aus den Beträgen der p-ten Potenzen ihrer Glieder gebildeten Reihen konvergieren).

Alle oben für reelle Räume gegebenen Definitionen lassen sich auf die entsprechenden komplexen Räume übertragen.

Ein nicht metrisierbarer Raum. Wir führen ein Beispiel einer Menge an, in der man einen Konvergenzbegriff einführen kann, zu dem es keine ihn definierende Metrik gibt.

Wir betrachten die Menge $F[0, 1]$ aller auf dem Intervall $[0, 1]$ definierten reellen Funktionen. Wir sagen, eine Folge $\{x_n(t)\} \subset F[0, 1]$ konvergiere gegen $x(t) \in F[0, 1]$, wenn für jedes feste t

$$x_n(t) \to x(t)$$

konvergiert. Also ist die Konvergenz einer Funktionenfolge in $F[0, 1]$ die *punktweise Konvergenz.* Sie ist nicht metrisierbar. Wir nehmen an, daß in $F[0, 1]$ eine Metrik so eingeführt werden kann, daß die dadurch definierte Konvergenz die punktweise Konvergenz der Funktionenfolgen wird. Ferner sei M die Menge aller stetigen Funktionen des erhaltenen metrischen Raumes $F[0, 1]$. Dann ist einerseits nach den Regeln der Hüllenbildung im metrischen Raum $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$, andererseits ist $\overline{\overline{M}} \neq \overline{M}$, da $\overline{M}$ die Menge aller stetigen Funktionen und ihrer Grenzwerte im Sinne der punktweisen Konvergenz bedeutet, d. h. die Menge der Funktion der ersten BAIREschen Klasse, und $\overline{\overline{M}}$ die Menge der Funktionen der ersten Klasse und ihrer Grenzwerte, d. h. die Funktionenmenge der zweiten BAIREschen Klasse.[1])

[1]) Zur Klassifizierung von BAIRE siehe [24].

§ 4. Vollständige Räume. Vollständigkeit einiger konkreter Räume

Definitionen. Eine Folge $\{x_n\}$ von Elementen eines metrischen Raumes X heißt *konvergent in sich* oder *Fundamentalfolge*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index $n_0(\varepsilon)$ gibt, so daß $\varrho(x_m, x_n) < \varepsilon$ ist für $m \geqq n_0(\varepsilon)$ und $n \geqq n_0(\varepsilon)$.

Wenn eine Folge $\{x_n\}$ *gegen einen Grenzwert* x *konvergiert, so konvergiert sie in sich.*

Es sei $x = \lim\limits_n x_n$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index $n_0(\varepsilon)$, so daß $\varrho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ ist für $n \geqq n_0$. Folglich ist

$$\varrho(x_m, x_n) \leqq \varrho(x_m, x) + \varrho(x_n, x) < \varepsilon$$

für $n \geqq n_0$ und $m \geqq n_0$, was zu zeigen war.

Die umgekehrte Behauptung für einen beliebigen metrischen Raum ist falsch, da metrische Räume existieren, in denen es Folgen gibt, die zwar in sich konvergieren, aber nicht gegen einen Grenzwert aus dem Raum streben.

Beispiele. 1. Es sei X die Menge der rationalen Zahlen. Der Abstand ist durch

$$\varrho(r_1, r_2) = |r_1 - r_2|$$

definiert. Dann ist X ein metrischer Raum. Die Folge $\{r_n\} = \left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ konvergiert sowohl in sich als auch gegen den Grenzwert 0. Jetzt nehmen wir $r_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Diese Folge konvergiert in sich, hat aber im Raum X keinen Grenzwert, da $\lim\limits_{n\to 0}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ keine rationale Zahl ist.

2. X sei der Raum der Polynome $P(t)$, $0 \leqq t \leqq 1$, mit TSCHEBYSCHEW-Metrik, d. h., für $P(t)$ und $Q(t)$ aus X ist

$$\varrho(P, Q) = \max_{0 \leqq t \leqq 1} |P(t) - Q(t)|\,.$$

Es sei $\{P_n(t)\}$ eine Folge von Polynomen, die gleichmäßig gegen eine stetige Funktion konvergiert, die kein Polynom ist. Offensichtlich ist die Folge $\{P_n(t)\}$ eine Fundamentalfolge, die aber keinen Grenzwert im Raum X besitzt.

Wenn in einem metrischen Raum X jede in sich konvergente Folge gegen einen Grenzwert konvergiert (der Element desselben Raumes ist), so heißt der Raum X *vollständig*.

Wir bemerken, daß eine abgeschlossene Menge eines vollständigen Raumes selbst ein vollständiger Raum ist.

Im folgenden wollen wir von einigen metrischen Räumen nachweisen, daß sie vollständig sind.

Die Vollständigkeit von E_n. Für E_n, den euklidischen n-dimensionalen Raum, folgt die Vollständigkeit aus dem CAUCHYschen Kriterium für Punktfolgen.

Die Vollständigkeit von $C[0, 1]$. Es sei eine Folge $\{x_i(t)\}$ gegeben, wobei $x_i(t) \in C[0, 1]$, $i = 1, 2, \ldots$, ist, und es sei

$$\varrho(x_m, x_n) \to 0$$

für $m, n \to \infty$. Dies besagt, daß die Folge $\{x_i(t)\}$ im CAUCHYschen Sinne auf $[0, 1]$ gleichmäßig konvergiert. $x(t)$ sei Grenzwert der Funktionenfolge $\{x_i(t)\}$. Als Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen ist diese Funktion auch stetig auf $[0, 1]$. Also ist $x(t) \in C[0, 1]$, und es konvergiert $\varrho(x_n, x) \to 0$. Dies besagt, daß der Raum $C[0, 1]$ vollständig ist.

Die Vollständigkeit von m. $\{x_n\}$ sei eine in sich konvergente Folge von Elementen aus m, und es sei $x_n = \{\xi_i^{(n)}\}$. Da $x_n \in m$ ist, so ist $|\xi_i^{(n)}| \leqq K_n$ für $i = 1, 2, \ldots$. Da ferner $\{x_n\}$ in sich konvergiert, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index n_0, so daß $\varrho(x_n, x_k) < \varepsilon$ ist sobald $n \geqq n_0$ und $k \geqq n_0$, oder, was dasselbe ist, es gilt

$$\sup_i |\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(k)}| < \varepsilon \quad \text{für} \quad n, k \geqq n_0 .$$

Daraus folgt

$$|\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(k)}| < \varepsilon \tag{1}$$

für $n \geqq n_0$, $k \geqq n_0$ und für jedes i.

Es sei i fest. Dann ist nach (1) die Zahlenfolge $\{\xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)}, \ldots, \xi_i^{(n)}, \ldots\}$ eine Folge, die dem CAUCHYschen Kriterium für die Existenz eines Grenzwertes genügt und folglich gegen eine Zahl ξ_i konvergiert. So erhalten wir eine Zahlenfolge $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots\}$.

Wir betrachten die Ungleichung (1) und lassen k gegen Unendlich streben. Dann erhalten wir in der Grenze

$$|\xi_i^{(n)} - \xi_i| \leqq \varepsilon \tag{2}$$

für $n \geqq n_0$ und alle i.

Daraus folgt

$$|\xi_i| \leqq |\xi_i^{(n_0)} - \xi_i| + |\xi_i^{(n_0)}| \leqq \varepsilon + K_{n_0} ,$$

wobei diese Ungleichung für alle i gilt. Dies besagt aber, daß $\{\xi_i\}$ eine beschränkte Zahlenfolge ist, d. h., es ist $x = \{\xi_i\}$ aus m. Aus (2) erhalten wir $\sup_i |\xi_i^{(n)} - \xi_i| \leqq \varepsilon$ für $n \geqq n_0$, d. h. $\varrho(x_n, x) \leqq \varepsilon$ für $n \geqq n_0$.

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt daraus, daß $x_n \to x$ konvergiert für $n \to \infty$. Die Vollständigkeit des Raumes m ist damit bewiesen.

Die Vollständigkeit des Raumes c. Wir zeigen, daß der Raum c als Teilmenge des Raumes m betrachtet in m abgeschlossen ist. Daraus folgt dann auf Grund der Bemerkung von S. 11 die Vollständigkeit von c.

Es sei $\{x_n\}$, $x_n = \{\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots, \xi_i^{(n)}, \ldots\}$, eine Folge von Elementen aus c, und es gelte $x_n \to x_0$, $x_0 = \{\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \ldots, \xi_i^{(0)}, \ldots\}$. Wir weisen die Konvergenz der Folge $\{\xi_i^{(0)}\}$ nach. Hier ist

$$\begin{aligned} |\xi_i^{(0)} - \xi_j^{(0)}| &\leqq |\xi_i^{(0)} - \xi_i^{(n)}| + |\xi_i^{(n)} - \xi_j^{(n)}| + |\xi_j^{(n)} - \xi_j^{(0)}| \\ &\leqq 2\,\varrho(x_n, x_0) + |\xi_i^{(n)} - \xi_j^{(n)}| . \end{aligned}$$

Mit einer willkürlichen Zahl $\varepsilon > 0$ wählen wir zunächst n so groß, daß $\varrho(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{4}$ ist und halten es fest. Da die Folge $\{\xi_i^{(n)}\}$ konvergent ist, gibt

es eine Zahl n_0, so daß bei $i, j \geqq n_0$

$$|\xi_i^{(n)} - \xi_j^{(n)}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

wird. Dann aber ist bei $i, j \geqq n_0$

$$|\xi_i^{(0)} - \xi_j^{(0)}| < \varepsilon\,,$$

d. h., $\{\xi_i^{(0)}\}$ ist eine konvergente Folge. Folglich ist $x_0 \in c$, und damit ist die Behauptung bewiesen.

Die Vollständigkeit von $\tilde{M}[0, 1]$. $\{x_n\}$ sei eine in sich konvergente Folge von Elementen des Raumes $\tilde{M}[0, 1]$. Dann gilt für jedes $\varepsilon > 0$, falls $n, m \geqq n_0(\varepsilon)$,

$$\inf_{\substack{E \subseteq [0, 1] \\ \text{Maß} E = 0}} \sup_{t \in [0, 1] \setminus E} |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon\,.$$

Folglich gibt es eine Menge E_{n_0} vom Maße Null, so daß

$$\sup_{t \in [0, 1] \setminus E_{n_0}} |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon \qquad \text{für} \qquad m, n > n_0$$

ist, d. h., fast überall auf $[0, 1]$ ist $|x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon$ für $n, m \geqq n_0$. Daraus erhält man leicht (siehe S. 13), daß eine Folge $\{x_n(t)\}$ von beschränkten meßbaren Funktionen gleichmäßig fast überall auf $[0, 1]$ in sich konvergiert. Daher existiert eine beschränkte meßbare Funktion $x(t)$, die fast überall auf $[0, 1]$ Grenzwert dieser Folge ist. Dann sieht man aber leicht, daß $\varrho(x_n, x) \to 0$ konvergiert, und damit ist die Vollständigkeit des Raumes $\tilde{M}[0, 1]$ bewiesen.

Die Vollständigkeit der Räume $L_p[0, 1]$ und l_p. In den Lehrbüchern über Funktionen einer reellen Veränderlichen (s. [24]) wird bewiesen, daß $L_2[0, 1]$ und l_2 vollständige Räume sind. Mit analogen Methoden kann die Vollständigkeit von $L_p[0, 1]$ und l_p bewiesen werden. Wir werden hier diesen Beweis nicht führen, sondern erhalten die Bestätigung der Vollständigkeit von $L_p[0, 1]$ und l_p als Folgerung aus einem allgemeinen Satz der Funktionalanalysis (s. unten S. 136).

§ 5. Vervollständigung metrischer Räume

Es ist bekannt, daß die Vollständigkeit der Zahlengeraden in der Analysis eine große Rolle spielt. Nur auf der Gesamtheit der reellen Zahlen ist es möglich, die Analysis streng aufzubauen. Eine ähnliche Rolle spielt die Vollständigkeit metrischer Räume in der Funktionalanalysis. Daher untersuchen wir jetzt die Vervollständigung von Räumen, die nicht vollständig sind. Analog wie man von der Menge der rationalen Zahlen zu der Menge aller reellen Zahlen gelangt, geht man hier vor. Zunächst führen wir einen Begriff ein, der uns auch im Zusammenhang mit anderen Betrachtungen nützlich sein wird.

Es seien zwei metrische Räume X und Y gegeben. Der Abstand zwischen zwei Elementen x_1 und x_2 des Raumes X sei $\varrho_X(x_1, x_2)$, und der Abstand zwischen zwei Elementen y_1 und y_2 des Raumes Y sei $\varrho_Y(y_1, y_2)$.

Wenn sich zwischen den Elementen der Räume X und Y eine eineindeutige Zuordnung herstellen läßt derart, daß der Abstand zwischen den Elementen

des einen Raumes gleich dem Abstand zwischen den entsprechenden Elementen des anderen Raumes ist, so heißen X und Y *isometrisch.*

Für Fragen, die nur mit dem Abstand der Elemente zusammenhängen, z. B. Konvergenz, Vollständigkeit usw., sind isometrische Räume als gleich anzusehen.

Neben den isometrischen Räumen X und Y kann man auch isometrische Mengen betrachten, die in diesen Räumen enthalten sind. Bei Fragen, die allein mit der Metrik zusammenhängen, kann man jede Menge in einem metrischen Raum durch eine andere zu ihr isometrische ersetzen.

Ist X_0 ein nicht vollständiger metrischer Raum, so gibt es in diesem Raum mindestens eine in sich konvergente Folge, die keinen Grenzwert in X_0 besitzt.

Zu jedem nicht vollständigen metrischen Raum X_0 gibt es bis auf Isometrie genau einen vollständigen metrischen Raum X mit einem Unterraum X', der in X überall dicht liegt und isometrisch zu X_0 ist.

X heißt *Vervollständigung des Raumes* X_0.

Beweis. Wir betrachten alle Folgen

$$\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}, \ldots,$$

die aus Elementen des Raumes X_0 bestehen und in sich konvergieren. Zwei beliebige Folgen $\{x_n\}$ und $\{x'_n\}$, die in sich konvergieren, und für die $\varrho(x_n, x'_n) \to 0$ für $n \to \infty$ gilt, geben wir in dieselbe Klasse $\tilde{x}$. Diese Klassen betrachten wir als Elemente eines neuen Raumes X. Es seien $\tilde{x}$ und $\tilde{y}$ zwei Elemente aus X. Aus den Klassen $\tilde{x}$ und $\tilde{y}$ wählen wir je eine Folge $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$.

Wir zeigen, daß $\lim\limits_n \varrho(x_n, y_n)$ existiert. Es gilt

$$\varrho(x_n, y_n) \leqq \varrho(x_n, x_m) + \varrho(x_m, y_m) + \varrho(y_m, y_n)\,.$$

Daraus folgt

$$\varrho(x_n, y_n) - \varrho(x_m, y_m) \leqq \varrho(x_n, x_m) + \varrho(y_m, y_n)\,. \tag{1}$$

Wenn wir die Indizes n und m vertauschen, finden wir

$$\varrho(x_m, y_m) - \varrho(x_n, y_n) \leqq \varrho(x_n, x_m) + \varrho(y_n, y_m)\,. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt

$$|\varrho(x_m, y_m) - \varrho(x_n, y_n)| \leqq \varrho(x_n, x_m) + \varrho(y_n, y_m)\,.$$

Der rechte Teil dieser Ungleichung konvergiert gegen Null für $n, m \to \infty$. Daher ist die Zahlenfolge $\{\varrho(x_n, y_n)\}$ nach CAUCHY konvergent, d. h., es existiert der Grenzwert $\lim\limits_n \varrho(x_n, y_n)$.

Wir definieren jetzt in X durch

$$\varrho(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_n \varrho(x_n, y_n)$$

einen Abstand und zeigen, daß die so definierte Entfernung von der Wahl der Folgen $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ aus den entsprechenden Klassen unabhängig ist.

Es seien $\{x'_n\}$ und $\{y'_n\}$ zwei andere Folgen aus den Klassen $\tilde{x}$ und $\tilde{y}$. Dann ist

$$\varrho(x_n, y_n) \leqq \varrho(x_n, x'_n) + \varrho(x'_n, y'_n) + \varrho(y'_n, y_n)\,.$$

Daraus folgt

$$\lim_n \varrho(x_n, y_n) \leqq \lim_n \varrho(x_n', y_n') .$$

Analog finden wir, daß auch umgekehrt gilt

$$\lim_n \varrho(x_n', y_n') \leqq \lim_n \varrho(x_n, y_n) .$$

Folglich ist

$$\lim_n \varrho(x_n, y_n) = \lim_n \varrho(x_n', y_n') .$$

Es gelten die metrischen Axiome:

1. Da $\varrho(x_n, y_n) \geqq 0$ ist, so ist auch $\varrho(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_n \varrho(x_n, y_n) \geqq 0$. Ferner besagt die Gleichung $\varrho(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_n \varrho(x_n, y_n) = 0$ nach Voraussetzung, daß die Folgen $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ einer Klasse angehören.

Da $\{x_n\}$ eine beliebige Folge der Klasse $\tilde{x}$ und $\{y_n\}$ eine beliebige Folge von $\tilde{y}$ war, so ist $\tilde{x} = \tilde{y}$.

2. $\varrho(\tilde{x}, \tilde{y}) = \varrho(\tilde{y}, \tilde{x})$ sieht man unmittelbar.

3. Ist $\{x_n\} \in \tilde{x}$, $\{y_n\} \in \tilde{y}$, $\{z_n\} \in \tilde{z}$, so ist offenbar

$$\varrho(\tilde{x}, \tilde{z}) = \lim_n \varrho(x_n, z_n) \leqq \lim_n \varrho(x_n, y_n) + \lim_n \varrho(y_n, z_n) = \varrho(\tilde{x}, \tilde{y}) + \varrho(\tilde{y}, \tilde{z}) .$$

Wir zeigen, daß X ein vollständiger Raum ist. Hierzu wählen wir eine beliebige in sich konvergente Folge $\{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n, \ldots\}$ von Elementen des Raumes X, d. h., es strebe

$$\varrho(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) \to 0 \qquad \text{für} \qquad n, m \to \infty .$$

Aus jeder Klasse $\tilde{x}_n$ greifen wir eine beliebige Folge

$$\{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)}, \ldots\}$$

heraus.

Da sie in sich konvergiert, so kann man ein k_n finden, so daß

$$\varrho(x_m^{(n)}, x_{k_n}^{(n)}) \leqq \frac{1}{n}$$

ist für $m > k_n$.

Wir betrachten jetzt die Folge

$$\{x_{k_1}^{(1)}, x_{k_2}^{(2)}, \ldots, x_{k_n}^{(n)}, \ldots\}$$

und zeigen, daß sie in sich konvergiert.

Wir finden

$$\varrho(x_{k_n}^{(n)}, x_{k_m}^{(m)}) \leqq \varrho(x_{k_n}^{(n)}, x_p^{(n)}) + \varrho(x_p^{(n)}, x_p^{(m)}) + \varrho(x_p^{(m)}, x_{k_m}^{(m)}) . \tag{3}$$

Ein beliebiges $\varepsilon > 0$ sei gegeben. Wegen

$$\varrho(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) \to 0 \qquad \text{bei} \qquad n, m \to \infty$$

existiert ein n_0 derart, daß für $n, m \geqq n_0$ gilt

$$\varrho(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) = \lim_p \varrho(x_p^{(n)}, x_p^{(m)}) < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Deshalb wird bei $n, m \geqq n_0$ und genügend großem p

$$\varrho(x_p^{(n)}, x_p^{(m)}) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

Dabei können wir n_0 so ansetzen, daß $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{4}$ wird. Während wir n und m unter der Bedingung $n, m \geqq n_0$ festhalten, wählen wir p so groß, daß $p > k_m$ und $p > k_n$ ist. Dann ist auf Grund der Auswahl der Zahlen k_n und k_m

$$\varrho(x_p^{(n)}, x_{k_n}^{(n)}) < \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \varrho(x_p^{(m)}, x_{k_m}^{(m)}) < \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{5}$$

Aus (3), (4) und (5) folgt bei $n, m \geqq n_0$

$$\varrho(x_{k_n}^{(n)}, x_{k_m}^{(m)}) < \varepsilon,$$

d. h., die Folge $\{x_{k_n}^{(n)}\}$ konvergiert in sich. Wir bezeichnen die die Folge $\{x_{k_n}^{(n)}\}$ enthaltende Klasse mit $\tilde{x}$ und leiten die Beziehung $\tilde{x}_n \to \tilde{x}$ her. Offenbar ist

$$\varrho(\tilde{x}_n, \tilde{x}) = \lim_p \varrho(x_p^{(n)}, x_{k_p}^{(p)}) \leqq \lim_p \varrho(x_p^{(n)}, x_{k_n}^{(n)}) + \lim_p \varrho(x_{k_n}^{(n)}, x_{k_p}^{(p)})$$
$$< \frac{1}{n} + \lim_p \varrho(x_{k_n}^{(n)}, x_{k_p}^{(p)}). \tag{6}$$

Da die Folge $\{x_{k_n}^{(n)}\}$ in sich konvergiert, existiert zu einem gegebenen $\varepsilon > 0$ ein n_0 mit

$$\varrho(x_{k_n}^{(n)}, x_{k_p}^{(p)}) < \frac{\varepsilon}{2},$$

sofern $n, p \geqq n_0$ ist. Daraus folgt bei $n \geqq n_0$

$$\lim_p \varrho(x_{k_n}^{(n)}, x_{k_p}^{(p)}) \leqq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{7}$$

Dabei kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$ gesetzt werden. Aus (6) und (7) folgt bei $n \geqq n_0$

$$\varrho(\tilde{x}_n, \tilde{x}) < \varepsilon,$$

d. h., die Folge $\{\tilde{x}_n\}$ konvergiert gegen das Element $\tilde{x}$. Die Vollständigkeit des Raumes X ist damit bewiesen.

Wir nennen *Folgen* der Form $\{x, x, \ldots, x, \ldots\}$ *stationär*. Sie konvergieren offenbar in sich, und folglich ist jede in einer gewissen Klasse enthalten, und ist somit einem Element aus X zugeordnet. Offenbar kann ein und derselben Klasse höchstens eine stationäre Folge angehören. Es sei jetzt

$$\{x, x, \ldots, x, \ldots\} \in \tilde{x},$$
$$\{y, y, \ldots, y, \ldots\} \in \tilde{y}.$$

Dann ist $\varrho(x, y) = \varrho(\tilde{x}, \tilde{y})$.

Wir zeigen, daß X_0 isometrisch ist zu einem gewissen Unterraum X' von X, der überall in X dicht liegt. X' enthalte alle Klassen $\tilde{x}$, unter deren Elementen es stationäre Folgen $\{x, x, \ldots, x, \ldots\}$ gibt. Zwischen den Klassen $\tilde{x} \in X'$ und

den Elementen x der stationären Folge besteht eine eineindeutige Zuordnung. Dabei gilt, falls $\{x\} \in \tilde{x}$ und $\{y\} \in \tilde{y}$ ist, $\varrho(\tilde{x}, \tilde{y}) = \varrho(x, y)$. Daher ist die zwischen den Elementen von X_0 und den entsprechenden Elementen von X' aufgestellte eineindeutige Beziehung eine Isometrie.

Wie man leicht sieht, ist X' überall dicht in X, d. h., zu jedem $\varepsilon > 0$ und zu jedem Element $\tilde{x} \in X$ gibt es ein Element $\tilde{x}_\varepsilon \in X'$, so daß $\varrho(\tilde{x}, \tilde{x}_\varepsilon) \leqq \varepsilon$ ist. Es sei $\tilde{x}$ eine Klasse und die in sich konvergente Folge $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ aus $\tilde{x}$. Wir wählen ein n, so daß $\varrho(x_m, x_n\} < \varepsilon$ ist für $m > n$. Dann bilden wir die stationäre Folge $\{x_n, x_n, \ldots, x_n, \ldots\}$ und bezeichnen mit $\tilde{x}_\varepsilon$ diejenige Klasse, die diese Folge enthält. Offensichtlich ist $\tilde{x}_\varepsilon \in X'$. Ferner ist $\varrho(\tilde{x}, \tilde{x}_\varepsilon) = \lim\limits_m \varrho(x_m, x_n) \leqq \varepsilon$, und somit ist alles bewiesen.

Es bleibt zu zeigen, daß die Vervollständigung eines Raumes X_0 bis auf Isometrie eindeutig bestimmt ist. D. h., es gibt bis auf Isometrie höchstens einen vollständigen Raum X, der eine zu X_0 isometrische, überall dichte Untermenge enthält. Denn ist Y ein anderer vollständiger Raum, in dem X_0 überall dicht liegt, dann ist jeder Punkt $\tilde{y} \in Y$ festgelegt durch eine gewisse Folge $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ mit $x_i \in X_0$. Da dies eine Fundamentalfolge ist, so definiert sie andererseits ein Element $\tilde{x} \in X$. Dieses Element $\tilde{x}$ ordnen wir dem Element $\tilde{y}$ zu. Es sei umgekehrt ein Element $\tilde{\xi} \in X$ gegeben und $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots\}$ eine Fundamentalfolge aus der Klasse $\tilde{\xi}$. Da X_0 in dem vollständigen Raum Y liegt, definiert diese Fundamentalfolge ein bestimmtes Element $\tilde{\eta} \in Y$. Dieses Element ordnen wir $\tilde{\xi}$ zu. So erhalten wir eine Zuordnung zwischen den Elementen der Räume X und Y, die offenbar eineindeutig ist. Da überdies

$$\varrho(\tilde{x}, \tilde{\xi}) = \lim_n \varrho(x_n, \xi_n) = \varrho(\tilde{y}, \tilde{\eta}) \text{ [1]}$$

gilt, ist diese Zuordnung isometrisch, und damit ist alles bewiesen.

Beispiele. 1. Wir betrachten den Raum l'_p, der aus allen Folgen $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k_1}, 0, 0, 0, \ldots\}$ besteht, wobei k_1 eine natürliche Zahl ist und die ξ_i beliebig reell sind. Ist

$$x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k_1}, 0, \ldots\}, \qquad y = \{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{k_2}, 0, \ldots\}$$

und ist $k_2 \geqq k_1$, so setzen wir

$$\varrho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{k_1} |\xi_i - \eta_i|^p + \sum_{i=k_1+1}^{k_2} |\eta_i|^p\right)^{1/p}.$$

l'_p wird dadurch zu einem Unterraum von l_p, und zwar zu einem unvollständigen, da beispielsweise die Folge

$$x_1 = \{1, 0, \ldots\}, \quad x_2 = \left\{1, \frac{1}{2}, 0, \ldots\right\}, \ldots, \quad x_n = \left\{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2^n}, 0, \ldots\right\}, \ldots$$

zwar in sich konvergiert (d. h., es geht

$$\varrho(x_n, x_m) = \left(\sum_{i=m}^{n=1} \frac{1}{2^{i\,p}}\right)^{1/p} \to 0 \quad \text{für } m, n \to \infty, m > n)$$

jedoch in l'_p keinen Grenzwert besitzt.

---

[1]) Man bestätigt leicht: Wenn in einem metrischen Raum $x_n \to x$ und $y_n \to y$ konvergiert, so konvergiert auch $\varrho(x_n, y_n) \to \varrho(x, y)$.

Wir bezeichnen die Vervollständigung des Raums l'_p mit X. Da l'_p in den vollständigen Raum l_p offenbar überall dicht liegt, ist X zu l_p isometrisch. Die Vervollständigung des Raumes l'_p liefert also einen zu l_p isometrischen Raum.

2. $C_0[0, 1]$ sei der Raum aller auf dem Intervall $[0, 1]$ definierten Polynome. In diesem Raum sei die Tschebyschew-Metrik

$$\varrho(P, Q) = \max_{0 \leqq t \leqq 1} |P(t) - Q(t)|$$

eingeführt. $C_0[0, 1]$ ist nicht vollständig. Da $C_0[0, 1]$ in dem vollständigen Raum $C[0, 1]$ überall dicht liegt, führt die Vervollständigung von $C_0[0, 1]$ zu einen zu $C[0, 1]$ isometrischen Raum.

3. $L'_p[0, 1]$ sei die Menge aller auf dem Intervall $[0, 1]$ definierten stetigen Funktionen mit der Metrik

$$\varrho(x, y) = \left(\int_0^1 |x(t) - y(t)|^p \, dt\right)^{1/p}.$$

$L'_p[0, 1]$ ist ein nicht vollständiger Raum. Denn eine Folge stetiger Funktionen, die von p-ter Potenz im Mittel gegen eine unstetige Funktion konvergiert, ist eine Fundamentalfolge in $L'_p[0, 1]$, besitzt aber in diesem Raum kein Grenzelement. Wenn wir $L'_p[0, 1]$ vervollständigen, so erhalten wir einen zu $L_p[0, 1]$ isometrischen Raum.

§ 6. Sätze über vollständige Räume

Es gilt der folgende Satz, der ein Analogon zum Cantorschen Lemma über sich zusammenziehende Intervallsysteme darstellt:

Satz 1. *In einem vollständigen metrischen Raum X sei eine Folge abgeschlossener Kugeln gegeben, die alle ineinander gelegen sind (d. h., jede folgende Kugel ist in allen vorangehenden Kugeln enthalten). Konvergieren die Radien dieser Kugeln gegen Null, dann existiert genau ein Punkt, der zu allen Kugeln gehört.*

Die betrachteten Kugeln seien

$$\overline{S}(a_1, \varepsilon_1),\ \overline{S}(a_2, \varepsilon_2), \ldots, \overline{S}(a_n, \varepsilon_n), \ldots.$$

Nach Voraussetzung ist $\overline{S}_1 \supseteq \overline{S}_2 \supseteq \cdots \supseteq \overline{S}_n \supseteq \ldots$.
Wir betrachten die Folge der Mittelpunkte dieser Kugeln

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots.$$

Da $\overline{S}_{n+p} \subseteq \overline{S}_n$, so ist $a_{n+p} \in \overline{S}(a_n, \varepsilon_n)$. Daher wird

$$\varrho(a_{n+p}, a_n) \leqq \varepsilon_n .$$

Folglich konvergiert

$$\varrho(a_{n+p}, a_n) \to 0$$

für $n \to \infty$, d. h., die Folge der Kugelmittelpunkte konvergiert in sich.

Da der Raum X vollständig ist, konvergiert diese Folge gegen einen Grenzwert $a \in X$. Wir greifen eine beliebige Kugel $\overline{S}_k$ (k sei fest) heraus. Dann liegen die Punkte $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+n}, \ldots$ in dieser Kugel. Da die Kugel $\overline{S}_k$ abgeschlossen ist, gehört der Grenzpunkt a der Folge $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+n}, \ldots$ eben-

falls zu $\overline{S}_k$, also gehört

$$a = \lim_n a_n$$

zu allen Kugeln.

Angenommen, es existiere ein Punkt b, der allen Kugeln angehört und von a verschieden ist, so daß

$$\varrho(a, b) = \delta > 0$$

gilt. Da die Punkte a und b aus $\overline{S}_n$ sind, $n = 1, 2, \ldots$, so muß

$$\delta = \varrho(a, b) \leqq \varrho(a, a_n) + \varrho(a_n, b) \leqq 2\,\varepsilon_n$$

sein. Dies ist jedoch nicht möglich, da $\varepsilon_n \to 0$ konvergiert, q. e. d.

Bemerkung. Der bewiesene Satz kann etwas verallgemeinert werden. Den *Durchmesser* einer beschränkten Menge F eines metrischen Raumes nennen wir die Zahl

$$d(F) = \sup_{x, y \in F} \varrho(x, y)\,.$$

Satz 1′. *In einem vollständigen metrischen Raum X sei eine Folge sich sukzessiv enthaltender abgeschlossener Mengen gegeben, deren Durchmesser gegen Null streben. Dann existiert genau ein Punkt, der allen diesen Mengen angehört.*

Der Beweis verläuft im wesentlichen wie der für Satz 1.

Wie bekannt ist, kann die Eigenschaft der Zahlengeraden, die das Cantorsche Lemma begründet, zur Definition der Vollständigkeit der Menge der reellen Zahlen oder der Zahlengeraden herangezogen werden.

Analog charakterisiert der Satz über sich enthaltende Kugeln die Vollständigkeit eines metrischen Raumes.

Satz 2. *Wenn in einem metrischen Raum X eine beliebige Folge einander sukzessiv enthaltender abgeschlossener Kugeln, deren Durchmesser gegen Null streben, einen nicht leeren Durchschnitt besitzt, so ist der Raum X vollständig.*

Man nehme eine Fundamentalfolge $\{x_n\}$ und wähle n_k in der Weise, daß

$$\varrho(x_{n_k+p}, x_{n_k}) < \frac{1}{2^k}$$

für beliebiges $p > 0$ wird. $\overline{S}_k$ sei die abgeschlossene Kugel vom Radius $\frac{1}{2^{k-1}}$ mit dem Mittelpunkt x_{n_k}. Es ist $\overline{S_{k+1}} \subset \overline{S}_k$. Aus $x \in \overline{S_{k+1}}$ folgt nämlich

$$\varrho(x, x_{n_k}) \leqq \varrho(x, x_{n_{k+1}}) + \varrho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) \leqq \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}\,,$$

d. h. $x \in \overline{S}_k$.

Die Radien der Kugeln $\overline{S}_k$ streben gegen Null. Folglich existiert nach Voraussetzung ein Punkt x_0, der in allen Kugeln $\overline{S}_k$ liegt. Wir zeigen: Der Punkt x_0 ist Grenzwert der Folge $\{x_n\}$. Die Teilfolge $\{x_{n_k}\}$ konvergiert gegen x_0, weil $x_{n_k}, x_0 \in S_k$ sind, und folglich strebt

$$\varrho(x_{n_k}, x_0) \leqq \frac{1}{2^{k-1}} \to 0\,.$$

Doch dann konvergiert die ganze Folge $\{x_n\}$ auch gegen x_0, weil

$$\varrho(x_n, x_0) \leqq \varrho(x_n, x_{n_k}) + \varrho(x_{n_k}, x_0)$$

ist und beide Summanden hinreichend klein gemacht werden können, wenn n, n_k genügend groß gewählt werden. Der Satz ist damit bewiesen.

Eine Menge M heißt *von erster Kategorie*, wenn sie als Vereinigungsmenge höchstens abzählbar vieler, nirgends dichter Mengen darstellbar ist. Eine Menge, die nicht von erster Kategorie ist, heißt *von zweiter Kategorie*. Beispielsweise ist die Menge der rationalen Punkte einer Geraden von erster Kategorie, die Menge aller irrationalen Punkte von zweiter Kategorie.

Satz 3. *Ein vollständiger Raum ist eine Menge von zweiter Kategorie.*

Wir nehmen das Gegenteil an: Der vollständige Raum X sei darstellbar in der Form $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, wobei M_n, $n = 1, 2, \ldots$, nirgends dichte Mengen sind. Wir wählen eine Kugel $\bar{S}(a, 1)$ mit dem Mittelpunkt in einem beliebigen Punkt a und dem Radius 1. Da M_1 nirgends dicht ist, so gibt es im Innern von $\bar{S}(a, 1)$ eine Kugel $\bar{S}(a_1, r_1)$ mit einem Radius $r_1 < \frac{1}{2}$, die keinen Punkt der Menge M_1 enthält. Da die Menge M_2 nirgends dicht ist, gibt es im Innern von $\bar{S}(a_1, r_1)$ eine Kugel $\bar{S}(a_2, r_2)$ mit einem Radius $r_1 < \frac{1}{2^2}$, die keine Punkte der Menge M_2 enthält usw.

Wir erhalten eine Folge abgeschlossener Kugeln

$$\bar{S}(a_1, r_1),\ \bar{S}(a_2, r_2), \ldots,\ \bar{S}(a_n, r_n), \ldots,$$

von denen jede in der vorangehenden gelegen ist und deren Radien gegen Null konvergieren. Dabei enthält $\bar{S}(a_n, r_n)$ keine Punkte der Mengen $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Nach Satz 1 existiert ein Punkt $a_0 \in X$, der allen Kugeln angehört. Andererseits gehört dieser Punkt a_0 zu keiner der Mengen M_n, daher ist

$$a_0 \notin X = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n .$$

Wir erhalten also einen Widerspruch, und damit ist der Satz bewiesen.

§ 7. Das Prinzip der kontrahierenden Abbildung

Die Iterationsmethode ist hinreichend bekannt. Man verwendet sie oft bei Existenzbeweisen für Lösungen von algebraischen, Differential- und Integralgleichungen. Mit ihrer Hilfe kann man auch Näherungslösungen finden. Diese Iterationsmethode gehört in den allgemeinen Rahmen der Funktionalanalysis und führt zum Prinzip der kontrahierenden Abbildung, das von dem polnischen Mathematiker S. Banach formuliert wurde.

Satz 1. *In einem vollständigen metrischen Raum X sei ein Operator A gegeben, der die Elemente des Raumes X in Elemente desselben Raumes überführt.*

Es sei ferner für beliebige x und y aus X

$$\varrho(A(x), A(y)) \leqq \alpha\, \varrho(x, y)\,, \tag{1}$$

wobei $\alpha < 1$ und von x und y unabhängig ist. Dann existiert genau ein Punkt x_0, so daß $A(x_0) = x_0$ ist.

Der Punkt x_0 heißt *Fixpunkt* des Operators A.

Wir greifen ein beliebiges, aber festes Element $x \in X$ heraus, setzen

$$x_1 = A(x)\,, \qquad x_2 = A(x_1)\,, \qquad x_3 = A(x_2), \ldots, x_n = A(x_{n-1}), \ldots$$

und zeigen, daß die Folge $\{x_n\}$ in sich konvergiert. Hierzu bemerken wir, daß

$$\varrho(x_1, x_2) = \varrho(A(x), A(x_1)) \leqq \alpha\, \varrho(x, x_1) = \alpha\, \varrho(x, A(x))\,,$$
$$\varrho(x_2, x_3) = \varrho(A(x_1), A(x_2)) \leqq \alpha\, \varrho(x_1, x_2) \leqq \alpha^2\, \varrho(x, A(x))\,,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varrho(x_n, x_{n+1}) \leqq \alpha^n\, \varrho(x, A(x))\,,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ist. Ferner gilt

$$\begin{aligned}\varrho(x_n, x_{n+p}) &\leqq \xi(x_n, x_{n+1}) + \cdots + \varrho(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leqq (\alpha^n + \alpha^{n+1} + \cdots + \alpha^{n+p-1})\, \varrho(x, A(x)) \\ &= \frac{\alpha^n - \alpha^{n+p}}{1-\alpha}\, \varrho(x, A(x))\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Da nach Voraussetzung $\alpha < 1$ ist, so erhält man $\varrho(x_n, x_{n+p}) < \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}\, \varrho(x, A(x))$. Daraus wiederum folgt, daß $\varrho(x_n, x_{n+p}) \to 0$ konvergiert für $n \to \infty$. Also konvergiert die Folge $\{x_n\}$ in sich. Da der Raum X vollständig ist, existiert ein Element $x_0 \in X$, das Grenzwert dieser Folge ist:

$$x_0 = \lim_n x_n\,.$$

Wir zeigen, daß $A(x_0) = x_0$ ist. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned}\varrho(x_0, A(x_0)) &\leqq \varrho(x_0, x_n) + \varrho(x_n, A(x_0)) = \varrho(x_0, x_n) + \varrho(A(x_{n-1}), A(x_0)) \\ &\leqq \varrho(x_0, x_n) + \alpha\, \varrho(x_0, x_{n-1})\,.\end{aligned}$$

Bei beliebig vorgegebenem ε und hinreichend großem n ist aber

$$\varrho(x_0, x_{n-1}) < \frac{\varepsilon}{2\,\alpha} \quad \text{und} \quad \varrho(x_0, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Folglich wird

$$\varrho(x_0, A(x_0)) < \varepsilon\,.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, gilt diese Ungleichung genau dann, wenn $\varrho(x_0, A(x_0)) = 0$, d. h. $A(x_0) = x_0$ ist, was zu zeigen war.

Wir nehmen an, es gäbe zwei Elemente $x_0 \in X$, $y_0 \in X$, für die

$$A(x_0) = x_0 \qquad \text{und} \qquad A(y_0) = y_0$$

gilt. Dann ist

$$\varrho(x_0, y_0) = \varrho(A(x_0), A(y_0)) \leqq \alpha\, \varrho(x_0, y_0) .$$

Wenn wir $\varrho(x_0, y_0) > 0$ annehmen, so folgt aus dem Vorangehenden, daß $1 \leqq \alpha$ ist; dies ist jedoch ein Widerspruch zur Voraussetzung.

Wenn wir in Formel (2) zur Grenze $p \to \infty$ übergehen, so erhalten wir eine Abschätzung für den Fehler bei der n-ten Näherung:

$$\varrho(x_n, x_0) \leqq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha}\, \varrho(x, A(x)) . \tag{3}$$

Bemerkung 1. Man kann eine Näherungsfolge $\{x_n\}$, die gegen den Fixpunkt x_0 konvergiert, konstruieren, indem man von einem beliebigen Element $x \in X$ ausgeht. Von der Wahl des Elementes x hängt nur die „Schnelligkeit" ab, mit der die Folge $\{x_n\}$ gegen ihren Grenzwert konvergiert.

Bemerkung 2. Manchmal liegt eine Abbildung A vor, für die die Ungleichung (1) nicht überall im Raum erfüllt ist, sondern nur in einer abgeschlossenen kugelförmigen Umgebung $\overline{S}(\bar{x}, r)$ eines Punktes $\bar{x}$. Dann kann das Prinzip der kontrahierenden Abbildungen angewandt werden, sofern der Operator A zusätzlich diese Kugel in sich abbildet und deshalb die aufeinanderfolgenden Näherungen nicht aus der betrachteten Umgebung herausführen. Sei z. B. zusätzlich zur Ungleichung (1) die Ungleichung

$$\varrho(\bar{x}, A(\bar{x})) \leqq (1 - \alpha)\, r$$

erfüllt. Wenn $x \in \overline{S}(\bar{x}, r)$ ist, so ist wegen

$$\begin{aligned} \varrho(A(x), \bar{x}) &\leqq \varrho(A(x), A(\bar{x})) + \varrho(A(\bar{x}), \bar{x}) \\ &\leqq \alpha\, \varrho(x, \bar{x}) + \varrho(\bar{x}, A(\bar{x})) \leqq \alpha\, r + (1 - \alpha)\, r = r \end{aligned}$$

auch $A(x) \in \overline{S}(\bar{x}, r)$. Dann kann A als ein im vollständigen metrischen Raum $\overline{S}(\bar{x}, r)$ (s. S. 17) wirkender und darin der Bedingung (1) genügender Operator aufgefaßt werden. Dadurch aber besitzt der Operator A, wie bereits gezeigt, in $\overline{S}(\bar{x}, r)$ einen eindeutigen Fixpunkt.

Wir bringen einige Beispiele zur Anwendung des Prinzips der kontrahierenden Abbildungen.

Lösung linearer algebraischer Gleichungssysteme durch das Iterationsverfahren. Wir betrachten einen arithmetischen n-dimensionalen Raum. Ist $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ und $y = \{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n\}$, so setzen wir $\varrho(x, y) = \max\limits_i |\xi_i - \eta_i|$. Man kann leicht zeigen, daß der so definierte metrische *Raum* m_n vollständig ist. In diesem Raum betrachten wir den Operator $y = A(x)$, der

durch die Gleichungen

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\xi_j + b_i\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n\,,$$

bestimmt ist. Es gilt

$$\varrho(y_1, y_2) = \varrho(A(x_1), A(x_2)) = \max_i |\eta_i^{(1)} - \eta_i^{(2)}|$$

$$= \max_i \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,(\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)})\right| \leqq \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\, |\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)}|$$

$$\leqq \max_j |\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)}| \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \varrho(x_1, x_2) \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\,.$$

Setzen wir jetzt

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| < 1 \tag{4}$$

für alle i voraus, so überzeugen wir uns von der Anwendbarkeit des Prinzips der kontrahierenden Abbildung, und folglich besitzt der Operator A genau einen Fixpunkt. Auf diese Weise gelangen wir zu dem Satz:

Satz 2. *Ist die Matrix (a_{ij}) so beschaffen, daß $\sum |a_{ij}| < 1$ für alle i gilt, so besitzt das Gleichungssystem*

$$\xi_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\xi_j = b_i\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n\,,$$

eine eindeutige Lösung $x_0 = \{\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \ldots, \xi_n^{(0)}\}$. Diese Lösung kann, von einem willkürlichen Vektor $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ ausgehend, iterativ gewonnen werden.

Die Voraussetzung (4) stellt eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz der Iterationsmethode beim betrachteten System dar. Wird im n-dimensionalen Raum eine andere Metrik eingeführt, so erhalten wir andere Konvergenzbedingungen. Ist beispielsweise

$$\varrho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \eta_i)^2}\,,$$

so gilt bei dieser Metrik

$$\varrho(y_1, y_2) = \varrho(A(x_1), A(x_2)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,(\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)})\right\}^2}$$

$$\leqq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \sum_{j=1}^{n} (\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)})^2\right\}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}\, \varrho(x_1, x_2)\,.$$

Deshalb wird hier die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 < 1$$

zur Konvergenzbedingung für die sukzessive Approximation.

Existenz und Eindeutigkeit der Lösung einer Integralgleichung. Die reelle Funktion $K(s, t)$ sei in $a \leqq s \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$ definiert und meßbar. Ferner gelte

$$\int_a^b \int_a^b K^2(s, t)\, ds\, dt < \infty , \tag{5}$$

und es sei $f(s) \in L_2[a, b]$. Dann besitzt die Integralgleichung

$$x(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt$$

für jeden hinreichend kleinen Wert des Parameters λ genau eine Lösung $x(s) \in L_2[a, b]$.

Wir betrachten den Operator

$$A(x) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt$$

und zeigen, daß er jede Funktion $x(t) \in L_2[a, b]$ in eine Funktion überführt, die ebenfalls diesem Raum angehört. Da $f(s) \in L_2[a, b]$ ist, so genügt es zu zeigen, daß der Operator

$$A_0(x) = \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt$$

jede Funktion $x(t) \in L_2[a, b]$ in eine Funktion aus $L_2[a, b]$ transformiert.

Aus der Bedingung (5) und dem Satz von Fubini (siehe z. B. [24]) folgt, daß $K^2(s, t)$ für fast alle s aus $[a, b]$ bezüglich t über $[a, b]$ integrabel ist. Daher existiert für fast alle s aus $[a, b]$ das Integral

$$\int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt = y(s) .$$

Dann gilt nach der Schwarzschen Ungleichung

$$y^2(s) = \left(\int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt \right)^2 \leqq \int_a^b K^2(s, t)\, dt \int_a^b x^2(t)\, dt .$$

Da

$$\int_a^b x^2(t)\, dt$$

eine Konstante und

$$\int_a^b K^2(s, t)\, dt$$

auf Grund von (5) und des Satzes von Fubini nach Voraussetzung eine in $[a, b]$ nach s integrierbare Funktion ist, ist $y^2(s)$ ebenfalls in $[a, b]$ nach s integrabel. Dabei gilt

$$\int_a^b y^2(s)\, ds \leqq \int_a^b \int_a^b K^2(s, t)\, ds\, dt \int_a^b x^2(t)\, dt .$$

Wir schätzen jetzt $\varrho(A(x), A(z))$ ab:

$$\varrho(A(x), A(z)) = \left(\int_a^b \left[\lambda \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt - \lambda \int_a^b K(s, t)\, z(t)\, dt\right]^2 ds\right)^{1/2}$$

$$= |\lambda| \left(\int_a^b \left[\int_a^b K(s, t)\, [x(t) - z(t)]\, dt\right]^2 ds\right)^{1/2}$$

$$\leqq |\lambda| \left(\int_a^b \int_a^b K^2(s, t)\, ds\, dt\right)^{1/2} \left(\int_a^b [x(t) - z(t)]^2\, dt\right)^{1/2}$$

$$= |\lambda| \left(\int_a^b \int_a^b K^2(s, t)\, dt\, ds\right)^{1/2} \varrho(x, z)\,.$$

Ist

$$|\lambda| < \left(\int_a^b \int_a^b K^2(s, t)\, ds\, dt\right)^{-1/2}, \tag{6}$$

so können wir das Prinzip der kontrahierenden Abbildung anwenden. Somit sind Existenz und Eindeutigkeit der Lösung der betrachteten Integralgleichung für solche Werte λ bewiesen, die der Ungleichung (6) genügen.

Anwendung auf partielle Differentialgleichungen. Als drittes Beispiel betrachten wir die CAUCHYsche Aufgabe für eine quasilineare hyperbolische Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen.

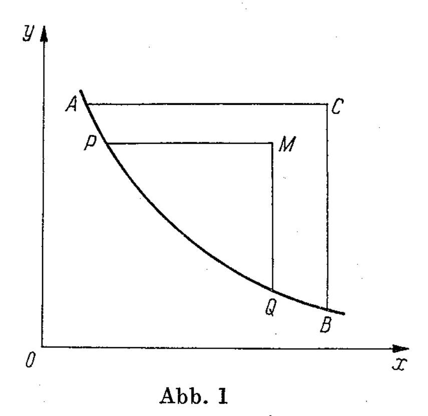


Abb. 1

In der x, y-Ebene (Abb. 1) sei eine glatte Kurve AB gegeben, die keine parallel zur x- oder y-Achse verlaufende Gerade in mehr als einem Punkt schneidet. Gesucht ist eine Funktion $u(x, y)$, die innerhalb des krummlinigen Dreiecks ABC der Gleichung

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$$

so genügt, daß u, $u_x \equiv p$, $u_y \equiv q$ auf AB eine gegebene stetige Werteverteilung annehmen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können die Werte alle

genau Null sein (s. [12], Bd. II, Kap. V, § 5). Es ist bekannt, daß das Lösen dieser CAUCHYschen Aufgabe auf eine nichtlineare Integralgleichung führt:

$$u(x, y) = \iint_{MPQ} f(\xi, \eta, u(\xi, \eta), u_x(\xi, \eta), u_y(\xi, \eta))\, d\xi\, d\eta\,.$$

Wir betrachten den Raum X, dessen Elemente die in dem krummlinigen Dreieck $\overline{ABC}$ definierten, dort stetigen Funktionen $u(x, y)$ mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung sind. Den Abstand geben wir durch die Formel

$$\varrho(u, v) = \max_{\overline{ABC}} |u(x, y) - v(x, y)| + \max_{\overline{ABC}} |u_x(x, y) - v_x(x, y)| + \max_{\overline{ABC}} |u_y(x, y) - v_y(x, y)|$$

vor. Wie sich leicht nachprüfen läßt, wird durch diese Abstandsdefinition X zu einem vollständigen metrischen Raum. Seine Konvergenz induziert die in $\overline{ABC}$ gleichmäßige Konvergenz einer Folge von Funktionen sowie der Folgen ihrer Ableitungen gegen eine Grenzfunktion bzw. deren Ableitungen.

Wir setzen folgendes voraus: Im Raum der unabhängigen Veränderlichen x, y, u, p, q sei unter der Bedingung, daß der Punkt $M(x, y)$ nicht außerhalb $\overline{ABC}$ liegt und die Veränderlichen u, p, q der Beschränkung $|u| \leqq a$; $|p| \leqq a$, $|q| \leqq a$ mit konstantem a unterworfen sind, die Funktion $f(x, y, u, p, q)$ auf der Gesamtheit der Veränderlichen stetig. Darüberhinaus gelte bezüglich der Veränderlichen u, p, q eine LIPSCHITZ-Bedingung der Form

$$|f(x, y, u, p, q) - f(x, y, \tilde{u}, \tilde{p}, \tilde{q})| \leqq L \{|u - \tilde{u}| + |p - \tilde{p}| + |q - \tilde{q}|\}\,,$$

L ist eine Konstante.

Daraus folgt insbesondere die Beschränktheit von $f(x, y, u, p, q)$ im betrachteten Gebiet.

Wir führen im Raum X den Operator

$$v(x, y) = U(u) = \iint_{MPQ} f(\xi, \eta, u, u_x, u_y)\, d\xi\, d\eta$$

ein. Aus

$$v_x(x, y) = \int_{QM} f(x, \eta, u, u_x, u_y)\, d\eta\,,$$

$$v_y(x, y) = \int_{PM} f(\xi, y, u, u_x, u_y)\, d\xi$$

erhalten wir

$$|v(x, y)| \leqq K\, d^2\,, \quad |v_x(x, y)| \leqq K\, d\,, \quad |v_y(x, y)| \leqq K\, d$$

mit

$$K = \sup |f(x, y, u, p, q)|$$

und

$$M(x, y) \in \overline{ABC}\,, \quad |u| \leqq a\,, \quad |p| \leqq a\,, \quad |q| \leqq a\,.$$

d ist das Maximum der Abstände AC und BC. Unter den Voraussetzungen

$$K\,d^2 \leqq \frac{a}{3} \quad \text{und} \quad K\,d \leqq \frac{a}{3}$$

führt der Operator U die abgeschlossene Kugel $\overline{S}(\theta, a)$ des Raumes X in sich über. $\theta(x, y)$ ist dabei die identisch gleich Null gesetzte Funktion. Weiter ist

$$\max_{\overline{ABC}} |v - \tilde{v}| \leqq \max_{\overline{ABC}} \iint_{MPQ} |f(\xi, \eta, u, u_x, u_y) - f(\xi, \eta, \tilde{u}, \tilde{u}_x, \tilde{u}_y)|\, d\xi\, d\eta$$

$$\leqq \max_{\overline{ABC}} \iint_{MPQ} L\,\{|u - \tilde{u}| + |u_x - \tilde{u}_x| + |u_y - \tilde{u}_y|\}\, d\xi\, d\eta \leqq L\,d^2\,\varrho(u, \tilde{u})$$

und analog

$$\max |v_x - \tilde{v}_x| \leqq L\,d\,\varrho(u, \tilde{u})\,,$$

$$\max |v_y - \tilde{v}_y| \leqq L\,d\,\varrho(u, \tilde{u})\,.$$

Ist nun $L\,d^2 < \frac{1}{3}$ und $L\,d < \frac{1}{3}$, wie es u. a. durch genügend kleines d erreicht wird, so stellt der Operator U eine kontrahierende Abbildung der Kugel $\overline{S}(\theta, a)$ in sich dar. Wir erhalten den Satz:

Satz 3. *Es sei eine glatte Kurve AB gegeben. Sie besitze die Eigenschaft, daß die zu den Koordinatenachsen parallelen Geraden sie in nicht mehr als je einem Punkt schneiden. Ferner gelte die Gleichung*

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)\,, \tag{7}$$

worin die rechts stehende Funktion im Bereich $M(x, y) \in \overline{ABC}$, $|u| \leqq a$, $|u_x| \leqq a$, $|u_y| \leqq a$ stetig auf der Gesamtheit der ersten beiden Veränderlichen ist; für die übrigen drei aber gelte eine Lipschitz-*Bedingung gleichmäßig bezüglich x und y.*

Ist das Dreieck $\overline{ABC}$ hinreichend klein, so existiert in ihm eine Lösung der Gleichung (7), *die auf AB zusammen mit den ersten Ableitungen verschwindet.*

Mit Hilfe des Prinzips der kontrahierenden Abbildungen wurden noch weitere Resultate erzielt, von denen wir einige später anführen. Dieses Prinzip stellt das einfachste einer Reihe von Fixpunktprinzipien dar. Ein anderes, von J. Schauder stammendes Prinzip werden wir beim Studium kompakter Mengen in metrischen Räumen kennenlernen [26].

§ 8. Separable Räume

Ein Raum X heißt *separabel*, wenn in diesem Raum eine abzählbare, überall dichte Menge existiert. Mit anderen Worten, wenn in X eine Folge

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} \tag{1}$$

existiert, so daß es zu jedem $x \in X$ eine Teilfolge $\{x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots\}$ von (1) gibt, die gegen das Element x konvergiert.

Ist X ein metrischer Raum, so kann man die Definition eines separablen Raumes so fassen:

Im Raum X existiert eine Folge (1), so daß es zu jedem $x \in X$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein Element x_{n_0} aus (1) gibt mit $\varrho(x, x_{n_0}) < \varepsilon$.

Die Separabilität des n-dimensionalen euklidischen Raumes E_n. Die Menge E_n^0, die aus allen Punkten des Raumes E_n mit rationalen Koordinaten besteht, ist abzählbar und überall dicht in E_n.

Die Separabilität von $C[0, 1]$. Wir betrachten im Raum $C[0, 1]$ die Menge C_0, bestehend aus allen Polynomen mit rationalen Koeffizienten. C_0 ist abzählbar. Man überzeugt sich leicht davon, daß C_0 überall dicht liegt in $C[0, 1]$. Nehmen wir eine beliebige Funktion $x(t) \in C[0, 1]$, so existiert nach dem Satz von Weierstrass ein Polynom $P(t)$, so daß

$$\max_{0 \leqq t \leqq 1} |x(t) - |P(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist, wobei $\varepsilon > 0$ eine vorgegebene Zahl ist. Andererseits gibt es offenbar ein anderes Polynom $P_0(t)$ mit rationalen Koeffizienten, so daß

$$\max_{0 \leqq t \leqq 1} |P(t) - P_0(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Daraus folgt

$$\varrho(x, P_0) = \max_{0 \leqq t \leqq 1} |x(t) - P_0(t)| < \varepsilon ,$$

was zu zeigen war.

Die Separabilität von l_p. Es sei E_0 die Menge aller Elemente x der Form $\{r_1, r_2, \ldots, r_n, 0, 0, \ldots\}$, wobei r_i rationale Zahlen und n eine beliebige natürliche Zahl ist. E_0 ist abzählbar. Man kann leicht zeigen, daß E_0 überall dicht liegt in l_p. Wir greifen ein Element $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots\}$ aus l_p heraus, und es sei eine beliebige Zahl $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir suchen eine natürliche Zahl n, so daß

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |\xi_k|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}$$

gilt. Jetzt nehmen wir ein Element $x_0 = \{r_1, r_2, \ldots, r_n, 0, 0, \ldots\}$ aus E_0, so daß

$$\sum_{k=1}^{n} |\xi_k - r_k|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}$$

ist. Dann erhalten wir

$$[\varrho(x, x_0)]^p = \sum_{k=1}^{n} |\xi_k - r_k|^p + \sum_{k=n+1}^{\infty} |\xi_k|^p < \varepsilon^p$$

und daraus

$$\varrho(x, x_0) < \varepsilon .$$

Somit ist die Behauptung bewiesen.

Die Separabilität von $L_p[0, 1]$. Aus der absoluten Stetigkeit des Lebesgueschen Integrals (siehe [24]) folgt: Jede Funktion $x(t)$ des Raumes $L_p[0, 1]$ ist Grenzwert im Mittel von p-ter Potenz einer Folge beschränkter meßbarer Funktionen $x_N(t)$, die durch

$$x_N(t) = \begin{cases} x(t), & \text{falls} \quad |x(t)| \leqq N , \\ N , & \text{falls} \quad |x(t)| > N \end{cases}$$

definiert sind. Ferner folgt leicht aus einem Satz von N. N. LUSIN (C-Eigenschaft), daß jede beschränkte meßbare Funktion Grenzwert im Mittel von p-ter Potenz einer Folge stetiger Funktionen ist. Folglich ist die Menge der auf $[0, 1]$ stetigen Funktionen überall dicht in $L_p[0, 1]$. Andererseits ist die abzählbare Menge der Polynome mit rationalen Koeffizienten überall dicht in $C[0, 1]$, und zwar im Sinne der Metrik dieses Raumes, also um so mehr im Sinne der Metrik von $L_p[0, 1]$. Dann ist aber die betrachtete Menge der Polynome überall dicht in $L_p[0, 1]$. Die Separabilität von $L_p[0, 1]$ ist damit bewiesen.

Die Separabilität von s. E_0 sei die Menge der Elemente x der Form

$$\{r_1, r_2, \ldots, r_n, 0, 0, \ldots\},$$

wobei r_i rationale Zahlen sind und n eine beliebige natürliche Zahl ist. E_0 ist abzählbar. Wir zeigen, daß man aus E_0 eine Teilfolge herausgreifen kann, die gegen ein beliebig gewähltes Element

$$x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots\} \in s$$

konvergiert. Zu jedem ξ_n konstruieren wir eine Folge rationaler Zahlen $\{r_n^{(k)}\}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, die für $k \to \infty$ gegen ξ_n konvergiert. Wir betrachten die Folge $\{x^{(k)}\}$ von Elementen aus E_0 der Gestalt

$$x^{(k)} = \{r_1^{(k)}, r_2^{(k)}, \ldots, r_k^{(k)}, 0, 0, \ldots\}.$$

Wie man leicht sieht, geht $x^{(k)} \to x$ für $k \to \infty$. Um diese Behauptung zu beweisen, muß man zeigen, daß die n-te Komponente von $x^{(k)}$ gegen die n-te Komponente von x konvergiert für $k \to \infty$. Dies sieht man aber unmittelbar, da

$$|\xi_n - r_n^{(k)}| < \varepsilon$$

wird, falls man nur $k > n$ hinreichend groß wählt.

Die Inseparabilität von m. Wir betrachten die Menge aller Elemente $x = \{\xi_i\}$ aus m, wobei ξ_i gleich 0 oder 1 ist. Die Menge dieser Elemente besitzt die Mächtigkeit des Kontinuums. Wir wählen zwei verschiedene Elemente $x = \{\xi_i\}$ und $y = \{\eta_i\}$ aus dieser Menge. Dann ist $\varrho(x, y) = \sup\limits_i |\xi_i - \eta_i| = 1$, und wir haben ein Kontinuum von Elementen, die alle den Abstand 1 haben. Daraus ergibt sich leicht, daß m inseparabel ist. Nehmen wir an, in m existiere eine überall dichte abzählbare Menge E_0. Um jedes Element aus E_0 bilden wir eine Kugel vom Radius $\varepsilon = \frac{1}{3}$. Dann liegen alle Elemente des Raumes m im Innern dieser Kugeln. Da die Anzahl der Kugeln abzählbar ist, so muß es in mindestens einer dieser Kugeln zwei verschiedene Elemente x und y geben. Der Mittelpunkt dieser Kugel sei x_0. Dann gilt

$$1 = \varrho(x, y) \leqq \varrho(x, x_0) + \varrho(x_0, y) \leqq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

was jedoch unmöglich ist. Folglich ist m inseparabel.

Man kann jedoch zeigen, daß *der Unterraum c von m separabel ist.*

KAPITEL II

LINEARE NORMIERTE RÄUME

§ 1. Lineare Räume

Bei der Betrachtung vieler konkreter Räume sehen wir, daß die Elemente dieser Räume (Funktionen, Zahlenfolgen u. a.) zueinander addiert und mit Zahlen multipliziert werden können, wodurch Elemente desselben Raumes entstehen. Von solchen konkreten Beispielen ausgehend gelangen wir zu einer allgemeinen Definition des linearen Raumes.

Definition. E sei eine Menge von Elementen, die folgenden Axiomen genügt:

I. E ist eine additive abelsche Gruppe.

Das bedeutet, daß die Summe $x + y$ zweier beliebiger Elemente $x, y \in E$ definiert ist und ein Element derselben Menge ergibt, wobei die Addition die Bedingungen erfüllt:

1. $x + y = y + x$ (Kommutativität).
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$ (Assoziativität).
3. Es existiert ein eindeutig bestimmtes Element 0 derart, daß

$$x + 0 = x$$

für jedes x aus E ist.

4. Zu jedem Element $x \in E$ existiert ein eindeutig bestimmtes Element $-x$ desselben Raumes, so daß

$$x + (-x) = 0$$

ist. Anstelle $x + (-y)$ werden wir $x - y$ schreiben.

Das Element 0 heißt *Nullelement* der Gruppe E oder *Null*, das Element $-x$ heißt *das zu x entgegengesetzte* Element.

II. Es ist eine Multiplikation der Elemente $x, y, z, \ldots$ der Menge E mit reellen (komplexen) Zahlen $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ definiert. λx ist wiederum ein Element von E. Folgende Bedingungen sind erfüllt:

1. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu) x$ (Assoziativgesetz der Multiplikation).
2. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$, $\quad (\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x$ (zwei Distributivgesetze).
3. $1 \cdot x = x$.

Eine Menge E, die den Axiomen I und II genügt, heißt *linearer* oder *Vektorraum.* Je nachdem, ob die Multiplikation der Elemente von E mit reellen oder

komplexen Zahlen zugelassen wird, erhalten wir einen *reellen* oder *komplexen* linearen Raum[1]).

Beispiele. 1. Die Gesamtheit E_n der n-dimensionalen reellen Vektoren bildet einen reellen linearen Raum.

2. Die Gesamtheit aller komplexwertigen Lösungen einer gewöhnlichen homogenen linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung bildet einen komplexen linearen Raum.

3. Die Gesamtheit der Elemente der reellen (komplexen) Räume $C[0, 1]$, $L_p[0, 1]$ bildet einen reellen (komplexen) linearen Raum.

4. Die Gesamtheit der Elemente der reellen (komplexen) Räume m, c, l_p bildet einen reellen (komplexen) linearen Raum. Dabei nennen wir wie gewöhnlich das Element

$$x + y = \{\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \ldots, \xi_n + \eta_n, \ldots\}$$

die Summe der Elemente $x = \{\xi_i\}$ und $y = \{\eta_i\}$; als Produkt des Elementes x mit der Zahl λ bezeichnen wir das Element

$$\lambda x = \{\lambda \xi_1, \lambda \xi_2, \ldots, \lambda \xi_n, \ldots\} .$$

Wir erwähnen einige Folgerungen aus den Axiomen des linearen Raumes.

1. $0 \cdot x = 0$ [2]). Ausgehend von

$$x = 1 \cdot x = (1 + 0) \cdot x = 1 \cdot x + 0 \cdot x = x + 0 \cdot x$$

erhalten wir nämlich

$$x + (-x) = x + 0 \cdot x + (-x)$$

oder

$$0 = 0 + 0 \cdot x = 0 \cdot x .$$

2. $(-1)\, x = -x$, da

$$(-1)\, x + x = (-1 + 1)\, x = 0 \cdot x = 0$$

ist.

3. $\lambda \cdot 0 = 0$, weil

$$\lambda \cdot 0 = \lambda\, [x + (-x)] = \lambda x + \lambda(-x) = \lambda x + (-\lambda)\, x = \lambda x - \lambda x = 0$$

ist.

4. Wenn die Beziehungen $\lambda x = \mu x$ und $x \neq 0$ gelten, so ist $\lambda = \mu$. Ist nämlich $\lambda x = \mu x$, so ist $\lambda x - \mu x = 0$ oder $(\lambda - \mu)\, x = 0$. Daraus folgt unter der Annahme $\lambda \neq \mu$

$$x = \frac{1}{\lambda - \mu} (\lambda - \mu)\, x = \frac{1}{\lambda - \mu} 0 = 0 ,$$

was der Voraussetzung widerspricht.

Bemerkung. Für einen linearen Raum E ist die Kommutativität der Addition eine Folge der übrigen Axiome:

$$\begin{aligned}(x + y) - (y + x) &= (x + y) + (-1)\,(y + x) = x + y + (-1)\, y + (-1)\, x \\ &= x + [y + (-1)\, y] + (-1)\, x = x + 0 + (-1)\, x = x + (-1)\, x = 0 .\end{aligned}$$

---

[1]) Auf S. 6 hat die Bezeichnung Raum eine andere Bedeutung. Jedoch wird in allen linearen Räumen, die im weiteren betrachtet werden, der Begriff des Grenzwertes einer Folge eingeführt.

[2]) Mit dem Symbol 0 bezeichnen wir sowohl die Zahl Null als auch das Nullelement eines linearen Raumes. Aus dem Text geht hervor, worum es sich jeweils handelt.

Zwei lineare Räume E und E' heißen *isomorph*, wenn zwischen den Elementen dieser Räume eine umkehrbar eindeutige Beziehung hergestellt werden kann, die die algebraischen Operationen beibehält, d. h. bei

$$x \leftrightarrow x' \quad \text{und} \quad y \leftrightarrow y'$$

entspricht

$$x + y \leftrightarrow x' + y' \quad \text{und} \quad \lambda x \leftrightarrow \lambda x' .$$

In linearen Räumen kann man den Begriff der linearen Abhängigkeit und der linearen Unabhängigkeit von Elementen einführen. Die Elemente

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

eines linearen Raumes heißen *linear unabhängig*, wenn aus der Gleichung

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$$

folgt, daß

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

ist. Wenn es umgekehrt Zahlen

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$$

gibt, die nicht alle gleich Null sind und für die

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$$

ist, so heißen die Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *linear abhängig*. Wenn beispielsweise $\lambda_n \neq 0$ ist, dann gilt

$$x_n = -\frac{\lambda_1}{\lambda_n} x_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_n} x_2 - \cdots - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} x_{n-1}$$

oder, wenn wir $-\frac{\lambda_i}{\lambda_n} = \alpha_i$ setzen,

$$x_n = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{n-1} x_{n-1} .$$

In diesem Falle sagt man, das Element x_n ist eine *Linearkombination* der Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$.

Lineare Mannigfaltigkeiten. Eine nichtleere Menge L von Elementen eines linearen Raumes E heißt *lineare Mannigfaltigkeit*, wenn L mit den Elementen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jede Linearkombination $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$ dieser Elemente enthält.

Wir beachten, daß jede lineare Mannigfaltigkeit das Nullelement 0 enthält. Da L nicht leer ist, enthält L ein Element x. Weil L eine lineare Mannigfaltigkeit ist, enthält es auch das Element $-x = (-1)\,x$ und folglich auch das Element $x + (-x) = 0$.

Wir betrachten die Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_k$ eines linearen Raumes E. Die Menge aller Summen $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$ bildet offensichtlich eine lineare Mannigfaltig-

keit L_0 in E. Denn wenn die Elemente y_j die Form $y_j = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^{(j)} x_i$ haben, so hat jede Linearkombination

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdots + \lambda_n y_n = \sum_{i=1}^{k} \beta_i x_i$$

dieselbe Form. Die so konstruierte lineare Mannigfaltigkeit L_0 ist offensichtlich die kleinste, die die Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_k$ enthält. Das heißt, jede andere lineare Mannigfaltigkeit, die $x_1, x_2, \ldots, x_k$ umfaßt, hat L_0 als Teilmenge. L_0 ist auch der *kleinste lineare Unterraum*, der $x_1, x_2, \ldots, x_k$ enthält.

Die Definition der kleinsten linearen Mannigfaltigkeit, die vorgegebene Elemente enthält, läßt sich auch leicht auf den Fall einer unendlichen Menge, beispielsweise einer abzählbaren Menge von Elementen, verallgemeinern. Es sei $\{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}$ eine abzählbare Menge von Elementen aus E. Die kleinste, diese Menge enthaltende lineare Mannigfaltigkeit L_0 ist offenbar die Menge aller Summen der Form $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$, wobei die λ_i beliebige und k natürliche Zahlen sind. Die kleinste lineare Mannigfaltigkeit, die die vorgegebenen Elemente enthält, heißt auch die durch die *vorgegebenen Elemente definierte lineare Mannigfaltigkeit* oder die lineare Hülle dieser Elemente.

Wenn eine lineare Mannigfaltigkeit L des Raumes E durch eine endliche Zahl von Elementen bestimmt ist, heißt sie *endlichdimensional*. Wird L durch die Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bestimmt und sind diese Elemente linear unabhängig, so bezeichnet man n als *Dimension* der linearen Mannigfaltigkeit L. In diesem Fall nennt man die Gesamtheit der Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_n$ eine *Basis* von L [1]). Sind jedoch die Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_n$ linear abhängig, so bezeichnet man die maximale Anzahl linear unabhängiger Elemente der Gesamtheit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ als *Dimension* der linearen Mannigfaltigkeit L.

Eine andere Formulierung ist: L ist *n-dimensional*, wenn in L n linear unabhängige Elemente existieren und jedes $(n + 1)$-te Element dieser linearen Mannigfaltigkeit davon linear abhängig ist.

Wenn in einem Raum E (einer linearen Mannigfaltigkeit L) für eine beliebige Zahl n n linear unabhängige Elemente existieren, so heißt der Raum E (die lineare Mannigfaltigkeit L) *unendlichdimensional*. Z. B. ist leicht nachprüfbar, daß der Raum $C[0, 1]$ unendlichdimensional ist.

Direkte Summen. Wir führen jetzt die Darstellung eines linearen Raumes als direkte Summe zweier oder mehrerer linearer Mannigfaltigkeiten ein. E sei ein linearer Raum, und $L_1, L_2, \ldots, L_n$ seien lineare Teilmannigfaltigkeiten von E. Wenn wir jedes Element $x \in E$ eindeutig in der Form

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \qquad x_i \in L_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

schreiben können, so sagen wir, der Raum E sei eine *direkte Summe* der linearen Mannigfaltigkeiten $L_1, \ldots, L_n$, und (1) heißt *Darstellung von x durch Elemente von $L_1, \ldots, L_n$*.

---

[1]) Für einen unendlichdimensionalen Raum wird die Definition einer Basis später gegeben.

Wir wollen

$$E = \sum_{i=1}^{n} \oplus L_i$$

schreiben.

Wenn

$$E = \sum_{i=1}^{n} \oplus L_i \qquad \text{und} \qquad L_i = \sum_{k=1}^{m_i} \oplus L_k^{(i)}$$

gilt, so ist

$$E = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_i} \oplus L_k^{(i)} ,$$

wie man leicht sieht. Dann können wir jedes Element $x \in E$ in der Form

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} (x_1^{(i)} + x_2^{(i)} + \cdots + x_{m_i}^{(i)}) , \qquad x_i \in L_i , \qquad x_k^{(i)} \in L_k^{(i)},$$

darstellen, und diese Darstellung ist eindeutig. Denn ist

$$x = \sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i = \sum_{i=1}^{n} (\tilde{x}_1^{(i)} + \tilde{x}_2^{(i)} + \cdots + \tilde{x}_{m_i}^{(i)})$$

eine andere, so gilt wegen der Eindeutigkeit der Darstellung von $x \in E$ durch die Elemente von $L_1, \ldots, L_n$

$$x_i = x_1^{(i)} + x_2^{(i)} + \cdots + x_{m_i}^{(i)} = \tilde{x}_1^{(i)} + \tilde{x}_2^{(i)} + \cdots + \tilde{x}_{m_i}^{(i)} = \tilde{x}_i ,$$

und wegen der eindeutigen Darstellung der $x_i \in L_i$ durch die Elemente der $L_1^{(i)}, \ldots, L_{m_i}^{(i)}$ ist

$$x_k^{(i)} = \tilde{x}_k^{(i)} , \qquad i = 1, 2, \ldots, n , \qquad k = 1, 2, \ldots, m_i .$$

Wenn $E = L_1 \oplus L_2$ ist, so haben L_1 und L_2 nur das Nullelement 0 des Raumes gemeinsam.

Enthielten nämlich L_1 und L_2 ein Element $u \neq 0$, so gäbe es für $x \in E$ mit

$$x = y + z , \qquad y \in L_1 , \qquad z \in L_2 ,$$

auch die Darstellung

$$x = (y - u) + (z + u) , \qquad y - u \in L_1 , \qquad z + u \in L_2 ,$$

die von der ersten verschieden ist. Dies ist jedoch nach Voraussetzung unmöglich.

Wenn umgekehrt jedes Element $x \in E$ in der Form

$$x = y + z , \qquad y \in L_1 , \qquad z \in L_2, \tag{2}$$

dargestellt werden kann, und wenn $L_1 \cap L_2 = 0$ ist, so ist $E = L_1 \oplus L_2$.

Um diesen Satz zu beweisen, genügt es, die Eindeutigkeit der Darstellung (2) zu prüfen. Ist

$$x = y + z = \tilde{y} + \tilde{z} , \qquad y, \tilde{y} \in L_1 , \qquad z, \tilde{z} \in L_2 ,$$

so ist

$$y - \tilde{y} = \tilde{z} - z\,, \quad y - \tilde{y} \in L_1\,, \quad \tilde{z} - z \in L_2\,.$$

Auf Grund unserer Voraussetzung folgt

$$y - \tilde{y} = \tilde{z} - z = 0\,, \quad \text{d. h.} \quad y = \tilde{y}\,, \quad z = \tilde{z}\,,$$

was zu beweisen war.

In einer Reihe von Fällen erweist sich der Begriff der direkten Summe von mehreren Räumen als nützlich. $E_1, \ldots, E_n$ seien lineare Räume. Wir betrachten die Menge aller geordneten n-Tupel $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ von Elementen der gegebenen Räume, wobei $x_i \in E_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, ist. Wenn $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ und ein Skalar λ gegeben sind, so setzen wir

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

und

$$\lambda\, x = (\lambda\, x_1, \lambda\, x_2, \ldots, \lambda\, x_n)\,.$$

Man bestätigt leicht, daß die so definierten Operationen der Addition und der skalaren Multiplikation alle Axiome eines linearen Raumes erfüllen. Also ist die Menge X der geordneten n-Tupel ein linearer Raum.

Wenn alle Räume E_n metrische Räume sind, so kann man X metrisieren, indem man z. B.

$$\varrho(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \varrho_{E_i}(x_i, y_i)$$

oder

$$\varrho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \varrho_{E_i}^2(x_i, y_i)}$$

setzt. Dabei bedeutet $\varrho_{E_i}(x_i, y_i)$ den Abstand zwischen den Punkten x_i und y_i des Raumes E_i.

Aus der Vollständigkeit der Räume $E_1, E_2, \ldots, E_n$ folgt die Vollständigkeit des Raumes X. Den Beweis dieser Behauptungen überlassen wir dem Leser.

Beispiel. E_i sei für jedes i eine Zahlengerade. Dann ist $\sum_{i=1}^{n}{}' \oplus E_i$ der n-dimensionale euklidische Raum, falls man die zweite Art der Metrisierung wählt.

Faktorräume. Wir betrachten einen linearen Raum E und eine lineare Teilmannigfaltigkeit L_0. Der Raum E als additive Gruppe zerfällt in Nebenklassen L von L_0 derart, daß zwei Elemente x_1 und x_2 ein und demselben L angehören genau dann, wenn $x_1 - x_2$ zu L_0 gehört. Ist x' ein beliebiges Element aus L, so läßt sich jedes x aus L in der Form $x = x' + x_0$ darstellen, wobei $x_0 \in L_0$ ist. L entsteht also aus der linearen Mannigfaltigkeit durch „Verschiebung um x'".

Wir konstruieren die Faktorgruppe E/L_0. Ihre Elemente sind die Mengen L, die durch Verschiebungen der linearen Mannigfaltigkeit L_0 erzeugt werden.

Die Addition wird in E/L_0 in folgender Weise definiert: L_1 und L_2 seien Elemente aus E/L_0; dann heißt die Nebenklasse, die von allen möglichen Sum-

men $x_1 + x_2$ mit $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$ gebildet wird, die Summe $L_1 + L_2$. $L_1 + L_2$ ist auch wirklich eine Nebenklasse, denn sind $x_1 + x_2$ und $x_1' + x_2'$ aus $L_1 + L_2$, so gilt
$$(x_1 + x_2) - (x_1' + x_2') = (x_1 - x_1') + (x_2 - x_2') = x_0 + y_0 \in L_0 ,$$
weil $x_0, y_0 \in L_0$ sind und L_0 eine lineare Mannigfaltigkeit ist. Folglich liegt $L_1 + L_2$ in einer Nebenklasse: $L_1 + L_2 \subset L$. Von einem beliebigen Element y der Klasse kann man ein Element der Form $x_1 + x_2$ aus L (das existiert, da $L \supset L_1 + L_2$ ist) subtrahieren,
$$y - (x_1 + x_2) = x_0 \in L_0 ,$$
woraus folgt
$$y = x_1 + x_2 + x_0 = x_1 + \tilde{x}_2$$
mit $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$. Deshalb ist $L \subset L_1 + L_2$ und folglich $L_1 + L_2 = L$.

Analog beweist man: Die Gesamtheit λL von Elementen der Form λx mit $x \in L$ und $\lambda \neq 0$ ist ebenfalls eine Nebenklasse. Wir setzen weitergehend durch Definition für ein beliebiges $L \in E/L_0$ fest: $0 \cdot L = L_0$. Dann läßt sich leicht zeigen, daß E/L_0 allen Axiomen eines linearen Raumes genügt. Dabei spielt L_0 die Rolle des Nullelementes von E/L_0. Wenn $L \in E/L_0$ das Nullelement 0 des Raumes E enthält, so fällt L mit L_0 zusammen, da in diesem Falle jedes Element $x \in L$ die Form $x = 0 + x_0 = x_0$, $x_0 \in L_0$, hat.

Die Umkehrung davon gilt ebenfalls.

Den Raum E/L_0 bezeichnet man als *Faktorraum* des Raumes E nach L_0.

Beispiel. Wir betrachten in $C[0, 1]$ die lineare Mannigfaltigkeit C_0 aller stetigen Funktionen, die für $t = 1/2$ den Wert Null haben. Der entsprechende Faktorraum ist isomorph zur Menge der reellen Zahlen.

Entstammen $x(t)$ und $y(t)$ einer Nebenklasse bezüglich C_0, so bedeutet das: $x(1/2) - y(1/2) = 0$ oder $x(1/2) = y(1/2)$. Eine Nebenklasse besteht also aus den Funktionen, die im Punkt $t = 1/2$ den gleichen Wert annehmen. Nehmen wir in jeder Nebenklasse als Vertreter $x(t) = \text{const}$, so erhalten wir eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen der Menge der Konstanten und den Nebenklassen. Diese Zuordnung ist ein Isomorphismus.

Man kann zeigen, daß bei $E = E_1 \oplus E_2$ der Raum E/E_1 isomorph zu E_2 ist.

Zusammenhang zwischen den reellen und den komplexen Räumen. Für die komplexen Zahlen ist außer den algebraischen Operationen auch der Übergang zur konjugiert komplexen Zahl von Bedeutung:
$$\overline{a + i b} = a - i b .$$

Solch eine Operation nennt man *Involution.*

Allgemeiner definieren wir:

Involution heißt eine auf dem linearen komplexen Raum E definierte Abbildung, die jedem $a \in E$ ein $\bar{a} \in E$ zuordnet, mit den Eigenschaften:

1. $\overline{a + b} = \bar{a} + \bar{b}$.
2. $\overline{\lambda a} = \bar{\lambda} \cdot \bar{a}$ (λ komplex).
3. $\bar{\bar{a}} = a$. [1]

[1] Ist in E die Konvergenz einer Folge von Elementen erklärt, so wird eine ergänzende Eigenschaft gefordert:

4. Aus $a_n \to a$ folgt $\bar{a}_n \to \bar{a}$.

Alle Elemente $a \in E$, für die $\bar{a} = a$ ist, heißen *reell*. Die Elemente $a \in E$, für die $\bar{a} = -a$ ist, heißen *rein imaginär*. Offenbar gilt: Wenn a reell, so ist $i\,a$ rein imaginär, und wenn c rein imaginär, so ist $\frac{1}{i}\,c$ reell. Also fällt die Menge der rein imaginären Elemente mit der Menge aller Elemente der Form $i\,a$ zusammen, wobei a reell ist.

Jedes Element $x \in E$ läßt sich eindeutig in der Form $x = a + i\,b$ mit reellem a und b darstellen.

Setzen wir nämlich $a = \frac{x + \bar{x}}{2}$, $b = \frac{x - \bar{x}}{2\,i}$, so ist $x = a + i\,b$,

$$\bar{a} = \frac{1}{2}\,\overline{(x + \bar{x})} = \frac{1}{2}\,(\bar{x} + \bar{\bar{x}}) = \frac{1}{2}\,(x + \bar{x}) = a$$

und

$$\bar{b} = -\frac{1}{2\,i}\,\overline{(x - \bar{x})} = -\frac{1}{2\,i}\,(\bar{x} - \bar{\bar{x}}) = \frac{1}{2\,i}\,(x - \bar{x}) = b\,,$$

d. h., a und b sind reell.

Die Darstellung jedes Elementes $x \in E$ in der Form $x = a + i\,b$ ist eindeutig, d. h., wenn

$$a + i\,b = c + i\,d \tag{3}$$

ist, so gilt $a = c$ und $b = d$.

Denn wegen (3) gilt $a - c = i\,(d - b)$ mit a, b, c, d reell.

Ferner ist

$$\overline{a - c} = \bar{a} - \bar{c} = a - c\,,$$

$$\overline{i\,(d - b)} = -\,i\,(\bar{d} - \bar{b}) = -\,i\,(d - b)\,.$$

Daraus folgt

$$a - c = -\,i\,(d - b)\,,$$

d. h.

$$i\,(d - b) = -\,i\,(d - b)\,,$$

und somit ist

$$d - b = 0\,, \quad d = b\,.$$

Also ist $a - c = 0$ und $a = c$.

Wir haben damit bewiesen, daß der Raum E direkte Summe zweier reeller linearer Räume ist. Daher lassen sich viele Untersuchungen über komplexe Räume auf die Betrachtung reeller Räume zurückführen. Ebenso kann ein n-dimensionaler komplexer Raum als direkte Summe zweier n-dimensionaler reeller Räume aufgefaßt werden.

Wenn im folgenden von linearen Räumen die Rede ist, so sind damit reelle lineare Räume gemeint.

§ 2. Lineare normierte Räume

Definitionen. Ein linearer Raum, der gleichzeitig ein metrischer Raum ist, heißt *linearer metrischer Raum*. Eine wichtige Klasse linearer metrischer Räume stellen die Räume vom Typ B (BANACH-Räume) dar.

Eine Menge E heißt *linearer normierter Raum*, wenn

I. E ein reeller (komplexer) linearer Raum ist, und wenn

II. jedem Element x des linearen Raumes E eine eindeutig bestimmte reelle Zahl zugeordnet wird, die man Norm dieses Elementes nennt und mit $||x||$ bezeichnet. Die Norm eines Elementes muß folgenden Bedingungen genügen (*Axiome der Norm*):

1. $||x|| \geqq 0$ und $||x|| = 0$, nur wenn $x = 0$ ist;
2. $||x + y|| \leqq ||x|| + ||y||$;
3. $||\lambda x|| = |\lambda| \, ||x||$.

In einem linearen normierten Raum kann man durch

$$\varrho(x, y) = ||x - y||$$

eine Metrik einführen. Man bestätigt leicht, daß der eingeführte Abstand allen metrischen Axiomen genügt. Nach Einführung der Metrik definiert man

$$x = \lim_n x_n \qquad \text{oder} \qquad x_n \to x \qquad \text{durch} \qquad ||x_n - x|| \to 0$$

für $n \to \infty$. Diese Konvergenz in einem linearen normierten Raum heißt *Normkonvergenz*.

Wenn ein linearer normierter Raum vollständig im Sinne der Normkonvergenz ist, so heißt er BANACH-*Raum* oder *Raum vom Typ B*.

Beispiele. 1. Der n-dimensionale Vektorraum E_n ist ein Raum vom Typ B. Wenn man die Summe von Elementen und das Produkt eines Elementes mit einer Zahl wie üblich und die Norm durch

$$||x|| = \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\right)^{1/2}$$

definiert, so sieht man, daß E_n vom Typ B ist. Dabei ist die Metrik die früher in E_n eingeführte.

2. $C[0, 1]$ ist ein BANACH-Raum. Die Addition von Funktionen und die Multiplikation einer Funktion mit einer reellen Zahl definieren wir in der üblichen Weise. Ferner setzen wir

$$||x|| = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)| .$$

Die Metrik fällt mit der früher in $C[0, 1]$ eingeführten zusammen.

3. l_p ist ein Raum vom Typ B, wenn man die Addition und die Multiplikation mit einer reellen Zahl durch

$$x + y = \{\xi_i + \eta_i\} ,$$
$$\lambda x = \{\lambda \xi_i\}$$

definiert und

$$||x|| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p\right)^{1/p}$$

setzt. Die zugehörige Metrik ist wieder die von früher bekannte.

4. $L_p[0, 1]$ ist ein BANACH-Raum. Hier setzen wir für $x(t) \in L_p[0, 1]$

$$||x|| = \left(\int_0^1 |x(t)|^p \, dt\right)^{1/p} .$$

Man erhält wieder die alte Metrik.

5. m ist ein Raum vom Typ B. Denn setzen wir für $x = \{\xi_i\}$, $||x|| = \sup_t |\xi_i|$, so erhalten wir wieder einen BANACH-Raum mit bekannter Metrik.

6. $\tilde{M}[0, 1]$ ist ein Raum vom Typ B. Für eine beschränkte, auf $[0, 1]$ meßbare Funktion $x(t)$ setzen wir

$$||x|| = \text{vrai max} \, |x(t)| .$$

7. Wir betrachten den Raum der auf $[0, 1]$ definierten, dort stetigen und mit stetigen Ableitungen bis einschließlich k-ter Ordnung versehenen Funktionen $x(t)$. In diesem Raum führen wir durch

$$||x|| = \max \{\max_t |x(t)|, \max_t |x'(t)|, \ldots, \max_t |x^{(k)}(t)|\}$$

eine Norm ein. Es entsteht ein Raum vom Typ B, der mit $C^k[0, 1]$ bezeichnet wird. Dieser Raum wird weitgehend in der Variationsrechnung benutzt.

Aus den Beziehungen

$$||(x_n + y_n) - (x + y)|| \leqq ||x_n - x|| + ||y_n - y|| ,$$
$$||\lambda_n x_n - \lambda x|| \leqq |\lambda_n| \, ||x_n - x|| + |\lambda_n - \lambda| \, ||x||$$

folgt bei $x_n \to x$, $y_n \to y$, $\lambda_n \to \lambda$

$$x_n + y_n \to x + y , \qquad \lambda_n x_n \to \lambda x ,$$

weiter

$$||x|| = ||y + (x - y)|| \leqq ||y|| + ||x - y||$$

oder

$$||x|| - ||y|| \leqq ||x - y|| .$$

Vertauschung von x und y führt zu

$$||y|| - ||x|| \leqq ||x - y|| ,$$

und folglich ist

$$\big| \, ||x|| - ||y|| \, \big| \leqq ||x - y|| .$$

Hieraus folgt bei $x_n \to x$

$$||x_n|| \to ||x|| ,$$

und im besonderen, daß $\{||x_n||\}$ eine beschränkte Zahlenfolge ist.

Da ein linearer normierter Raum metrisch ist, sind für ihn alle Begriffe sinnvoll, die in metrischen Räumen eingeführt wurden (Kugel, beschränkte Menge, Separabilität usw.), und es gelten alle Sätze, die für solche Räume bewiesen wurden.

Für BANACH-Räume gilt alles, was früher für vollständige metrische Räume Räume hergeleitet wurde.

Die Menge der Elemente eines linearen Raumes E der Form

$$y = t x , \qquad x \in E , \qquad x \neq 0 , \qquad -\infty < t < +\infty ,$$

nennt man die durch das gegebene Element x bestimmte *Gerade*, und die Menge der Elemente der Form

$$y = (1 - t)\, x_1 + t\, x_2\,, \qquad x_1, x_2 \in E\,, \qquad 0 \leqq t \leqq 1\,,$$

heißt *Verbindungsstrecke* der Punkte x_1 und x_2. Eine Menge K des Raumes E heißt *konvex*, wenn eine zwei beliebige Punkte der Menge K verbindende Strecke ganz in dieser Menge enthalten ist.

M sei eine Punktmenge des linearen Raumes E. Die Menge der Elemente der Form $x + a$, wobei $x \in M$ und a ein festes Element des Raumes E ist, heißt *Verschiebung* der Menge M und wird mit $M + a$ bezeichnet. Man überprüft unschwer, daß für eine konvexe Menge K die Verschiebung auch konvex ist.

Wie man leicht sieht, ist eine Kugel (eine abgeschlossene Kugel) in einem linearen normierten Raum eine konvexe Menge. Es seien $x_1, x_2 \in S(a, r)$, d. h., es gelte

$$||x_1 - a|| < r\,, \qquad ||x_2 - a|| < r\,.$$

Für ein beliebiges Element der Form

$$y = (1 - t)\, x_1 + t\, x_2\,, \qquad 0 < t < 1\,,$$

gilt dann

$$\begin{aligned} ||y - a|| &= ||(1 - t)\, x_1 + t\, x_2 - a|| \\ &= ||(1 - t)\, x_1 + t\, x_2 - (1 - t)\, a - t\, a|| \\ &\leqq ||(1 - t)\, (x_1 - a)|| + ||t\, (x_2 - a)|| \\ &= (1 - t)\, ||x_1 - a|| + t\, ||x_2 - a|| \\ &< (1 - t)\, r + t\, r = r\,. \end{aligned}$$

Also ist

$$||y - a|| < r$$

und somit $y \in S(a, r)$.

Wir erwähnen zwei offensichtliche Eigenschaften der Kugel im BANACH-Raum: Ein beliebiger Punkt $x \neq 0$ ist in einer Kugel mit dem Zentrum im Koordinatenursprung und dem Radius $r > ||x||$ enthalten, jedoch nicht in einer solchen mit dem Radius $r' < ||x||$.

Ein linearer normierter Raum E ist ein spezieller linearer Raum, und so haben alle in linearen Räumen eingeführte Begriffe auch für E ihren Sinn, z. B.: lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Elementen, lineare Mannigfaltigkeit, Zerlegung von E in eine direkte Summe usw.

Sei L eine lineare Mannigfaltigkeit eines linearen normierten Raumes E. Ist L außerdem eine abgeschlossene Menge, so heißt L *Unterraum*.

Für eine endlichdimensionale lineare Mannigfaltigkeit eines linearen normierten Raumes gilt, wie wir später sehen werden, $\overline{L} = L$.

Bei unendlichdimensionalen linearen Mannigfaltigkeiten gilt diese Gleichung nicht unbedingt.

Ist beispielsweise $E = C[0, 1]$ und L die von den Elementen

$$x_0 = 1\,, \qquad x_1 = t, \ldots, x_n = t^n, \ldots$$

erzeugte lineare Mannigfaltigkeit, so ist L die Menge aller Polynome, aber

$$\overline{L} = C[0, 1] \neq L .$$

Zwei lineare normierte Räume E_1 und E_2 werden wir im weiteren *isomorph* nennen, wenn eine eineindeutige und in beiden Richtungen stetige isomorphe Abbildung von E_1 auf E_2 existiert. Es gilt dann der folgende wichtige Satz:

Satz. *Alle endlichdimensionalen linearen normierten Räume von gegebener Dimension n sind zum euklidischen n-dimensionalen Raum E_n und folglich zueinander isomorph.*

E sei ein n-dimensionaler linearer normierter Raum und $x_1, x_2, \ldots, x_n$ eine Basis dieses Raumes. Dann können wir ein beliebiges Element $x \in E$ eindeutig in der Form

$$x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_n x_n$$

darstellen. Wir ordnen dem Element $x \in E$ das Element

$$\overline{x} = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\} \in E_n$$

zu. Diese Zuordnung zwischen den Elementen x und $\overline{x}$ ist umkehrbar eindeutig. Außerdem ist sie ein Isomorphismus der linearen Räume E und E_n. Wir zeigen die Stetigkeit in beiden Richtungen.

Für jedes $x \in E$ gilt

$$\|x\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i\right\| \leqq \sum_{i=1}^{n} |\xi_i| \, \|x_i\| \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\right)^{1/2} = \beta \, \|\overline{x}\| . \tag{1}$$

Speziell ist

$$\|x - y\| \leqq \beta \, \|\overline{x} - \overline{y}\| , \tag{2}$$

wobei β nicht von x und y abhängt.

Wir leiten nun eine entgegengesetzte Ungleichung her.

Auf der Oberfläche S der Einheitskugel $\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 = 1$ des Raumes E_n betrachten wir die Funktion

$$f(\overline{x}) = f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \|x\| = \|\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_n x_n\| .$$

Da auf S nicht alle ξ_i gleichzeitig verschwinden können, gilt auf Grund der linearen Unabhängigkeit der $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) > 0 .$$

Die Ungleichung

$$|f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) - f(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)| = |\, \|x\| - \|y\| \,| \leqq \|x - y\| \leqq \beta \, \|\overline{x} - \overline{y}\|$$

zeigt die Stetigkeit der Funktion $f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Nach dem Weierstraßschen Satz nimmt diese Funktion auf S ihr Minimum α an, für das leicht $\alpha > 0$ herleitbar ist. Folglich ist für $\overline{x} \in S$

$$f(\overline{x}) = \|x\| \geqq \alpha ,$$

wonach wir für beliebiges $\bar{x} \in E_n$

$$f(\bar{x}) = ||x|| = ||\bar{x}|| \left\| \sum_{i=1}^{n} \frac{\xi_i x_i}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k^2}} \right\| \geqq \alpha \, ||\bar{x}|| \tag{3}$$

finden. Aus (1) und (3) folgt die Stetigkeit der Abbildung von E auf E_n in beiden Richtungen.

Die Homöomorphie von E und E_n läßt den Schluß zu, daß im endlichdimensionalen BANACH-Raum die Normkonvergenz auf die Konvergenz der Koordinaten zurückführbar und deshalb solch ein Raum vollständig ist.

Für einen Unterraum eines linearen normierten Raumes gilt das folgende von F. RIESZ formulierte Lemma:

Lemma. *Es sei L ein echter Unterraum des linearen normierten Raumes E. Zu jedem vorgegegebenen $\varepsilon > 0$ läßt sich dann ein $y \in E$ mit $||y|| = 1$ finden, das für alle $x \in L$ die Ungleichung $||x - y|| > 1 - \varepsilon$ erfüllt.*

Beweis. Es sei y_0 aus E, aber nicht aus L und

$$d = \inf_{x \in L} ||y_0 - x|| \, .$$

Es muß $d > 0$ sein, weil sonst y_0 Häufungspunkt von L wäre und damit entgegen der Voraussetzung zu L gehören würde. Zu jedem $\eta > 0$ läßt sich ein $x_0 \in L$ mit

$$d \leqq ||y_0 - x_0|| < d + \eta$$

angeben. Das Element

$$y = \frac{y_0 - x_0}{||y_0 - y_0||}$$

gehört dann nicht zu L, weil sonst y_0 zu L gehören würde. Außerdem ist $||y|| = 1$, und es gilt

$$||y - x|| = \left\| \frac{y_0 - x_0}{||y_0 - x_0||} - x \right\| = \frac{1}{||y_0 - x_0||} \, ||y_0 - x'||$$

$$> \frac{1}{d + \eta} ||y_0 - x'|| \geqq \frac{d}{d + \eta} = 1 - \frac{\eta}{d + \eta},$$

wobei

$$x' = x_0 + ||y_0 - x_0|| \, x \qquad \text{und} \qquad x' \in L$$

ist für jedes $x \in L$. Wird nun η so gewählt, daß $\frac{\eta}{\eta + d} < \varepsilon$ ist, so gilt mit

$$||y - x|| > 1 - \varepsilon$$

die Behauptung.

E sei ein linearer normierter Raum, L_0 ein Unterraum von E, E/L_0 der Faktorraum. E/L_0 kann durch

$$||L|| = \inf_{x \in L} ||x||$$

für jedes $L \in E/L_0$ normiert werden.

Wir zeigen, daß $||L||$ allen Axiomen der Norm genügt.

1. Es ist $||L|| \geqq 0$. Dabei gilt $||L|| = 0$ genau dann, wenn $L = L_0$ ist. Die erste Ungleichung sieht man unmittelbar ein. Ferner ist L eine abgeschlossene Menge. Denn ist $\{x_n\}$ eine Folge von Elementen aus L, die gegen $x \in E$ konvergiert, dann gilt für jedes n und jedes m $x_n - x_m \in L_0$, und für $m \to \infty$ konvergiert

$$x_n - x_m \to x_n - x .$$

Da L_0 abgeschlossen ist, so ist $x_n - x \in L_0$. Dann ist aber x zusammen mit x_n in L enthalten.

Es sei jetzt

$$||L|| = \inf_{x \in L} ||x|| = 0 .$$

Dann gibt es in L eine Folge $\{x'_n\}$, für die $||x'_n|| \to 0$ geht, d. h., es konvergiert $x'_n \to 0$. Wegen der Abgeschlossenheit muß L auch 0 enthalten; dann ist aber $L = L_0$. Daß umgekehrt $||L_0|| = 0$ ist, sieht man unmittelbar. Also ist das erste Axiom erfüllt.

2. Es ist $||L_1 + L_2|| \leqq ||L_1|| + ||L_2||$, denn es gilt

$$||L_1 + L_2|| = \inf_{x_1 \in L_1,\, x_2 \in L_2} ||x_1 + x_2|| \leqq \inf_{x_1 \in L_1,\, x_2 \in L_2} (||x_1|| + ||x_2||)$$
$$= \inf_{x_1 \in L_1} ||x_1|| + \inf_{x_2 \in L_2} ||x_2|| = ||L_1|| + ||L_2|| .$$

3. Es ist $||\lambda L|| = |\lambda|\, ||L||$, denn für $\lambda \neq 0$ ist

$$||\lambda L|| = \inf_{x \in L} ||\lambda x|| = |\lambda| \inf_{x \in L} ||x|| = |\lambda|\, ||L|| .$$

Wenn jedoch $\lambda = 0$ ist, so gilt für beliebiges L

$$||\lambda L|| = ||L_0|| = 0 = |\lambda|\, ||L|| ,$$

womit das dritte Axiom der Norm vollständig bewiesen ist.

Zum Schluß stellen wir fest, daß die durch die Einführung dieser Norm im Raum E/L_0 bedingte Konvergenz der Klassenfolge $\{L_n\}$ gegen die Klasse L der Bedingung gleichwertig ist, daß eine Elementfolge $\{x_n\}$, $x_n \in L_n$, mit $x_n \to x$, $x \in L$, existiert.

Bei

$$||L_n - L|| \to 0$$

ist

$$||L_n - L|| = \varepsilon_n , \qquad \varepsilon_n \to 0 .$$

Dann enthält $L_n - L$ ein Element $y_n - x$ mit $y_n \in L_n$, $x \in L$ und

$$||y_n - x|| < 2\, \varepsilon_n .$$

Als x kann dabei ein beliebiges festes (nicht von n abhängiges) Element $x_0 \in L$ genommen werden.

Unter der Voraussetzung

$$||y_n - x|| \leqq 2\,\varepsilon_n\,,$$

wobei $y_n \in L_n$, $x \in L$ ist, bleibt nämlich

$$||(y_n - x + x_0) - x_0|| \leqq 2\,\varepsilon_n\,,$$

und wegen $x_0 \in L$, $x \in L$ ist

$$x_0 - x \in L_0 \quad \text{und} \quad x_n = y_n - x + x_0 \in L_n\,.$$

Somit wurde für das Element $x_0 \in L$ eine Folge $\{x_n\}$, $x_n \in L_n$, konstruiert, für die $x_n \to x_0$ strebt.

Es existiere nun umgekehrt eine Folge $\{x_n\}$, $x_n \in L_n$, mit $x_n \to x$, $x \in L$. Wegen

$$||L_n - L|| = \inf_{y_n \in L_n,\, y \in L} ||y_n - y|| \leqq ||x_n - x||$$

strebt

$$||L_n - L|| \to 0\,,$$

und die Behauptung ist bewiesen.

Jetzt ist ohne weiteres die Vollständigkeit von E/L_0 nachweisbar, wenn E ein vollständiger Raum ist.

$\{L_n\}$ sei eine in sich konvergente Klassenfolge des Raumes E/L_0. Indem wir in jeder Klasse L_n ein Element x_n so auswählen, daß

$$||x_n - x_m|| \leqq 2\,||L_n - L_m||$$

ist, erhalten wir eine in sich konvergente Elementenfolge $\{x_n\}$ aus E. Da nun E ein vollständiger Raum ist, existiert ein Element $x \in E$ mit $x_n \to x$. Dann aber strebt $L_n \to L$, wobei L diejenige Klasse ist, die das Element x enthält. Damit ist die Vollständigkeit des Raumes E/L_0 bewiesen.

Schließlich bemerken wir: Sind $E_1, E_2, \ldots, E_n$ lineare normierte Räume und ist E die direkte Summe dieser Räume, so kann auch E normiert werden. Z. B. setzen wir für $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

$$||x|| + ||x_1|| + ||x_2|| + \cdots + ||x_n||\,.$$

Ebenfalls kann man zeigen, daß bei $E = E_1 \oplus E_2$ die linearen normierten Räume E_1 und E/E_2 isomorph sind.

Reihen von Elementen eines Banach-Raumes. $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ seien Elemente des Banach-Raumes E. Den Ausdruck $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ nennen wir eine aus Elementen des Raumes E gebildete *Reihe*. Wir betrachten die *Partialsummen* $s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$.

Wenn die Folge der Partialsummen konvergiert, heißt die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *konvergent.*

Auf Grund der Vollständigkeit des Raumes E konvergiert die Folge $\{s_n\}$, wenn sie eine Fundamentalfolge ist. Hieraus entsteht die folgende hinreichende Konvergenzbedingung der Reihe: Ist $||x_n|| \leqq a_n$ und konvergiert die gewöhn-

liche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, so konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Der Beweis folgt aus der Ungleichung

$$||s_{n+p} - s_n|| = ||x_{n+1} + \cdots + x_{n+p}|| \leqq a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}\,.$$

§ 3. Lineare topologische Räume

Der lineare normierte Raum, von dem einige Eigenschaften oben aufgezeigt wurden, stellt einen Spezialfall des linearen metrischen Raumes dar. Der lineare metrische Raum ist seinerseits ein Spezialfall des allgemeineren linearen topologischen Raumes. Die linearen topologischen Räume fanden in den letzten Jahren eine breite Anwendung bei verschiedenen Fragen der Funktionalanalysis, der Theorie der Differentialgleichungen und anderer Gebiete der Mathematik. Wir berühren hier nur die einfachsten Begriffe, die sich auf die linearen topologischen Räume beziehen. Eine ausführliche Darlegung der Eigenschaften dieser Räume findet man z. B. in [14] [1]).

Eine Menge $X = \{x, y, z, \ldots\}$ heißt *linearer topologischer Raum*, wenn die folgenden vier Axiome erfüllt sind:

I. X ist ein *topologischer Raum*, d. h., in X ist ein System Y von Teilmengen ausgezeichnet, die *offen* heißen und den nachstehenden Bedingungen genügen:

1. die leere Menge und der gesamte Raum sind offene Mengen;
2. die Vereinigung einer beliebigen Menge offener Mengen ist eine offene Menge;
3. der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist eine offene Menge.

Jede den Punkt $x \in X$ enthaltende offene Menge heißt *Umgebung* dieses Punktes.

Der Punkt x einer Menge $M \subset X$ heißt *innerer Punkt* dieser Menge, wenn er zusammen mit einer Umgebung $U(x)$ in M liegt. Daher ist jeder Punkt einer offenen Menge G ein innerer Punkt, denn in diesem Falle kann z. B. die Menge G selbst als $U(x)$ genommen werden. Es gilt auch die Umkehrung: Wenn jeder Punkt der Menge M ein innerer ist, so ist die Menge M offen. Das folgt aus der Gleichung

$$M = \bigcup_{x \in M} (x)\,, \qquad U(x) \subset M\,,$$

und der Eigenschaft 2 der offenen Mengen.

II. X ist ein topologischer Raum mit Trennbarkeitsaxiom, das bedeutet, für zwei beliebige Punkte x und y des Raumes X existiert eine Umgebung des Punktes x, die den Punkt y nicht enthält.

Mit Hilfe des Umgebungsbegriffs wird in der üblichen Weise der Häufungspunkt einer Menge eingeführt, und zwar heißt ein Punkt $a \in X$ *Häufungspunkt* der Menge $M \subset X$, wenn jede Umgebung des Punktes a wenigstens einen Punkt der Menge M enthält, der von a verschieden ist. Die Gesamtheit aller Häufungspunkte der Menge M heißt *Ableitung* dieser Menge und wird mit M' bezeichnet.

Die Menge $\overline{M} = M \cup M'$ heißt *abgeschlossene Hülle* (*Abschließung*) der Menge M. Die Menge M heißt *abgeschlossen*, wenn sie mit ihrer Abschließung zusammenfällt. Es läßt sich zeigen, daß die Abschließungen und die abgeschlossenen Mengen im topologischen Raum viele Eigenschaften besitzen, die schon den abgeschlossenen Hüllen und den abgeschlossenen Mengen der Zahlengeraden zukommen; z. B.: das Komplement einer offenen Menge ist eine abgeschlossene Menge; es gelten die Eigenschaften 1—4 für die Abschließung, wie sie auf Seite 9 aufgestellt wurden, eine endliche Menge ist abgeschlossen usw.

Man kann auch im topologischen Raum den Begriff des Grenzwertes einer Punktfolge $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ einführen. Und zwar ist der Punkt x ein Grenzwert dieser Folge, wenn

[1]) S. auch die Monographie von N. Bourbaki, Topologische Vektorräume, Moskau 1959.

eine beliebige Umgebung des Punktes x alle Punkte der Folge von einem bestimmten Index an enthält. Die Eindeutigkeit des so bestimmten Grenzwertes läßt sich unmittelbar nachweisen.

III. X ist ein reeller linearer Raum (man betrachtet auch komplexe Räume, jedoch werden wir diesen Fall nicht behandeln).

IV. Die Addition der Elemente und die Multiplikation eines Elements mit einer reellen Zahl sind stetig in der Topologie des Raumes X. Das bedeutet folgendes:

1. Zu zwei beliebigen Elementen x und $y \in X$ und zu einer beliebigen Umgebung $U(x+y)$ des Elements $x + y$ existieren Umgebungen $U(x)$, $U(y)$ der Elemente x bzw. y mit

$$U(x) + U(y) \subset U(x+y)$$

(mit dem Symbol $A + B$, wobei A und B Mengen des linearen Raumes X sind, bezeichnet man die Menge der Elemente aus X der Form $a + b$, $a \in A$, $b \in B$).

2. Zu einer beliebigen reellen Zahl λ, zu einem beliebigen Element $x \in X$ und zu einer beliebigen Umgebung W des Elements λx existiert eine Zahl $\delta > 0$ und eine Umgebung V des Elements x derart, daß

$$\alpha V \subset W$$

ist bei beliebigem α, das der Ungleichung

$$|\alpha - \lambda| < \delta$$

genügt (das Symbol αV bezeichnet die Menge der Punkte αy mit $y \in V$).

Es sei x_0 ein festes Element eines linearen topologischen Raumes und G eine offene Menge. $x_0 + G$ ist dann auch eine offene Menge.

Wir nehmen einen beliebigen Punkt $y \in x_0 + G$,

$$y = x_0 + x, \quad x \in G.$$

Daraus folgt: $y - x_0 \in G$. Da G eine offene Menge ist, so stellt sie eine Umgebung von $y - x_0$ dar, und auf Grund der Stetigkeit der Addition existieren Umgebungen $V(y)$ und $W(-x_0)$ der Punkte y bzw. $-x_0$ mit

$$V(y) + W(-x_0) \subset U(y - x_0) = G.$$

Im besonderen ist

$$V(y) + (-x_0) \subset G,$$

d. h.

$$V(y) \subset G + x_0.$$

Somit liegt mit jedem Punkt aus der Menge $x_0 + G$ auch eine Umgebung von ihm in ihr, d. h., $x_0 + G$ ist offen.

Analog beweist man, daß die Menge λG für eine beliebige reelle Zahl $\lambda \neq 0$ und eine beliebige offene Menge G wiederum offen ist.

Die Beweise führen zu folgendem Schluß: Ist $U(x)$ eine Umgebung des Punktes x im linearen topologischen Raum X, so stellt $U(x) - x$ eine Umgebung der Null im Raum X dar. Umgekehrt ist $V(0) + x$ eine Umgebung von x im Raum X, wenn $V(0)$ eine Umgebung der Null desselben Raumes ist. Deshalb ist es zur Angabe der Gesamtheit der Umgebungen aller Punkte des linearen Raumes, d. h. der Gesamtheit aller die Topologie des Raumes bestimmenden offenen Mengen, hinreichend, die Gesamtheit aller Umgebungen von Null anzugeben.

Eine Menge A eines linearen Raumes X heißt *symmetrisch*, wenn aus $x \in A$ folgt: $-x \in A$. Wenn U eine Umgebung von Null im linearen topologischen Raum X ist, so ist offenbar

$$-U \cap U$$

auch eine Umgebung von Null und außerdem symmetrisch.

Schließlich brauchen zur Festlegung der Topologie des Raumes nicht notwendig alle Umgebungen von Null angegeben zu werden. Es genügt, solche Systeme von Umgebungen

der Null anzuführen — sogenannte *Fundamental-* oder *Basissysteme* — die zu jeder Umgebung U von Null eine Umgebung V von Null enthalten, die ganz in U liegt. Allgemein heißen zwei Systeme S und $\tilde{S}$ von Umgebungen des Raumes X *äquivalent*, wenn für eine beliebige Umgebung $U \in S$ ein $\tilde{U} \in \tilde{S}$ existiert mit $\tilde{U} \subset U$ und umgekehrt für ein beliebiges $\tilde{V} \in \tilde{S}$ eine Umgebung $V \in S$, so daß $V \subset \tilde{V}$ ist. Damit erzeugen zwei äquivalente Systeme von Umgebungen im Raum X ein und dieselbe Topologie.

Beispiele. 1. X sei die Gesamtheit der reellen Funktionen, die auf der Geraden $-\infty < t < \infty$ definiert, dort unendlich oft differenzierbar sind und außerhalb eines endlichen Intervalls verschwinden.[1]) Die Summe von Funktionen und das Produkt einer Funktion mit einer Zahl definiert man in der üblichen Weise. Als Umgebungen der Null verwendet man die folgenden Mengen: für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ und ein beliebiges n ist die Umgebung $U(n, \varepsilon)$ von Null die Gesamtheit der Funktionen $x(t) \in X$, für die $|x^{(k)}(t)| < \varepsilon$ für $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ ist. Der Leser überprüft leicht die Gültigkeit aller Axiome des linearen topologischen Raumes.

2. Der lineare normierte Raum stellt einen linearen topologischen Raum dar. Die Umgebungen von Null sind die (im Sinne der durch die Norm bestimmten Metrik) offenen, die Null enthaltenden Mengen.

Es entsteht die Frage, in welchen Fällen ein linearer topologischer Raum normiert werden kann, d. h., wann in ihm eine Norm eingeführt werden kann, so daß die Gesamtheit der Umgebungen von Null des linearen normierten Raumes zusammenfällt mit der Gesamtheit der Nullumgebungen, die früher im linearen topologischen Raum definiert waren.

Die Antwort auf diese Frage gibt ein äußerst wichtiger Satz von A. N. Kolmogorow.

Eine Menge A eines linearen topologischen Raumes heißt *beschränkt*, wenn es zu jeder Umgebung $U(0)$ von Null eine Zahl $\lambda > 0$ gibt, so daß die Menge λA völlig in die betrachtete Umgebung fällt. Die Beschränktheit der Menge A ist gleichwertig der Bedingung:

Für jede Folge $\{x_n\} \subset A$ und jede gegen Null konvergierende Folge $\{\lambda_n\}$ reeller Zahlen strebt

$$\lambda_n x_n \to 0 .$$

Wir übergehen den Beweis dieser Behauptung. Aus ihr folgt insbesondere die Beschränktheit von $-A$, wenn A beschränkt ist.

Satz (A. N. Kolmogorow). *Für die Normierbarkeit eines linearen topologischen Raumes X ist die Existenz einer konvexen beschränkten Umgebung von Null notwendig und hinreichend.*

U sei eine Umgebung von Null im Raum X mit den aufgeführten Eigenschaften. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann sie als symmetrisch angesehen werden. Für beliebiges $x \in X$ setzen wir

$$||x|| = \inf_{\lambda > 0,\, x \in \lambda U} \lambda .$$

Wir zeigen, daß die so eingeführte Norm alle notwendigen Eigenschaften besitzt.

Als erstes ist $||0|| = 0$, da $0 \in \lambda U$ bei beliebigem $\lambda > 0$ ist. Es sei $x \neq 0$. Dann ist für ein n_0 $x \notin \frac{1}{n_0} U$. Wäre $x \in \frac{1}{n} U$ bei beliebigem n, so wäre

$$y_n = n x \in U \quad \text{für} \quad n = 1, 2, \ldots$$

und deshalb die Folge $\{y_n\}$ beschränkt. So folgt $\frac{1}{n} y_n \to 0$. Wegen $\frac{1}{n} y_n = x \neq 0$ ist das aber nicht möglich.

---

[1]) Jede Funktion besitzt ihr eigenes Intervall.

Für $x \notin \frac{1}{n_0} U$ ist

$$\|x\| \geqq \frac{1}{n_0} > 0$$

und damit die erste Eigenschaft der Norm gewährleistet.

Nun sei $\|x\| = \alpha$, $\|y\| = \beta$; $x, y \neq 0$. Dann ist $\left\|\frac{x}{\alpha}\right\| = 1$ und folglich

$$\frac{x}{\alpha} \in (1 + \varepsilon)\, U$$

für jedes $\varepsilon > 0$. Analog ist

$$\frac{y}{\beta} \in (1 + \varepsilon)\, U\,.$$

Auf Grund der Konvexität von U und folglich auch $(1 + \varepsilon)\, U$ wird

$$\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \frac{x}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \frac{y}{\beta} \in (1 + \varepsilon)\, U$$

oder

$$\frac{x + y}{\alpha + \beta} \in (1 + \varepsilon)\, U\,.$$

Daher ist

$$x + y \in (\alpha + \beta)(1 + \varepsilon)\, U\,.$$

Nun folgt

$$\|x + y\| \leqq (\alpha + \beta)(1 + \varepsilon)\,,$$

und da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, ergibt sich

$$\|x + y\| \leqq \alpha + \beta = \|x\| + \|y\|\,.$$

Ist $x = 0$ oder $y = 0$, so gilt offensichtlich

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\|\,.$$

Folglich ist auch die zweite Eigenschaft der Norm nachgewiesen.

Vermöge der Symmetrie folgt aus $x \in \lambda\, U$ auch $-x \in \lambda\, U$ und umgekehrt. Daher gilt

$$\|-x\| = \|x\|\,.$$

Wir betrachten das Element $\alpha\, x$ mit $\alpha > 0$. Es sei $x \in \lambda\, U$. Dann ist $\alpha\, x \in \alpha\, \lambda\, U$, und es folgt aus $\alpha\, x \in \alpha\, \lambda\, U$ umgekehrt $x \in \lambda\, U$, und daher ist

$$\|\alpha\, x\| = \inf_{\alpha x \in \mu U} \mu = \inf_{\alpha x \in \alpha \lambda U} \alpha\, \lambda = \alpha \inf_{x \in \lambda U} \lambda = \alpha\, \|x\|\,.$$

Im allgemeinen Fall ist

$$\|\alpha\, x\| = \|\pm |\alpha|\, x\| = \||\alpha|\, x\| = |\alpha|\, \|x\|$$

und damit die dritte Eigenschaft der Norm gesichert.

Zum Abschluß des Beweises genügt es zu zeigen, daß es zu jeder Umgebung $V(0)$ von Null im Raum X eine völlig in $V(0)$ liegende Kugel $\|x\| < \varrho$ gibt, und umgekehrt, daß zu einer beliebigen Kugel $\|x\| < \varrho$ eine Umgebung $W(0)$ um Null existiert, die ganz in dieser Kugel liegt.

Es sei $V(0)$ eine beliebige Umgebung von Null. Da die Umgebung U von Null, mit deren Hilfe die Norm eingeführt wurde, eine beschränkte Menge ist, muß eine Zahl $r > 0$ mit $r\, U \subset V(0)$ existieren. Andererseits liegt die Einheitskugel $\|x\| < 1$ offensichtlich in der Umgebung U, die Kugel $\|x\| < r$ dann in $r\, U$ und dadurch auch in der Umgebung $V(0)$ von Null.

Sei umgekehrt eine Kugel $||x|| < \varrho$ gegeben. Aus der Definition der Norm folgt, daß diese Kugel die Umgebung $\varrho' U$ von Null völlig enthält, wenn ϱ' kleiner als ϱ ist.

Die Hinlänglichkeit der Bedingungen des Satzes ist vollständig bewiesen. Der Beweis der Notwendigkeit bereitet keine Schwierigkeiten.

§ 4. Der abstrakte HILBERT-Raum

In einem n-dimensionalen reellen (komplexen) Vektorraum E_n ist außer der Addition von Vektoren und der Multiplikation eines Vektors mit einer reellen (komplexen) Zahl das skalare (oder innere) Produkt der Vektoren dieses Raumes definiert. Das *Skalarprodukt* der Vektoren

$$x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\} \quad \text{und} \quad y = \{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n\}$$

des Raumes E_n ist die Zahl

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \bar{\eta}_i .$$

Mit dem Skalarprodukt läßt sich die *Norm* oder *Länge* eines Vektors $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ durch

$$||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2} = \sqrt{(x, x)}$$

darstellen.

In der Analysis wird häufig das skalare Produkt von Funktionen betrachtet. Deshalb ist es naheliegend, die Klasse derjenigen linearen Räume, in denen ein inneres Produkt definiert ist, zu betrachten. Derartige Räume heißen HILBERT-Räume und werden durch die folgenden Axiome definiert.

Axiome des abstrakten HILBERT-Raumes. H bestehe aus den Elementen $x, y, z, \ldots$, und es gelte:

1. H ist ein komplexer linearer Raum.

2. Je zwei Elementen x und y ist eine komplexe Zahl (x, y), das *Skalarprodukt* von x und y, zugeordnet mit den Eigenschaften:

a) $(x, y) = \overline{(y, x)}$ (insbesondere ist also (x, x) reell),

b) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$,

c) $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$ für jedes komplexe λ,

d) $(x, x) \geqq 0$, wobei $(x, x) = 0$ genau dann gilt, wenn $x = 0$ ist.

Die Zahl $||x|| = \sqrt{(x, x)}$ heißt *Norm* von x.
Weiter unten (s. S. 56—57) wird gezeigt, daß diese Größe allen Anforderungen an eine Norm des linearen normierten Raumes genügt.

3. H ist im Sinne der Metrik $\varrho(x, y) = ||x - y||$ vollständig. Sind diese drei Axiome erfüllt, so nennen wir die Menge H einen *unitären Raum*. Ein n-dimensionaler unitärer Raum ist ein komplexer euklidischer Raum. Genügt H weiterhin dem Axiom

4. In H gibt es zu einer beliebigen natürlichen Zahl n auch n linear unabhängige Elemente, d. h., H ist unendlichdimensional, so heißt H *abstrakter* HILBERT-*Raum*. Wir werden ihn im weiteren einfach HILBERT-*Raum* nennen.

Beispiele. 1. Der komplexe Raum l_2 wird zum HILBERT-Raum, wenn für zwei seiner Elemente $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots\}$ und $y = \{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots\}$

$$(x, y) = \sum \xi_i \overline{\eta}_i$$

gesetzt wird. Die Konvergenz dieser Reihe für beliebige x und y aus l_2 ergibt sich aus der SCHWARZschen Ungleichung für Reihen.

2. Der komplexe Raum $L_{2,\varrho}[0, 1]$. Er wird von denjenigen komplexen Funktionen gebildet, die auf dem Intervall $[0, 1]$ definiert und meßbar sind und die außerdem der Forderung

$$\int_0^1 \varrho(t)\, |x(t)|^2\, dt < +\infty$$

genügen, wobei $\varrho(t)$ reell und fast überall auf $[0, 1]$ $\varrho(t) \geqq 0$ ist. $L_{2,\varrho}[0, 1]$ wird zu einem HILBERT-Raum, wenn man für $x, y \in L_{2,\varrho}[0, 1]$ setzt

$$(x, y) = \int_0^1 \varrho(t)\, x(t)\, \overline{y}(t)\, dt\,.$$

Die Existenz dieses Integrals folgt bei beliebigen $x(t)$ und $y(t)$ aus $L_{2,\varrho}[0, 1]$ aus der SCHWARZschen Ungleichung für Integrale. Insbesondere erhalten wir bei $\varrho(t) \equiv 1$ den komplexen Raum L_2 mit dem Skalarprodukt

$$(x, y) = \int_0^1 x(t)\, \overline{y}(t)\, dt\,.$$

Analog definiert man den reellen HILBERT-Raum. Dabei fordert man, daß das innere Produkt zweier Elemente reell ist. Die reellen Räume l_2, $L_{2,\varrho}$, L_2 sind reelle HILBERT-Räume.

Betrachten wir kurz die einfachsten Eigenschaften von HILBERT-Räumen. Zunächst leitet man aus den Axiomen 1 bis 3 leicht die Beziehungen

$$(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2)\,, \qquad (x, \lambda y) = \overline{\lambda}(x, y)$$

ab. Aus der zweiten folgt insbesondere

$$\|\lambda x\| = |\lambda|\, \|x\|\,. \tag{1}$$

Wir beweisen jetzt für das Skalarprodukt die SCHWARZsche Ungleichung. Für $x, y \in H$, $y \neq 0$, und beliebiges komplexes λ gilt

$$(x + \lambda y, x + \lambda y) \geqq 0$$

oder

$$(x, x) + \overline{\lambda}(x, y) + \lambda(y, x) + |\lambda|^2 (y, y) \geqq 0\,.$$

Setzen wir

$$\lambda = -\frac{(x, y)}{(y, y)}\,,$$

so ergibt sich

$$(x, x) - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} \geqq 0$$

oder

$$|(x, y)| \leqq ||x|| \, ||y|| \,. \tag{2}$$

Das ist die gesuchte Ungleichung. Für $y = 0$ ist die Ungleichung (2) trivial. Weiter erhalten wir

$$||x + y||^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + (y, x) + (x, y) + (y, y)$$
$$\leqq ||x||^2 + 2 \, ||x|| \, ||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2$$

oder

$$||x + y|| \leqq ||x|| + ||y|| \,. \tag{3}$$

Axiom 2 d), (1) und (3) zeigen, daß die mit Hilfe des Skalarproduktes eingeführte Norm allen Axiomen der Norm eines linearen normierten Raumes genügt, und folglich erfüllt der mit Hilfe dieser Norm eingeführte Abstand alle Axiome eines metrischen Raumes.

Man beweist leicht das

Lemma 1. *Das Skalarprodukt ist eine stetige Funktion bezüglich der Normkonvergenz.*

Wenn $x_n \to x$ und $y_n \to y$ konvergieren, dann sind die Zahlen $||x_n||$, $||y_n||$ beschränkt. M sei ihre obere Grenze. Dann gilt

$$|(x_n, y_n) - (x, y)| \leqq |(x_n, y_n) - (x_n, y)| + |(x_n, y) - (x, y)|$$
$$= |(x_n, y_n - y)| + |(x_n - x, y)| \leqq ||x_n|| \, ||y_n - y|| + ||x_n - x|| \, ||y||$$
$$\leqq M \, ||y_n - y|| + ||y|| \, ||x_n - x|| \,.$$

Da nun $||y_n - y|| \to 0$ und $||x_n - x|| \to 0$ konvergieren für $n \to \infty$, so strebt auch $|(x_n, y_n) - (x, y)| \to 0$ für $n \to \infty$, was zu beweisen war.

Orthogonalität. Zwei Elemente x und y aus H heißen *orthogonal* ($x \perp y$), wenn $(x, y) = 0$ ist. Das Element x heißt *orthogonal* zum *Unterraum* $L \subseteq H$ ($x \perp L$), wenn x zu jedem $y \in L$ orthogonal ist. Es gilt der folgende wichtige Satz:

Satz 1. *Ist $x \in H$ und L ein Unterraum von H, so gibt es eine eindeutige Darstellung*

$$x = y + z \tag{4}$$

mit $y \in L$ und $z \perp L$.

Beweis. Für $x \in L$ gilt offenbar $y = x$ und $z = 0$. Wir können deshalb $x \notin L$ voraussetzen. Es sei $d = \inf\limits_{y' \in L} ||x - y'||^2$ und $\{y_n\}$ eine Folge aus L, so daß $d_n = ||x - y_n||^2 \to d$ strebt für $n \to \infty$. Weiter sei $h \neq 0$ ein beliebiges Element aus L. Dann gilt für beliebiges komplexes ε stets $y_n + \varepsilon h \in L$, und daher ist $||x - (y_n + \varepsilon h)||^2 \geqq d$, d. h., es ist

$$||x - y_n||^2 - \bar{\varepsilon} (x - y_n, h) - \varepsilon (h, x - y_n) + |\varepsilon|^2 \, ||h||^2 \geqq d \,.$$

Für

$$\varepsilon = \frac{(x - y_n, h)}{||h||^2}$$

erhalten wir

$$||x - y_n||^2 - \frac{|(x - y_n, h)|^2}{||h^2||} \geqq d$$

und hieraus

$$|(x - y_n, h)|^2 \leqq ||h||^2 (d_n - d)$$

oder

$$|(x - y_n, h)| \leqq ||h|| \sqrt{d_n - d}\,. \tag{5}$$

Für $h = 0$ ist die Ungleichung (5) trivialerweise richtig. Dann ist aber

$$|(y_n - y_m, h)| \leqq |(y_n - x, h)| + |(x - y_m, h)| \leqq \left(\sqrt{d_n - d} + \sqrt{d_m - d}\right) ||h||\,.$$

Für $h = y_n - y_m$ wird

$$||y_n - y_m|| \leqq \sqrt{d_n - d} + \sqrt{d_m - d}\,.$$

Folglich ist $\{y_n\}$ in sich konvergent. Wegen der Vollständigkeit von H muß daher ein $y \in H$ existieren, gegen welches $\{y_n\}$ konvergiert. y gehört aber auch zu L, weil L abgeschlossen ist.

Gehen wir in der Ungleichung (5) zur Grenze über, so wird $(x - y, h) = 0$ und da h ein beliebiges Element des Unterraumes L ist, so ergibt sich, daß $x - y \perp L$ ist. Für $x - y = z$ erhalten wir die gewünschte Darstellung

$$x = y + z\,.$$

Wir haben nun noch die Eindeutigkeit dieser Darstellung zu beweisen. Es sei

$$x = y + z = y' + z'\,,$$

wo $y, y' \in L$ und $z, z' \perp L$ sind. Dann gilt $y - y' = z' - z$ und

$$||y - y'||^2 = (z' - z, y - y') = 0\,, \tag{6}$$

weil

$$y - y' \in L \quad \text{und} \quad z' - z \perp L$$

ist. Gleichung (6) bedeutet $y = y'$ und damit wird auch $z = z'$, womit unser Satz bewiesen ist.

Das Element y in der Darstellung (4) heißt *Projektion des Elementes* x in den Unterraum L. Offenbar bildet die Gesamtheit M aller zu einem vorgegebenen Unterraum orthogonalen Elemente selbst einen Unterraum. Daß diese Gesamtheit eine lineare Mannigfaltigkeit bildet, ist klar. Sie ist wegen der Stetigkeit des Skalarproduktes auch abgeschlossen. Daher kann man das Element z der obigen Darstellung als Projektion von x in M bezeichnen. M heißt *orthogonale Ergänzung* des Unterraumes L und wird mit $H \dot{-} L$ bezeichnet. Weiter heißt H auch *orthogonale Summe* von L und M und man schreibt $H = L \dot{+} M$. Offenbar

ist die orthogonale Summe ein Spezialfall der direkten Summe. Der Satz leistet also die Zerlegung eines Elementes in die Projektionen in zwei komplementäre orthogonale Unterräume.

Lemma 2. *Die lineare Mannigfaltigkeit M ist in H überall dicht genau dann, wenn kein von Null verschiedenes Element existiert, das zu allen Elementen von M orthogonal ist.*

Notwendigkeit. Zunächst ist klar, daß mit $x \perp M$ auch $x \perp \overline{M}$. Ist nun $\overline{M} = H$, so gilt $x \perp H$, insbesondere also $x \perp x$, d. h., es muß $x = 0$ sein.

Hinlänglichkeit. Angenommen, M wäre nicht überall dicht in H. Dann ist $\overline{M} \neq H$, und es gibt ein $x \notin \overline{M}$ und $x \in H$. Nach dem letzten Satz ist $x = y + z$, wo $y \in \overline{M}$ und $z \perp \overline{M}$ ist. Wegen $x \notin \overline{M}$ muß $z \neq 0$ sein, was unserer Voraussetzung widerspricht.

Orthonormierte Systeme. Ein System $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ von Elementen des Raumes H heißt *orthonormiert*, wenn stets

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij}$$

gilt, wo δ_{ij} das KRONECKER-Symbol ($\delta_{ij} = 1$ für $i = j$ und $\delta_{ij} = 0$ für $i \neq j$) ist.

Im komplexen Raum $L_2[0, 1]$ sind beispielsweise die Funktionen $e^{2\pi i n t}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, ein orthonormiertes System.

Ein unendliches System von Elementen eines linearen Raumes heißt *linear unabhängig*, wenn jedes endliche Teilsystem dieses Systems linear unabhängig ist.

Ein beliebiges System $h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$ linear unabhängiger Elemente kann mit Hilfe des folgenden SCHMIDTschen Orthogonalisierungsverfahrens in ein orthonormales überführt werden.

Wir setzen $e_1 = h_1/\|h_1\|$. Es sei $g_2 = h_2 - c_{21} e_1$, und die Zahl c_{21} wählen wir so, daß g_2 zu e_1 orthogonal ist. Offenbar muß $c_{21} = (h_2, e_1)$ sein. Weiter setzt man $e_2 = g_2/\|g_2\|$. Hierbei ist $\|g_2\| \neq 0$, weil sonst $g_2 = 0$ und damit h_1 und h_2 linear abhängig wären, was der Voraussetzung widerspricht. Sind $e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}$ schon konstruiert, so nehmen wir $g_k = h_k - \sum_{i=1}^{k-1} c_{ki} e_i$ und wählen die c_{ki}, indem wir $c_{ki} = (h_k, e_i)$ setzen, so daß die g_k orthogonal zu $e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}$ sind. Dann ist $e_k = g_k/\|g_k\|$ ein weiteres Element des zu konstruierenden orthonormalen Systems.

Beispiel. Durch Orthonormierung der Potenzen

$$1, t, t^2, \ldots, t^n, \ldots$$

im reellen Raum $L_{2,\varrho}[a, b]$ gelangt man zu einem System von Polynomen

$$P_0 = \text{const}, P_1(t), P_2(t), \ldots, P_n(t), \ldots,$$

welche mit dem Gewicht $\varrho(t)$ orthonormal sind:

$$\int_a^b \varrho(t)\, P_i(t)\, P_j(t)\, dt = \delta_{ij}\,.$$

Für $\varrho(t) \equiv 1$, $a = -1$, $b = 1$ erhält man bis auf konstante Faktoren die LEGENDREschen Polynome; für $\varrho(t) = e^{-t^2}$, $a = -\infty$, $b = +\infty$ die TSCHEBYSCHEW-HERMITEschen Polynome und für $\varrho(t) = e^{-t}$, $a = 0$, $b = \infty$ das System der TSCHEBYSCHEW-LAGUERREschen Polynome.

L sei der durch das orthonormale System $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ erzeugte Unterraum und $x \in L$. Folglich existiert für jedes $\varepsilon > 0$ eine Linearkombination $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ derart, daß

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\| < \varepsilon$$

ist. Nun gilt

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \bar{\alpha}_i (x, e_i) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (e_i, x) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \bar{\alpha}_j (e_i, e_j)$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \bar{\alpha}_i c_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{c}_i + \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 ,$$

wo

$$c_i = (x, e_i)$$

gesetzt wurde.

Die Zahlen c_i werden FOURIER-*Koeffizienten* von x bezüglich des Orthonormalsystems $\{e_i\}$ genannt. Aus der letzten Gleichung erhalten wir weiter

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 + \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - c_i|^2 .$$

Man erkennt, daß die Norm der Differenz $x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ ihren kleinsten Wert annimmt, wenn die α_i gerade die FOURIER-Koeffizienten von x bezüglich des Systems $\{e_i\}$ sind. In diesem Fall gilt

$$0 \leqq \left\| x - \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 < \varepsilon , \tag{7}$$

und da ε beliebig klein gewählt werden kann, so ist schließlich

$$x = \lim_{n} \sum_{i=1}^{n} c_i e_i = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i .$$

Aus (7) folgt noch die Konvergenz der Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2$, und zwar ist $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 = \|x\|^2$.

Es sei x jetzt ein beliebiges Element von H. Die Projektion von x auf L werde mit z bezeichnet. Dann ist $z = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i$, wo $c_i = (z, e_i) = (x, e_i)$ und $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 = \|z\|^2$ ist.

Da $x = z + y$ ist mit $z \in L$ und $y \perp L$, gilt

$$\|x\|^2 = \|z\|^2 + \|y\|^2 \geqq \|z\|^2 .$$

Folglich gilt für jedes Element x aus H die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 \leqq ||x||^2 ; \tag{8}$$

hierbei ist $c_i = (x, e_i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Das ist die sogenannte BESSEL*sche Ungleichung*.

Abgeschlossenheit im Sinne von STEKLOW. W. A. STEKLOV führte bei seinen Untersuchungen über die Darstellung von Funktionen durch Elemente eines orthonormalen Systems den wichtigen Begriff der Abgeschlossenheit eines solchen Systems ein.

Im Raum H sei ein orthonormales System $\{e_i\}$ von Elementen gegeben. Gibt es kein von Null verschiedenes und zu allen Elementen e_i orthogonales Element $x \in H$, so heißt dieses System *vollständig*. Ein orthonormales System $\{e_i\}$ heißt *abgeschlossen*, wenn der von diesem System erzeugte Teilraum L mit H zusammenfällt. Die FOURIER-Reihe eines beliebigen $x \in H$ in bezug auf ein vollständiges System konvergiert gegen dieses Element. Die PARSEVAL*sche* (STEKLOW*sche*) *Gleichung*

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 = ||x||^2 \tag{9}$$

gilt für jedes Element $x \in H$.

Ein abgeschlossenes orthonormales System heißt auch *Orthonormalbasis* des HILBERT-Raums.

Ein vollständiges orthonormales System ist auch abgeschlossen. In diesem Falle existiert kein von Null verschiedenes und zur vom System erzeugten linearen Mannigfaltigkeit orthogonales Element. Dann ist jedoch auf Grund von Lemma 2 $\bar{L} = H$ und das System vollständig.

Umgekehrt ist ein abgeschlossenes Orthonormalsystem $\{e_i\}$ vollständig, da für ein solches die Gleichung

$$||x||^2 = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2$$

gilt, und bei $x \perp l_i$, $i = 1, 2, \ldots$, d. h. $c_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots$, ist $||x|| = 0$. Das bedeutet Vollständigkeit des Systems $\{e_i\}$.

Ein Beispiel eines vollständigen Orthonormalsystems sind die trigonometrischen Funktionen $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos t, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin t, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2t, \ldots$ im reellen Raum $L_2[-\pi, \pi]$.

Leicht läßt sich die Existenz eines vollständigen Orthonormalsystems in einem beliebigen separablen HILBERT-Raum nachweisen. Sei $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots\}$ eine beliebige abzählbare, überall dichte Menge in H, wobei alle g_n, $n = 1, 2, \ldots$, von Null verschieden sind.

L_1 sei der durch

$$e_1 = \frac{g_1}{||g_1||}$$

erzeugte eindimensionale Unterraum. g_{n_2} sei das erste Element von G, welches nicht zu L_1 gehört und h_2 die Projektion von g_{n_2} auf $H \dot{-} L_1$. Weiter möge

$$e_2 = \frac{h_2}{||h_2||}$$

und e_1 den Unterraum L_2 erzeugen und g_{n_3} das erste Element der Menge G sein, welches nicht zu L_2 gehört. Mit der Projektion h_3 von g_{n_3} auf $H \dot{-} L_2$ setzen wir

$$e_3 = \frac{h_3}{||h_3||}.$$

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhalten wir ein orthonormales System $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$. Da nach Konstruktion jedes g_m einem L_n angehört, so stimmt der durch das System $\{e_i\}$ erzeugte Unterraum mit dem durch $\{g_i\}$ erzeugten Unterraum, d. h. mit H überein. Dabei kann das System $\{e_i\}$ nicht endlich sein. Hätte es nur p Elemente, so gäbe es, wie aus der linearen Algebra bekannt ist, in H keine $p + 1$ linear unabhängigen Elemente. Das widerspricht aber dem Axiom 4.

Ist $\{e_i\}$ ein vollständiges orthonormales System und sind $x, y \in H$ mit den FOURIER-Koeffizienten c_i bzw. d_i, $i = 1, 2, \ldots$, so prüft man leicht die Gültigkeit von

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \overline{d_i}.$$

Isomorphie der separablen HILBERT-Räume. H sei ein separabler HILBERT-Raum mit dem vollständigen Orthonormalsystem $\{e_i\}$. Dann bestimmt jedes $x \in H$ eine aus seinen FOURIER-Koeffizienten bestehende Zahlenfolge $\{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$, und die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2$$

konvergiert, wie oben gezeigt wurde. Man kann folglich $\{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$ als ein Element des komplexen Raumes l_2 ansehen. Jedem $x \in H$ ist also ein $\tilde{x} \in l_2$ zugeordnet. Da die Vollständigkeit von $\{e_i\}$ gefordert wurde, so gilt überdies

$$||x||_H = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2\right)^{1/2} = ||\tilde{x}||_{l_2}. \tag{10}$$

Hier sollen die Indizes H und l_2 andeuten, daß einmal die in H eingeführte Norm, das andere Mal die in l_2 definierte gemeint ist. Entsprechen in der beschriebenen Weise den Elementen $x \in H$, $y \in H$ die Elemente $\tilde{x} \in l_2$ bzw. $\tilde{y} \in l_2$, so ist $x \pm y$ offenbar gerade $\tilde{x} \pm \tilde{y}$ zugeordnet. Hieraus und aus (10) folgt

$$||x - y||_H = ||\tilde{x} - \tilde{y}||_{l_2}. \tag{11}$$

Nun sei $\tilde{z} = \{\zeta_i\}$ ein beliebiges Element aus l_2. Für die Elemente $z_n = \sum_{i=1}^{n} \zeta_i e_i$, $n = 1, 2, \ldots$, aus H gilt dann

$$||z_m - z_n||^2 = \left\|\sum_{i=n+1}^{m} \zeta_i e_i\right\|^2 = \sum_{i=n+1}^{m} |\zeta_i|^2,$$

und daher strebt für $m, n \to \infty$ dann

$$||z_m - z_n|| \to 0 .$$

Daher ist die Folge $\{z_n\}$ im Sinne der Metrik von H in sich konvergent. Wegen der Vollständigkeit von H muß $\{z_n\}$ gegen ein $z \in H$ konvergieren. Da

$$(z, e_i) = \lim (z_n, e_i) = \zeta_i$$

ist, sind die ζ_i gerade die FOURIER-Koeffizienten von z bezüglich des orthonormalen Systems $\{e_i\}$. Somit entspricht jedem $\tilde{z} \in l_2$ ein gewisses $z \in H$. Daher besteht zwischen den Elementen von H und denen von l_2 eine umkehrbar eindeutige Zuordnung.

Die Formel (11) zeigt, daß die Zuordnung zwischen den Räumen H und l_2 isometrisch ist. Die beiden Räume sind auch noch isomorph: Sind x und $\tilde{x}$ einander zugeordnet, so auch λx und $\lambda \tilde{x}$. Das bedeutet mit dem bereits oben Bewiesenen die Gültigkeit von

Satz 2. *Jeder komplexe (reelle) separable* HILBERT-*Raum ist dem komplexen (reellen) Raum l_2 isomorph und isometrisch. Folglich sind also alle komplexen (reellen) separablen* HILBERT-*Räume unter sich isomorph und isometrisch.*

Aus diesem Satz folgt speziell der weitere

Satz 3 (RIESZ, FISCHER). *Die reellen Räume $L_2[0, 1]$ und l_2 sind isomorph und isometrisch.*

§ 5. Verallgemeinerte Ableitungen und SOBOLEWsche Räume

Bei vielen Problemen der mathematischen Physik ist es zweckmäßig, verallgemeinerte Lösungen einer linearen partiellen Differentialgleichung einzuführen. Die Gesamtheit der gewöhnlichen Lösungen einer solchen Differentialgleichung ist, sofern man sie als einen Funktionenraum mit irgendeiner Metrik betrachtet, im allgemeinen ein nicht vollständiger Raum. Wir vervollständigen diesen Raum und gelangen zu den verallgemeinerten Lösungen, den Elementen des vervollständigten Raumes.

So z. B. haben die Lösungen des Problems der freien Schwingungen einer unendlichen Saite, beschrieben durch die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} ,$$

die Form

$$u(x, t) = \varphi (x + a t) + \psi (x - a t) , \tag{1}$$

wo φ und ψ zweimal differenzierbare Funktionen sind. Durch Vervollständigung der Gesamtheit der Lösungen gelangen wir zu den verallgemeinerten Lösungen, die auch die Form (1) besitzen, bei denen aber φ und ψ nur willkürliche stetige Funktionen sind.

Bei der Konstruktion verallgemeinerter Lösungen taucht der Begriff der verallgemeinerten Ableitung auf. Er wurde zuerst von S. L. SOBOLEW eingeführt.

Im folgenden stellen wir die Grundlagen der Theorie der verallgemeinerten Ableitungen und der SOBOLEWschen Räume für die einfachsten Fälle dar [34].

G sei ein beschränktes konvexes Gebiet in der Ebene. Wir betrachten die mit ihren Ableitungen bis einschließlich l-ter Ordnung auf einem die abgeschlossene Hülle von G enthaltenden Gebiet definierten und stetigen Funktionen $\varphi(x, y)$ (in diesem Falle sagen wir, daß $\varphi(x, y)$ stetig zusammen mit seinen Ableitungen bis l-ter Ordnung in G ist). In der Menge dieser Funktionen führen wir folgende Norm ein:

$$||\varphi|| = \left(\iint\limits_G |\varphi(x, y)|^p \, dx \, dy + \sum_{l_1+l_2=l} \iint\limits_G \left|\frac{\partial^l \varphi}{\partial x^{l_1} \, \partial x^{l_2}}\right|^p dx \, dy\right)^{1/p}.$$

Eine Überprüfung zeigt, daß alle Axiome der Norm erfüllt sind. Es entsteht ein linearer normierter unvollständiger Raum, den wir mit $\tilde{W}_p^{(l)}$ bezeichnen. Die Vervollständigung des Raumes mit der eingeführten Norm führt zu dem SOBOLEW*schen Raum* $W_p^{(l)}$.

f_0, ein Element des Raumes $W_p^{(l)}$, liege nicht in $\tilde{W}_p^{(l)}$. Das bedeutet die Existenz einer Funktionenfolge $\{\varphi_n(x, y)\} \subset \tilde{W}_p^{(l)}$, für die $||\varphi_n - f_0||_{W_p^{(l)}} \to 0$ bei $n \to \infty$ strebt. Das ergibt

$$||\varphi_m - \varphi_n||_{W_p^{(l)}} \to 0\,, \qquad n, m \to \infty\,,$$

d. h.

$$\iint\limits_G |\varphi_m(x, y) - \varphi_n(x, y)|^p \, dx \, dy \to 0$$

und

$$\iint\limits_G \left|\frac{\partial^l \varphi_m}{\partial x^{l_1} \, \partial y^{l_2}} - \frac{\partial^l \varphi_n}{\partial x^{l_1} \, \partial y^{l_2}}\right|^p dx \, dy \to 0\,,$$

$$l_1 + l_2 = l\,, \qquad n, m \to \infty\,.$$

Die Folgen $\{\varphi_n(x, y)\}$ und $\left\{\frac{\partial^l \varphi_n(x, y)}{\partial x^{l_1} \, \partial y^{l_2}}\right\}$ aus $L_p(G)$ (s. S. 356) konvergieren also in sich im Mittel von p-ter Potenz. Auf Grund der Vollständigkeit des Raumes $L_p(G)$ ist die Existenz der Funktionen $\varphi_0(x, y)$ und $\varphi_0^{(l_1, l_2)}(x, y) \in L_p(G)$ gesichert, die als Grenzwerte der angegebenen Folgen auftreten. Das Element f_0 wird mit der Funktion $\varphi_0(x, y)$ identifiziert, und die Funktionen $\varphi_0^{(l_1, l_2)}(x, y)$ heißen *verallgemeinerte Ableitungen* l-ter Ordnung der Funktion $\varphi_0(x, y)$ und werden wie die gewöhnlichen Ableitungen mit $\frac{\partial^l \varphi_0(x, y)}{\partial x^{l_1} \, \partial y^{l_2}}$ bezeichnet. Nach Definition ist $||f_0|| = \lim\limits_n ||\varphi_n||$. So kann die Norm des Elementes f_0 oder auch der Funktion $\varphi_0(x, y)$ in der früheren Form

$$||\varphi_0||_{W_p^{(l)}} = \left(\iint\limits_G |\varphi_0(x,y)|^p \, dx \, dy + \sum_{l_1+l_1=l} \iint\limits_G \left|\frac{\partial^l \varphi_0}{\partial x^{l_1} \, \partial y^{l_2}}\right|^p dx \, dy\right)^{1/p}$$

geschrieben werden. Unter dem Summenzeichen stehen jetzt die verallgemeinerten Ableitungen l-ter Ordnung der Funktion $\varphi_0(x, y)$.

Demzufolge existiert unter der Voraussetzung, daß $\varphi_0^{(l_1, l_2)}(x, y) \in L_p(G)$ eine verallgemeinerte Ableitung l-ter Ordnung von der Funktion $\varphi_0(x, y) \in L_p(G)$ ist, in $\overline{G}$ eine Folge stetig bis l-ter Ordnung differenzierbarer Funktionen $\varphi_n(x, y)$, die im Mittel von p-ter Potenz gegen die Funktion $\varphi_0(x, y)$ konvergieren. Die Folge $\left\{\frac{\partial^l \varphi_n(x, y)}{\partial^{l_1} x \, \partial^{l_2} y}\right\}$ konvergiert ebenfalls im Mittel von p-ter Potenz, und zwar gegen $\varphi_0^{(l_1, l_2)}(x, y)$.

Die Definition der verallgemeinerten Ableitung beinhaltet ihre Eindeutigkeit als Element des Raumes $L_p(G)$. Wenn $\varphi_0(x, y) \in L_p(G)$ in $\overline{G}$ stetig differenzierbar bis zur l-ten Ordnung einschließlich im gewöhnlichen Sinne ist, kann die Folge $\{\varphi_n(x, y)\}$, $\{\varphi_n(x, y)\} \equiv \varphi_0(x, y)$, für alle n genommen werden, und es ist

$$\frac{\partial^l \varphi_0}{\partial x^{l_1} \, \partial y^{l_2}} = \varphi_0^{(l_1, l_2)}(x, y) = \frac{\partial^l \varphi_n}{\partial x^{l_1} \, \partial y^{l_2}} .$$

In diesem Falle reduziert sich die verallgemeinerte Ableitung auf die gewöhnliche.

Mitunter wird eine andere Definition der verallgemeinerten Ableitung gegeben. Zunächst sollen $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ stetige Ableitungen bis zur l-ten Ordnung in $\overline{G}$ besitzen. $\psi(x, y)$ verschwinde identisch in einem Randstreifen G_ϱ, der aus allen den Punkten des Gebietes besteht, deren Abstand vom Rand nicht größer als ϱ ist. Dann erhält man durch mehrmalige Anwendung des GREENschen Satzes

$$\iint_G \frac{\partial^l \psi}{\partial x^{l_1} \, \partial y^{l_2}} \varphi(x, y) \, dx \, dy = (-1)^l \iint_G \psi(x, y) \frac{\partial^l \varphi}{\partial x^{l_1} \, \partial y^{l_2}} \, dx \, dy .$$

Nun sei $\varphi(x, y)$ eine beliebige Funktion des Raumes $L_p(G)$. Wenn es eine Funktion $\chi(x, y) \in L_p(G)$ gibt, mit der für jede Funktion $\psi(x, y)$ mit den obigen Eigenschaften die Gleichung

$$\iint_G \frac{\partial^l \psi}{\partial x^{l_1} \, \partial y^{l_2}} \varphi(x, y) \, dx \, dy = (-1)^l \iint_G \psi(x, y) \, \chi(x, y) \, dx \, dy$$

erfüllt ist, so heißt die Funktion $\chi(x, y)$ *verallgemeinerte Ableitung* l-ter Ordnung der Funktion $\varphi(x, y)$.

Die Äquivalenz der zwei Definitionen für die verallgemeinerte Ableitung. Zum Nachweis der Äquivalenz dieser beiden Definitionen benötigen wir eine Reihe von Hilfsbegriffen und -sätzen.

Wir bezeichnen in üblicher Weise mit r den Abstand zwischen den Punkten $P(x, y)$ und $Q(\xi, \eta)$. Die Funktion

$$\omega_h(x, y; \xi, \eta) = \begin{cases} c_h \, e^{\frac{r^2}{r^2 - h^2}}, & r < h , \\ 0 , & r \geqq h , \end{cases}$$

ist als Funktion von x und y stetig und besitzt stetige Ableitungen aller Ordnungen. Sie verschwindet identisch außerhalb des Kreises K_h vom Radius h mit dem Mittelpunkt $Q(\xi, \eta)$. Auf Grund der Symmetrie von $\omega_h(x, y; \xi, \eta)$ bezüglich der Punkte P und Q behalten die obigen Eigenschaften ihre Gültigkeit auch dann, wenn ω_h als Funktion von ξ und η im Kreis K'_h mit dem Mittelpunkt $P(x, y)$ angesehen wird. Dabei kann die Differentiation von ω_h nach x durch die negative Differentiation nach ξ ersetzt werden. Dasselbe gilt für y und η. Wir wählen c_h so, daß

$$\iint_{K'_h} \omega_h(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = 1$$

wird. Wegen

$$\iint_{K'_h} \omega_h(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = c_h \iint_{K'_h} e^{\frac{r^2}{r^2-h^2}}\, d\xi\, d\eta$$

$$= c_h \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h e^{\frac{r^2}{r^2-h^2}}\, r\, dr = 2\pi c_h \int_0^h e^{\frac{r^2}{r^2-h^2}}\, r\, dr$$

wird

$$c_h = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^h e^{\frac{r^2}{r^2-h^2}}\, r\, dr \right)^{-1},$$

also ist die Wahl von c_h bei gegebenem h unabhängig von der Lage des Punktes $P(x, y)$ in der Ebene.

Eine Funktion der zwei Veränderlichenpaare x, y und ξ, η mit den beschriebenen Eigenschaften heißt *mittelnder Kern*. Die Funktion $\omega_h(x, y; \xi, \eta)$ bildet selbst ein Beispiel für einen mittelnden Kern.

$\varphi(x, y)$ sei eine beliebige Funktion aus $L_p(G)$. Wir erweitern ihren Definitionsbereich auf die ganze Ebene, indem wir $\varphi(x, y) = 0$ für $P(x, y) \notin G$ setzen. Die Funktion

$$\varphi_h(x, y) = \iint_{K'_h} \omega_h(x, y; \xi, \eta)\, \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

heißt *Mittelfunktion* von $\varphi(x, y)$.

Die gleichmäßige Konvergenz des $\varphi_n(x, y)$ definierenden Integrals ist in der ganzen Ebene leicht nachprüfbar. Ist R_δ der Kreis vom Radius δ um irgendeinen Punkt der Ebene, so setzen wir

$$q = \frac{p}{p-1}$$

und erhalten

$$\left|\iint\limits_{R_\delta} \omega_h(x, y; \xi, \eta)\, \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta\right|$$

$$\leqq \left(\iint\limits_{R_\delta} |\varphi(\xi, \eta)|^p\, d\xi\, d\eta\right)^{1/p} \left(\iint\limits_{R_\delta} \omega_h(x, y; \xi, \eta)^q\, d\xi\, d\eta\right)^{1/q}$$

$$\leqq \left(\iint\limits_{G} |\varphi(\xi, \eta)|^p\, d\xi\, d\eta\right)^{1/p} \left(\iint\limits_{R_\delta} \omega_h(x, y; \xi, \eta)^q\, d\xi\, d\eta\right)^{1/q}$$

$$= ||\varphi||_{L_p} \left(\iint\limits_{R_\delta} \omega_h(x, y; \xi, \eta)^q\, d\xi\, d\eta\right)^{1/q}.$$

Das letzte Integral kann auf Grund der Beschränktheit von $\omega_h(x, y; \xi, \eta)$ durch hinreichend kleines δ gleichzeitig für alle Lagen des Punktes $P(x, y)$ in der Ebene beliebig klein gemacht werden.

Analog wird die gleichmäßige Konvergenz des Integrals

$$\iint\limits_{K_h'} \frac{\partial^l \omega_h}{\partial x^{l_1}\, \partial y^{l_2}}\, \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

bei beliebigem l und $l_1 + l_2 = l$ bewiesen.

Hieraus folgt: $\varphi_h(x, y)$ ist eine unendlich oft stetig differenzierbare Funktion.

Gehören die $\{\varphi_\alpha(x, y)\}$ einer beschränkten Menge des Raumes $L_p(G)$ an, so sind, wie die vorangegangenen Abschätzungen zeigen, auch die Mittelfunktionen

$$[\varphi_\alpha(x, y)]_h = \iint\limits_{K_h'} \omega_h(x, y; \xi, \eta)\, \varphi_\alpha(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig.

Wir beweisen zwei Hilfssätze über Mittelfunktionen.

Lemma 1. *Für eine beliebige Funktion $\varphi(x, y) \in L_p(G)$ und beliebiges $h > 0$ ist*

$$||\varphi_h||_{L_p} \leqq ||\varphi||_{L_p}.$$

Wir schreiben $\varphi_h(x, y)$ in der Form

$$\varphi_h(x, y) = \iint\limits_{K_h'} \omega_h(x, y; \xi, \eta)^{1/p}\, \varphi(\xi, \eta)\, \omega_h(x, y; \xi, \eta)^{1/q}\, d\xi\, d\eta\,.$$

Die Anwendung der HÖLDERschen Ungleichung auf das Integral bringt $\left(q = \frac{p}{p-1}\right)$

$$|\varphi_h(x, y)| \leqq \left(\iint\limits_{K_h'} \omega_h(x, y; \xi, \eta)\, |\varphi(\xi, \eta)|^p\, d\xi\, d\eta\right)^{1/p}$$

$$\times \left(\iint\limits_{K_h'} \omega_h(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta\right)^{1/q} = \left(\iint\limits_{K_h'} \omega_h(x, y; \xi, \eta)\, |\varphi(\xi, \eta)|^p\, d\xi\, d\eta\right)^{1/p},$$

da $\iint\limits_{K_h'} \omega_h(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = 1$ ist. Durch Potenzieren der beiden Seiten der Ungleichung mit dem Exponenten p und Integrieren über G entsteht

$$\iint\limits_{G} |\varphi_h(x, y)|^p\, dx\, dy \leqq \iint\limits_{G} \left\{\iint\limits_{K_h'} \omega_h(x, y; \xi, \eta)\, |\varphi(\xi, \eta)|^p\, d\xi\, d\eta\right\} dx\, dy\,.$$

Da außerhalb K'_h die Funktion $\omega_h(x, y; \xi, \eta)$ und außerhalb G die Funktion $\varphi(\xi, \eta)$ verschwindet, können wir den Integrationsbereich des inneren Integrals gleich G annehmen und danach die Integrationsreihenfolge auf Grund des Satzes von FUBINI ändern. Wir erhalten

$$\iint_G |\varphi_h(x, y)|^p \, dx \, dy \leqq \iint_G |\varphi(\xi, \eta)|^p \left\{\iint_G \omega_h(x, y; \xi, \eta) \, dx \, dy\right\} d\xi \, d\eta$$

$$\leqq \iint_G |\varphi(\xi, \eta)|^p \left\{\iint_{K_h} \omega_h(x, y; \xi, \eta) \, dx \, dy\right\} d\xi \, d\eta .$$

Das innere Integral ist wiederum gleich Eins und folglich

$$\iint_G |\varphi_h(x, y)|^p \, dx \, dy \leqq \iint_G |\varphi(\xi, \eta)|^p \, d\xi \, d\eta .$$

Daraus folgt die geforderte Ungleichung.

Bemerkung. G^* sei ein Teilbereich des Gebiets G. Dann ist

$$\iint_{G^*} |\varphi_h(x, y)|^p \, dx \, dy \leqq \iint_{G^*} |\varphi(x, y)|^p \, dx \, dy + \alpha(h) ,$$

wobei $\alpha(h) \to 0$ bei $h \to 0$ strebt, wenn der Rand des Gebiets G^* hinreichend glatt ist.

Tatsächlich finden wir wie beim Beweis des Lemmas

$$\iint_{G^*} |\varphi_h(x, y)|^p \, dx \, dy \leqq \iint_{G^*} \left\{\iint_{K'_h} \omega_h(x, y; \xi, \eta) \, |\varphi(\xi, \eta)|^p \, d\xi \, d\eta\right\} dx \, dy .$$

G_h^* sei die Gesamtheit aller Punkte des Gebietes $G \backslash G^*$, die vom Rand des Gebietes G^* nicht weiter als h entfernt liegen. Dann ist

$$\iint_{G^*} |\varphi_h(x, y)|^p \, dx \, dy \leqq \iint_{G^*} \left\{\iint_{G^* \cup G_h^*} \omega_h(x, y; \xi, \eta) \, |\varphi(\xi, \eta)|^p \, d\xi \, d\eta\right\} dx \, dy$$

$$\leqq \iint_{G^* \cup G_h^*} |\varphi(\xi, \eta)|^p \left\{\iint_{K_h} \omega_h(x, y; \xi, \eta) \, dx \, dy\right\} d\xi \, d\eta$$

$$= \iint_{G^* \cup G_h^*} |\varphi(\xi, \eta)|^p \, d\xi \, d\eta = \iint_{G^*} |\varphi(\xi, \eta)|^p \, d\xi \, d\eta + \iint_{G_h^*} |\varphi(\xi, \eta)|^p \, d\xi \, d\eta .$$

Weil der Rand von G^* hinreichend glatt ist, strebt das Maß von G_h^* bei $h \to 0$ gegen Null. Infolge der absoluten Stetigkeit des LEBESGUE-Inetgrals erhalten wir für $h \to 0$

$$\alpha(h) = \iint_{G_h^*} |\varphi(\xi, \eta)|^p \, d\xi \, d\eta \to 0 .$$

Lemma 2. *Für eine beliebige Funktion $\varphi(x, y) \in L_p(G)$ gilt für $h \to 0$*

$$||\varphi_h - \varphi||_{L_p} \to 0 .$$

Zunächst sei $\varphi(x, y)$ im Gebiet G stetig und folglich gleichmäßig stetig in einem beliebigen abgeschlossenen Teilgebiet. Für ein beliebiges Teilgebiet $G' \subset G$ gilt

$$\iint_G |\varphi_h - \varphi|^p \, dx \, dy = \iint_{G'} |\varphi_h - \varphi|^p \, dx \, dy + \iint_{G \backslash G'} |\varphi_h - \varphi|^p \, dx \, dy .$$

Nach der MINKOWSKIschen Ungleichung erhalten wir unter Berücksichtigung der vorigen Bemerkung

$$\iint\limits_{G\setminus G'} |\varphi_h - \varphi|^p \, dx \, dy \leqq \Big\{\Big(\iint\limits_{G\setminus G'} |\varphi_h|^p \, dx \, dy\Big)^{1/p} + \Big(\iint\limits_{G\setminus G'} |\varphi|^p \, dx \, dy\Big)^{1/p}\Big\}^p$$

$$\leqq 2^p \iint\limits_{G\setminus G^*} |\varphi|^p \, dx \, dy + \gamma(h) \, .$$

Dabei strebt $\gamma(h) \to 0$ für $h \to 0$.

Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen G' so, daß

$$2^p \iint\limits_{G\setminus G'} |\varphi(x, y)|^p \, dx \, dy < \frac{\varepsilon^p}{4}$$

ist. G' wird festgehalten und h_0 so gewählt, daß bei $h < h_0$

$$\gamma(h) < \frac{\varepsilon^p}{4}$$

ist. Dann ist

$$\iint\limits_{G\setminus G^*} |\varphi(x, y)|^p \, dx \, dy < \frac{\varepsilon^p}{2} \tag{3}$$

Nehmen wir ein drittes Gebiet G'' mit $G' \subset G'' \subset G$ hinzu, für das $\overline{G'} \subset G''$, $\overline{G''} \subset G$ ist, und setzen $h < h_0$ so klein an, daß $G' \cup G'_h$ nicht über G'' hinausreicht, so erhalten wir

$$|\varphi_h(x, y) - \varphi(x, y)| = \Big|\iint\limits_{K'_h} \omega(x, y; \xi, \eta) \, \varphi(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta$$

$$- \iint\limits_{K'_h} \omega_h(x, y; \xi, \eta) \, \varphi(x, y) \, d\xi \, d\eta \Big|$$

$$\leqq \iint\limits_{K'_h} |\varphi(\xi, \eta) - \varphi(x, y)| \, \omega_h(x, y; \xi, \eta) \, d\xi \, d\eta$$

$$\leqq \max_{K'_h} \, |\varphi(\xi, \eta) - \varphi(x, y)| < \frac{\varepsilon}{(2 \operatorname{mes} G)^{1/p}} \, ,$$

wenn $h < h_0$ hinreichend klein ist und zwar infolge der gleichmäßigen Stetigkeit der Funktion $\varphi(x, y)$ im Gebiet $\overline{G''}$. Das ergibt

$$\iint\limits_{G'} |\varphi_h(x, y) - \varphi(x, y)|^p \, dx \, dy < \frac{\varepsilon^p}{2} \, . \tag{4}$$

Aus (3) und (4) folgt

$$\iint\limits_{G} |\varphi_h(x, y) - \varphi(x, y)| \, dx \, dy < \varepsilon^p \, .$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist damit für den Fall einer stetigen Funktion $\varphi(x, y)$ das Lemma bewiesen.

Wenn nun $\varphi(x, y)$ eine beliebige Funktion aus $L_p(G)$ ist, so suchen wir als erstes eine solche in G stetige Funktion ψ, daß

$$||\varphi - \psi||_{L_p} < \frac{\varepsilon}{3}$$

gilt. Dann ist

$$||\varphi - \varphi_h||_{L_p} \leqq ||\varphi - \psi||_{L_p} + ||\psi - \psi_h||_{L_p} + ||\psi_h - \varphi_h||_{L_p} \leqq ||\psi - \psi_n||_{L_p} + \frac{2\,\varepsilon}{3},$$

weil auf Grund des Lemmas 1 auch

$$||\varphi_h - \psi_h||_{L_p} < \frac{\varepsilon}{3}$$

ist.

Weiter können wir als Folge aus dem, was wir schon bewiesen haben, δ so klein wählen, daß bei $h < \delta$

$$||\psi - \psi_h|| < \frac{\varepsilon}{3}$$

wird. Dann gilt aber für ein solches h

$$||\varphi - \varphi_h||_{L_p} < \varepsilon\,.$$

Das Lemma ist damit vollständig bewiesen.

Wir zeigen nun die Äquivalenz der zwei Definitionen der verallgemeinerten Ableitung. $\varphi_0^{(l_1, l_2)}(x, y)$ sei die verallgemeinerte Ableitung von $\varphi_0(x, y)$ im Sinne der ersten Definition. Danach existiert eine Folge $\{\varphi_n(x, y)\}$ bis l-ter Ordnung stetig differenzierbarer Funktionen mit $||\varphi_n - \varphi||_{L_p} \to 0$ und

$$\left\|\frac{\partial^l \varphi_n}{\partial x^{l_1}\,\partial y^{l_2}} - \varphi_0^{(l_1\ l_2)}(x, y)\right\|_{L_p} \to 0$$

für $n \to \infty$.

Aus der Gleichung

$$\int_G\!\!\int \varphi_n(x, y)\,\frac{\partial^l \psi}{\partial x^{l_1}\,\partial y^{l_2}}\,dx\,dy = (-1)^l \int_G\!\!\int \frac{\partial^l \varphi_n}{\partial x^{l_1}\,\partial y^{l_2}}\,\psi(x, y)\,dx\,dy$$

in der $\psi(x, y)$ eine beliebige l-mal stetig differenzierbare, auf dem Rand von G verschwindende Funktion ist, erhalten wir durch Grenzübergang

$$\int_G\!\!\int \varphi_0(x, y)\,\frac{\partial^l \psi}{\partial x^{l_1}\,\partial y^{l_2}}\,dx\,dy = (-1)^l \int_G\!\!\int \varphi_0^{(l_1, l_2)}(x, y)\,\psi(x, y)\,dx\,dy,$$ [1]

und damit ist $\varphi_0^{(l_1, l_2)}(x, y)$ eine verallgemeinerte Ableitung von $\varphi_0(x, y)$ im Sinne der zweiten Definition.

Nun sei $\dfrac{\partial^l \varphi_0(x, y)}{\partial x^{l_1}\,\partial y^{l_2}} = \chi(x, y)$ im Sinne der zweiten Definition eine verallge-

---

[1]) Aus der Hölderschen Ungleichung folgt

$$\int_G\!\!\int \alpha_n(x, y)\,\beta(x, y)\,dx\,dy \to \int_G\!\!\int \alpha_0(x, y)\,\beta(x, y)\,dx\,dy\,,$$

sofern $||\alpha_n(x, y) - \alpha_0(x, y)|| \to 0$ strebt und $\beta(x, y)$ eine beliebige beschränkte meßbare Funktion (oder $\beta(x, y) \in L_q(G)$) ist.

meinerte Ableitung von $\varphi_0(x, y)$. Wir betrachten die Mittelfunktionen $\varphi_{0,h}(x, y)$. Es gilt

$$\frac{\partial^l \varphi_{0,h}(x, y)}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2}} = \int\limits_{K_h'}\int \frac{\partial^l \omega_h \varphi x, y; \xi, \eta)}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2}} \varphi_0(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

$$= (-1)^l \int\limits_{K_h'}\int \frac{\partial^l \omega_h(x, y; \xi, \eta)}{\partial \xi^{l_1} \partial \eta^{l_2}} \varphi_0(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta\,. \tag{5}$$

Wir greifen einen beliebigen Teilbereich G' des Gebiets G mit $\overline{G'} \subset G$ heraus. h sei so klein, daß der Kreis vom Radius h um jeden Punkt des Gebietes G' innerhalb G bleibt. Dann kann $\omega_h(x, y; \xi, \eta)$ als eine Funktion $\psi(x, y)$ angesehen werden, wie sie in der zweiten Definition der verallgemeinerten Ableitung auftritt, und Gleichung (5) kann für die Punkte $(x, y) \in G_h$ in die Form

$$\frac{\partial^l \varphi_{0,h}(x, y)}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2}} = \int\limits_{K_h'}\int \omega_h(x, y; \xi, \eta)\, \chi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \tag{6}$$

umgeschrieben werden.

Nach Lemma 2 folgt aus Gleichung (6)

$$\frac{\partial^l \varphi_{0,h}(x, y)}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2}} \to \chi(x, y)$$

für $h \to 0$ und für ein beliebiges, streng im Innern von G liegendes Teilgebiet G'. Die Übertragung dieser Gleichung auf das Gebiet G erfordert kompliziertere Überlegungen [33]. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann der Koordinatenursprung in das Innere von G verlegt werden. Wir bezeichnen mit G_k die Bereiche, die aus G mit Hilfe der Ähnlichkeitstransformationen mit den Koeffizienten

$$\frac{k}{k-1}, \quad k = 2, 3, \ldots,$$

in bezug auf den Ursprung entstehen.

Die Transformationsformeln der Koordinaten sind

$$x' = \frac{k}{k-1} x, \quad y' = \frac{k}{k-1} y,$$

und jeder Funktion $f(x, y) \in L_p(G)$ entspricht eine Funktion

$$f_k(x, y) = f\left(\frac{k-1}{k} x, \frac{k-1}{k} y\right) \in L_p(G_k)$$

und umgekehrt. Die Funktion $\varphi(x, y) \in L_p(G)$ besitze eine verallgemeinerte Ableitung l-ter Ordnung $\chi(x, y) \in L_p(G)$ im Sinne der zweiten Definition. Für eine l-mal stetig differenzierbare Funktion $\psi(x, y)$ gilt

$$\frac{\partial^l \psi}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2}} = \left(\frac{k}{k-1}\right)^l \frac{\partial^l \psi_k(x', y')}{\partial x'^{l_1} \partial y'^{l_2}}\,.$$

Aus der Gleichung

$$\iint_G \varphi(x, y) \frac{\partial^l \psi(x, y)}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2}} dx\, dy = (-1) \iint_G \chi(x, y)\, \psi(x, y)\, dx\, dy$$

erhalten wir durch Variablentransformation

$$\left(\frac{k}{k-1}\right)^l \iint_{G_k} \varphi_k(x', y') \frac{\partial^l \psi_k(x', y')}{\partial x'^{l_1} \partial y'^{l_2}} dx'\, dy' = (-1)^l \iint_{G_k} \chi_k(x', y')\, \psi_k(x', y')\, dx'\, dy'\,.$$

Daraus folgt: $\varphi_k(x, y)$ besitzt im Sinne der zweiten Definition die verallgemeinerte Ableitung $\left(\frac{k-1}{k}\right)^l \chi_k(x, y)$.

Wir zeigen: Bei $k \to \infty$ konvergieren die Funktionen $\varphi_k(x, y)$ in G im Mittel gegen $\varphi(x, y)$ und die Funktionen $\frac{\partial^l \varphi_k(x, y)}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2}}$ im Mittel gegen $\frac{\partial^l \varphi}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2}}$.

Die Gleichung

$$\iint_G |\varphi(x, y) - \varphi_k(x, y)|^p\, dx\, dy = \iint_G \left|\varphi(x, y) - \varphi\left(x - \frac{x}{k}, y - \frac{y}{k}\right)\right|^p dx\, dy$$

erweist sich als richtig, und die Tatsache, daß das Integral auf der rechten Seite der Gleichung gegen Null strebt, ist nichts anderes als die Stetigkeit im Mittel von $\varphi(x, y) \in L_p(G)$.

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
&\left(\iint_G \left|\frac{\partial^l \varphi(x, y)}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2}} - \frac{\partial^l \varphi_k(x, y)}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2}}\right|^p dx\, dy\right)^{1/p} \\
&\quad = \left(\iint_G \left|\chi(x, y) - \left(\frac{k-1}{k}\right)^l \chi_k(x, y)\right|^p dx\, dy\right)^{1/p} \\
&\quad \leqq \left[1 - \left(\frac{k-1}{k}\right)^l\right] \left(\iint_G \left|\chi\left(x - \frac{x}{k},\ y - \frac{y}{k}\right)\right|^p dx\, dy\right)^{1/p} \\
&\quad\quad + \left(\iint_G \left|\chi(x, y) - \chi\left(x - \frac{y}{k},\ y - \frac{y}{k}\right)\right|^p dx\, dy\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Der zweite Summand rechts strebt wiederum infolge der Stetigkeit im Mittel von $\chi(x, y)$ gegen Null.[1] Was den ersten Summanden betrifft, so strebt der Faktor $\left[1 - \left(\frac{k-1}{k}\right)^l\right]$ gegen Null, und die in ihm enthaltenen Integrale sind insgesamt beschränkt, da sie die Normen der Funktionen $\chi_k(x, y)$ darstellen, die eine im Mittel konvergente Folge bilden.

Da bei jedem festen k $G \subset G_k$ ist, gilt nach dem oben Gezeigten für $h \to 0$ in G

$$\varphi_{k,h}(x, y) \to \varphi_k(x, y), \quad \frac{\partial^l \varphi_{k,h}(x, y)}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2}} \to \frac{\partial^l \varphi_k(x, y)}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2}}\,.$$

---

[1]) S. Anhang I.

Andererseits wurde eben gezeigt, daß bei $k \to \infty$ in G

$$\varphi_k(x, y) \to \varphi(x, y), \quad \frac{\partial^l \varphi_k(x, y)}{\partial x^{l_1}\, \partial y^{l_2}} \to \chi(x, y)$$

gilt. Hieraus schließt man leicht auf die Existenz einer im Mittel im Gebiet G gegen $\varphi(x, y)$ konvergierenden Folge von l-mal stetig differenzierbaren Funktionen $\{\varphi_{k, h_k}(x, y)\}$, deren Ableitungen l-ter Ordnung gegen $\chi(x, y)$ konvergieren, d. h., $\chi(x, y)$ ist eine verallgemeinerte Ableitung im Sinne der ersten Definition.

Die zweite Definition der verallgemeinerten Ableitung führt zu folgendem:

a) Wenn

$$\psi(x, y) = \frac{\partial^l \varphi(x, y)}{\partial x^{l_1}\, \partial y^{l_2}}, \quad \chi(x, y) = \frac{\partial^k \psi(x, y)}{\partial x^{k_1}\, \partial y^{k_2}}$$

ist, so gilt

$$\chi(x, y) = \frac{\partial^{l+k} \varphi(x, y)}{\partial x^{l_1+k_1}\, \partial y^{l_2+k_2}},$$

b) die verallgemeinerte Ableitung hängt nicht von der Reihenfolge der Differentiation ab,

c) die verallgemeinerte Differentiation ist eine distributive Operation.

Man kann weiter zeigen, daß für die verallgemeinerten Ableitungen die Produktregel der Differentiation gültig bleibt.

Die Gleichungen von S. L. SOBOLEW. Die Existenz der verallgemeinerten Ableitung folgt nicht aus der Existenz der Ableitung fast überall im gewöhnlichen Sinne. Das zeigt folgendes Beispiel (S. L. SOBOLEW):

$\varphi(x)$ sei in dem Intervall $[0, 1]$ gegeben und besitze dort die verallgemeinerte Ableitung $\chi(x)$. Dann gilt für eine beliebige stetig differenzierbare Funktion $\psi(x)$, die einschließlich ihrer Ableitung in den Endpunkten des Intervalls verschwindet,

$$\int_a^b \varphi(x)\, \psi'(x)\, dx = -\int_a^b \chi(x)\, \psi(x)\, dx .$$

Es sei $\omega(x) = \int_a^x \chi(\xi)\, d\xi$. Offenbar gilt dann

$$-\int_a^b \chi(x)\, \psi(x)\, dx = \int_a^b \omega(x)\, \psi'(x)\, dx$$

und danach

$$\int_a^b [\varphi(x) - \omega(x)]\, \psi'(x)\, dx = 0 .$$

Da nun $\psi(x)$ eine beliebige, in den Endpunkten des Intervalls verschwindende stetig differenzierbare Funktion ist, folgt aus der letzten Gleichung

$$\varphi(x) = \omega(x) + c ,$$

und da $\omega(x)$ ein unbestimmtes Integral einer summierbaren Funktion ist, muß $\omega(x)$ absolut stetig sein. Um nun auf das verlangte Beispiel zu kommen, genügt

es, eine beliebige, nicht absolut stetige Funktion zu nehmen, die fast überall eine Ableitung besitzt.

Es ist leicht, ein Beispiel einer Funktion anzugeben, die eine verallgemeinerte Ableitung höherer Ordnung besitzt, für die jedoch keine verallgemeinerte Ableitung niedrigerer Ordnung existiert.

Es sei

$$F(x, y) = f(x) + f(y) .$$

$f(x)$ besitze keine verallgemeinerte Ableitung. Dann besitzt offenbar $F(x, y)$ keine verallgemeinerten Ableitungen erster Ordnung. Dennoch besitzt $F(x, y)$ eine verallgemeinerte Ableitung zweiter Ordnung. Tatsächlich gilt für eine beliebige Funktion $\psi(x, y)$ mit den erforderlichen Eigenschaften

$$\iint_G F(x, y) \frac{\partial^2\psi}{\partial x\, \partial y} dx\, dy = \iint_G f(x) \frac{\partial^2\psi}{\partial x\, \partial y} dx\, dy = + \iint_G f(y) \frac{\partial^2\psi}{\partial x\, \partial y} dx\, dy .$$

Es gilt aber

$$\iint_G f(x) \frac{\partial^2\psi}{\partial x\, \partial y} dx\, dy = \int_a^b f(x) \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial^2\psi}{\partial x\, \partial y} dy\, dx = \int_a^b f(x) \left[\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dx = 0 ,$$

weil $\psi_x(x_1, \varphi_1(x)) = \psi_x(x, \varphi_2(x)) = 0$ ist, wobei $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ die Ordinatengrenzen des Gebiets G darstellen. Analog ist

$$\iint_G f(y) \frac{\partial^2\psi}{\partial x\, \partial y} dx\, dy = 0$$

und deshalb

$$\iint_G F(x, y) \frac{\partial^2\psi}{\partial x\, \partial y} dx\, dy = 0 = \iint_G 0 \cdot \psi(x, y)\, dx\, dy ,$$

d. h., $\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}$ existiert und ist identisch Null.

Bedeutend tieferliegend ist folgende Tatsache: Wenn die Funktion $f(x, y) \in L_p(G)$ alle verallgemeinerten Ableitungen l-ter Ordnung besitzt, so existierten auch alle verallgemeinerten Ableitungen $(l-1)$-ter Ordnung. Der Beweis dieser Tatsache bedarf einiger vorbereitender Betrachtungen.

$u(x, y)$ und seine Ableitungen bis l-ter Ordnung einschließlich seien im Gebiet $\overline{G}$ stetig. Wir leiten die *Integralformel von* S. L. Sobolew her, die die Funktion $u(x, y)$ durch ihre Ableitungen l-ter Ordnung ausdrückt. Dazu betrachten wir in der Ebene zwei Punkte $P(x, y)$ und $Q(\xi, \eta)$ (Abb. 2). Wir bezeichnen mit r den Abstand zwischen diesen Punkten und mit θ den Winkel zwischen dem von P nach Q laufenden Radiusvektor und der positiven x-Achse. Wir finden dann

$$\xi = x + r \cos\theta , \qquad \eta = y + r \sin\theta .$$

Daher ist

$$u(\xi, \eta) = u\,(x + r \cos\theta, y + r \sin\theta) = v(x, y, r, \theta)$$

oder kürzer

$$u(Q) = v(P, r, \theta) .$$

Dann gilt

$$v(P, 0, \theta) = u(P) .$$

Wir wählen einen inneren Punkt von G als Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems. K_R sei ein Kreis um diesen Punkt, der ganz im Gebiet G liegt, und R der Radius dieses Kreises. Wir bilden die Funktion

$$\omega_R(Q) = \begin{cases} c\, e^{-\frac{R^2}{R^2-r^2}}, & \text{wenn} \quad r < R \\ 0, & \text{wenn} \quad r \geqq R \end{cases} \qquad (r^2 = \xi^2 + \eta^2) .$$

Die Konstante c wird so gewählt, daß

$$\int\limits_{K_R}\int \omega_R(Q)\, d\xi\, d\eta = 1$$

ist. $w_R(Q)$ ist unendlich oft differenzierbar. Wir wenden nun die partielle Integration auf das Integral

$$\int\limits_{K_R}\int u(Q)\, \omega_R(Q)\, dQ$$

an. $P(x, y)$ sei ein anderer Punkt des Gebietes G. Wir ersetzen im Integral $u(Q)$ durch $v(P, r, \theta)$, $\omega_R(Q)$ durch $\chi_R(P, r, \theta)$ und gehen zu Polarkoordinaten

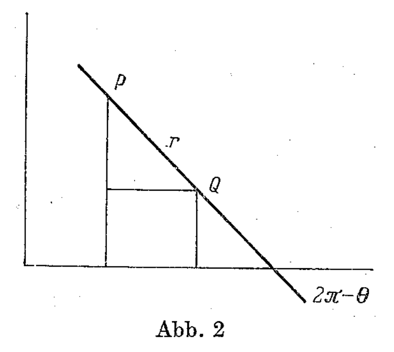


Abb. 2

über, deren Zentrum in P liegt und deren Polachse von der x-Achse gebildet wird. So erhalten wir

$$\int\limits_{K_R}\int \omega_R(Q)\, u(Q)\, dQ = \int\limits_{G}\int \omega_R(Q)\, u(Q)\, dQ = \int\limits_{G}\int \chi_R(P, r, \theta)\, v(P, r, \theta)\, d\xi\, d\eta$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^{\infty} v(P, r, \theta)\, \chi_R(P, r, \theta)\, r\, dr .$$

Faktisch sind alle auftretenden Integrale eigentlich. Wir bezeichnen

$$-\int\limits_r^{\infty} \varrho\, \chi_R(P, \varrho, \theta)\, d\varrho$$

mit $\varkappa(r)$. $\varkappa(r)$ ist die Stammfunktion von $r\,\chi_R(P, r, \theta)$, und durch Ausführung der partiellen Integration für das innere Integral erhalten wir

$$\iint\limits_{K_R} \omega_R(Q)\, u(Q)\, dQ = \int\limits_0^{2\pi} \left\{ v(P, r, \theta)\, \varkappa(r)\Big|_0^\infty - \int\limits_0^\infty \frac{\partial v(P, r, \theta)}{\partial r}\, \varkappa(r)\, dr \right\} d\theta$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left\{ v(P, 0, \theta) \int\limits_0^\infty \varrho\, \chi_p(P, \varrho, \theta)\, d\varrho \right\} d\theta$$

$$+ \int\limits_0^{2\pi} \left\{ \int\limits_0^\infty \frac{\partial v(P, r, \theta)}{\partial r} \left[\int\limits_r^\infty \varrho\, \chi_R(P, \varrho, \theta)\, d\varrho \right] dr \right\} d\theta .$$

Nun ist $v(P, 0, \theta) = u(P)$,

$$\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^\infty \varrho\, \chi_R(P, \varrho, \theta)\, d\varrho\, d\theta = \int\limits_G \int \omega_R(Q)\, dQ = 1 ,$$

und wir finden

$$u(P) = \iint\limits_G u(Q)\, \omega_R(Q)\, dQ - \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^\infty \frac{\partial v(P, r, \theta)}{\partial r} \frac{1}{r} \left\{ \int\limits_r^\infty \varrho\, \chi_R(P, \varrho, \theta)\, d\varrho \right\} r\, dr\, d\theta$$

oder

$$u(P) = \iint\limits_G u(Q)\, \omega_R(Q)\, dQ - \iint\limits_G \frac{\partial u(Q)}{\partial r} \frac{1}{r} \left[\int\limits_r^\infty \varrho\, \chi_R(P, \varrho, \theta)\, d\varrho \right] dQ .$$

Zur Abkürzung setzen wir

$$-\int\limits_r^\infty \varrho\, \chi_G(P, \varrho, \theta)\, d\varrho = C(P, Q)$$

und bekommen

$$u(P) = \iint\limits_G u(Q)\, \omega_R(Q)\, dQ + \iint\limits_G \frac{\partial u}{\partial r} \frac{1}{r} C(P, Q)\, dQ .$$

Die Funktion $C(P, Q)$ ist offensichtlich für $P, Q \in G$ beschränkt, und man sieht leicht, daß sie bei $P \neq Q$ stetig ist, aber bei $P \to Q$ verschiedene Grenzwerte in Abhängigkeit vom Winkel θ annimmt.

Wegen

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(r, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(r, y)$$

nimmt die vorhergehende Gleichung die Gestalt

$$u(P) = \iint\limits_G u(Q)\, \omega_R(Q)\, dQ + \iint\limits_G \left\{ A_{10}^{(1)}(P, Q) \frac{\partial u}{\partial x} + A_{01}^{(1)}(P, Q) \frac{\partial u}{\partial y} \right\} dQ \qquad (7)$$

an. Hierbei hat $A^{(1)}_{i_1 i_2}(P, Q)$, $i_1, i_2 = 0, 1$, die Form

$$A^{(1)}_{i_1 i_2}(P, Q) = \frac{1}{r} B^{(1)}_{i_1 i_2}(P, Q),$$

wobei die $B^{(1)}_{i_1 i_2}(P, Q)$ beschränkte Funktionen sind.

Die hergeleitete Formel wenden wir auf die Funktion $u(P)$ anstelle auf deren partiellen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ an. Wir erhalten

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \iint_G \frac{\partial u}{\partial x} \omega_R(Q)\, dQ + \iint_G \left\{A^{(1)}_{10}(P, Q) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A^{(1)}_{01}(P, Q) \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}\right\} dQ, \tag{8}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \iint_G \frac{\partial u}{\partial y} \omega_R(Q)\, dQ + \iint_G \left\{A^{(1)}_{10}(P, Q) \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + A^{(1)}_{01}(P, Q) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right\} dQ. \tag{9}$$

Setzen wir die Ausdrücke (8) und (9) für die Ableitungen in Gleichung (7) ein, vertauschen wir die Reihenfolge der Integration und führen wir die Bezeichnungen

$$\iint_G A^{(1)}_{l_1 l_2}(P, Q)\, dQ = C^{(1)}_{l_1 l_2}(P), \tag{10}$$

$$\iint_G A^{(1)}_{l_1 l_2}(P, S)\, A^{(1)}_{l_1' l_2'}(S, Q)\, dS = A^{(2)}_{l_1 + l_1',\, l_2 + l_2'}(P, Q) \tag{11}$$

ein, so erhalten wir

$$u(P) = \iint_G u(Q)\, \omega_R(Q)\, dQ + \sum_{l_1 + l_2 = 1} C^{(1)}_{l_1 l_2}(P) \iint_G \frac{\partial u}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2}} \omega_R(Q)\, dQ$$
$$+ \sum_{l_1 + l_2 = 2} \iint_G A^{(2)}_{l_1 l_2}(P, Q) \frac{\partial^2 u}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2}}\, dQ.$$

(Hier kennzeichnet $\sum\limits_{l_1 + l_2 = k}$ die Summe über alle Indexwerte l_1 und l_2 von 0 bis k unter der Bedingung $l_1 + l_2 = k$.)

In der Weise fortfahrend gelangen wir zu der Formel

$$u(P) = \iint_G u(Q)\, \omega_R(Q)\, dQ$$
$$+ \sum_{l_1 + l_2 = 1} C^{(1)}_{l_1 l_2}(P) \iint_G \frac{\partial u}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2}} \omega_R(Q)\, dQ$$
$$+ \sum_{l_1 + l_2 = 2} C^{(2)}_{l_1 l_2}(P) \iint_G \frac{\partial^2 u}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2}} \omega_R(Q)\, dQ$$
$$+ \cdots + \sum_{l_1 + l_2 = l-1} C^{(l-1)}_{l_1 l_2}(P) \iint_G \frac{\partial^{l-1} u}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2}} \omega_R(Q)\, dQ$$
$$+ \sum_{l_1 + l_2 = l} \iint_G A^{(l)}_{l_1 l_2}(P, Q) \frac{\partial^l u}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2}}\, dQ$$

und zu Ausdrücken für $C^{(k)}_{l_1 l_2}(P)$ und $A^{(k)}_{l_1 l_2}(P, Q)$, die analog zu (10) und (11) sind.

Aus den Gleichungen (10) und (11) kann man die Ungleichung

$$|A^{(2)}_{l_1 l_2}(P, Q)| \leqq \alpha \ln r + \beta$$

für $A^{(2)}_{l_1 l_2}(P, Q)$ herleiten. Dabei sind α und β Konstanten, und die Funktionen $A^{(k)}_{l_1 l_2}(P, Q)$ sind für $k > 2$ beschränkt sowie bei $P \neq Q$ stetig (s. z. B. [22]).

Die Funktionen $C^{(k)}_{l_1 l_2}(P)$ sind im Gebiet $\bar{G}$ stetig.

Da die Funktion $\omega_R(Q)$ unendlich oft stetig differenzierbar ist und auf dem Rand von G verschwindet, entsteht durch Anwendung der Greenschen Formel

$$\iint_G \frac{\partial^l u}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2}} \omega_R(Q)\, dQ = \iint_G u(Q) \frac{\partial^l \omega_R}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2}}\, dQ\,,$$

und wir gelangen zum endgültigen Ausdruck

$$\begin{aligned} u(P) = & \iint_G u(Q)\, \omega_R(Q)\, dQ \\ & + \sum_{l_1+l_2=1} C^{(1)}_{l_1 l_2}(P) \iint_G u(Q) \frac{\partial \omega_R}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2}}\, dQ \\ & + \sum_{l_1+l_2=2} C^{(2)}_{l_1 l_2}(P) \iint_G u(Q) \frac{\partial^2 \omega_R}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2}}\, dQ \\ & + \cdots + \sum_{l_1+l_2=l-1} C^{(l-1)}_{l_1 l_2}(P) \iint_G u(Q) \frac{\partial^{l-1} \omega_R}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2}}\, dQ \\ & + \sum_{l_1+l_2=l} \iint_G A^{(l)}_{l_1 l_2}(P, Q) \frac{\partial^l u}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2}}\, dQ\,. \end{aligned}$$

In einer etwas anderen Form und für einen allgemeineren Fall wurde diese Gleichung von S. L. Sobolew aufgestellt [34].

Um diese Gleichung auf Funktionen auszudehnen, die keine gewöhnlichen, wohl aber verallgemeinerte Ableitungen besitzen, benötigen wir das folgende

Lemma 3. *Sei $A(P, Q)$ eine Funktion der Gestalt*

$$A(P, Q) = \frac{B(P, Q)}{r}$$

oder

$$A(P, Q) = B(P, Q)\, (\alpha \ln r + \beta)\,,$$

wobei $B(P, Q)$ eine beschränkte meßbare Funktion ist. Es sei $v(P) = \iint_G A(P, Q) \times u(Q)\, dQ$. Dann folgt aus der Konvergenz im Mittel von

$$||u_n(P) - u(P)||_{L_p} \to 0$$

die Konvergenz im Mittel von

$$||v_n(P) - v(P)||_{L_p} \to 0\,.$$

Für den ersten Fall gilt

$$|v_n(P) - v(P)| \leqq M \iint_G |u_n(Q) - u(Q)|\, r^{-1}\, dQ$$
$$= M \iint_G |u_n(Q) - u(Q)|\, r^{-1/p}\, r^{-1/q}\, dQ$$
$$\leqq M\Big(\iint_G |u_n(Q) - u(Q)|^p\, r^{-1}\, dQ\Big)^{1/p} \Big(\iint_G r^{-1}\, dQ\Big)^{1/q}.$$

Hier ist

$$M = \sup_G |B(P, Q)|\,.$$

Das Einführen von Polarkoordinaten mit dem Pol in P bringt uns

$$\Big(\iint_G r^{-1}\, dQ\Big)^{1/q} \leqq (2\pi d)^{1/q}\,;$$

d ist hierbei der Durchmesser des Gebiets G. Also ist

$$|v_n(P) - v(P)| \leqq M\,(2\pi d)^{1/q} \Big(\iint_G |u_n(Q) - u(Q)|^p\, r^{-1}\, dQ\Big)^{1/p}.$$

Daraus folgt

$$\iint_G |v_n(P) - v(P)|^p\, dP \leqq M\,(2\pi d)^{p/q} \iint_G \Big\{\iint_G |u_n(Q) - u(Q)|^p\, r^{-1}\, dQ\Big\}\, dP$$
$$= M\,(2\pi d)^{p/q} \iint_G \Big\{|u_n(Q) - u(Q)|^p \cdot \iint_G r^{-1}\, dP\Big\}\, dQ\,.$$

Wiederum wird, wenn man Polarkoordinaten einführt, jetzt aber mit dem Pol in Q:

$$\iint_G r^{-1}\, dP \leqq 2\pi d\,.$$

Also ist

$$\iint_G |v_n(P) - v(P)|^p\, dP \leqq M\,(2\pi d)^{\frac{p}{q}+1} \iint_G |u_n(Q) - u(Q)|^p\, dQ\,, \tag{12}$$

und das Lemma ist bewiesen. Analog verläuft der Beweis für die Funktion $A(P, Q)$ der zweiten Form.

Jetzt besitze die Funktion $\varphi(P)$ alle verallgemeinerten Ableitungen l-ter Ordnung. Es gibt eine Folge l-mal stetig differenzierbarer Funktionen $\{\varphi_m(P)\}$ derart, daß $\varphi_m(P)$ im Mittel gegen $\varphi(P)$ und $\frac{\partial^l \varphi_m}{\partial x^{l_1}\,\partial y^{l_2}}$ im Mittel gegen $\frac{\partial^l \varphi}{\partial x^{l_1}\,\partial y^{l_2}}$ für alle $l_1, l_2 = 0, 1, \ldots, l$, $l_1 + l_2 = l$, konvergiert. Nach der Gleichung von SOBOLEW ist

$$\varphi_m(P) = \sum_{k=0}^{l-1} \sum_{l_1+l_2=k} C^{(k)}_{l_1 l_2}(P) \iint_G \varphi_m(Q)\, \frac{\partial^k \omega_R}{\partial x^{l_1}\,\partial y^{l_2}}\, dQ$$
$$+ \sum_{l_1+l_2=l} \iint_G A^{(l)}_{l_1 l_2}(P, Q)\, \frac{\partial^l \varphi_m}{\partial x^{l_1}\,\partial y^{l_2}}\, dQ\,.$$

Auf Grund des Lemmas können wir unter den hier auftretenden Integralzeichen den Grenzübergang ausführen und bekommen

$$\varphi(x, y) = \sum_{k=0}^{l-1} \sum_{l_1+l_2=k} C_{l_1 l_2}^{(k)}(P) \iint_G \varphi(Q) \frac{\partial^k \omega_R}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2}} dQ$$

$$+ \sum_{l_1+l_2=l} \iint_G A_{l_1 l_2}^{(l)}(P, Q) \frac{\partial^l \varphi}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2}} dQ . \tag{13}$$

Damit ist die Gleichung von SOBOLEW auf Funktionen aus dem Raum $W_p^{(l)}$ ausgedehnt worden.

Der Einbettungssatz. (Satz von S. L. Sobolew.) *Der Raum $W_p^{(k)}$ ist bei beliebigem $k < l$ eingebettet in dem Raum $W_p^{(l)}$, d. h., eine beliebige Funktion $\varphi(x, y)$, die alle verallgemeinerten Ableitungen l-ter Ordnung besitzt, hat bei $k < l$ auch alle verallgemeinerten Ableitungen k-ter Ordnung, und es ist*

$$||\varphi||_{W_p^{(k)}} \leqq C_k ||\varphi||_{W_p^{(l)}} .$$

Sei $\varphi(x, y) \in W_p^{(l)}$ und $\{\varphi_n(x, y)\}$ eine Folge l-mal stetig differenzierbarer Funktionen derart, daß

$$\varphi_n(x, y) \to \varphi(x, y) , \quad \frac{\partial^l \varphi_n}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2}} \to \varphi^{(l_1, l_2)}(x, y)$$

in bezug auf die Metrik des Raumes $L_p(G)$ vorliegt. Wir wenden auf $\frac{\partial^{l-1} \varphi_n}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2}}$ die Integralformel von SOBOLEW an:

$$\frac{\partial^{l-1} \varphi_n}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2}} = \iint_G \omega_R(Q) \frac{\partial^{l-1} \varphi_n}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2}} dQ + \sum_{l_1+l_2=1} \iint_G A_{l_1 l_2}^{(1)}(P, Q) \frac{\partial^l \varphi_n}{\partial x^{k_1+l_1} \partial y^{k_2+l_2}} dQ .$$

Wir formen das erste Integral nach der GREENschen Formel um:

$$\frac{\partial^{l-1} \varphi_n}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2}} = (-1)^{l-1} \iint_G \varphi_n(Q) \frac{\partial^{l-1} \omega_R}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2}} dQ + \sum_{l_1+l_2=1} \iint_G A_{l_1 l_2}^{(1)}(P, Q) \frac{\partial^l \varphi_n}{\partial x^{k_1+l_1} \partial y^{k_2+l_2}} dQ. \tag{14}$$

Vermöge Lemma 2 strebt die rechte Seite der Gleichung (14) gegen einen Grenzwert

$$\chi(P) = \iint_G \varphi(Q) \frac{\partial^{l-1} \omega_R}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2}} dQ + \sum_{l_1+l_2=1} \iint_G A_{l_1 l_2}^{(1)}(P, Q) \varphi^{(k_1+l_1, k_2+l_2)}(Q) \, dQ . \tag{15}$$

Das aber bedeutet

$$\varphi_n(x, y) \xrightarrow{L_p(G)} \varphi(x, y)$$

und

$$\frac{\partial^{(l-1)} \varphi_n}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2}} \xrightarrow{L_p(G)} \chi(x, y) ,$$

d. h., $\chi(x, y)$ ist eine verallgemeinerte Ableitung $(l-1)$-ter Ordnung der Funktion $\varphi(x, y)$. Die Existenz der verallgemeinerten Ableitungen $(l-1)$-ter Ordnung ist damit bewiesen.

Aus der Existenz der verallgemeinerten Ableitungen $(l-1)$-ter Ordnung folgt seinerseits die Existenz der verallgemeinerten Ableitungen $(l-2)$-ter Ordnung usw. Der erste Teil des Satzes ist hiermit bewiesen.

Wir ziehen Gleichung (15) heran, die die $(l-1)$-te verallgemeinerte Ableitung durch die l-ten verallgemeinerten Ableitungen und die Funktion selbst ausdrückt:

$$\frac{\partial^{l-1}\varphi}{\partial x^{k_1}\,\partial y^{k_2}} = (-1)^{l-1}\iint\limits_G \varphi(Q)\,\frac{\partial^{l-1}\omega_R}{\partial x^{k_1}\,\partial y^{k_2}}\,dQ + \sum_{l_1+l_2=1}{}' \iint\limits_G A^{(1)}_{l_1 l_2}(P, Q)\,\frac{\partial^l\varphi}{\partial x^{k_1+l_1}\,\partial y^{k_2+l_2}}\,dQ\,.$$

Benutzen wir noch die offensichtlich richtige Ungleichung

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_\nu)^p \leqq \nu^p\,(a_1^p + a_2^p + \cdots + a_\nu^p)\,, \qquad a_i > 0\,,$$

so erhalten wir

$$\left|\frac{\partial^{l-1}\varphi}{\partial x^{k_1}\,\partial y^{k_2}}\right|^p \leqq 3^p\left\{\left(\iint\limits_G |\varphi(Q)|\left|\frac{\partial^{l-1}\omega}{\partial x^{k_1}\,\partial y^{k_2}}\right|dQ\right)^p + \sum_{l_1+l_2=1}\left(\iint\limits_G |A^{(1)}_{l_1 l_2}(P, Q)|\left|\frac{\partial^l\varphi}{\partial x^{k_1+l_1}\,\partial y^{k_2+l_2}}\right|dQ\right)^p\right\}.$$

Vermittels der HÖLDERschen Ungleichung erkennen wir

$$\left(\iint\limits_G |\varphi(Q)|\left|\frac{\partial^{l-1}\omega_R}{\partial x^{k_1}\,\partial y^{k_2}}\right|dQ\right)^p \leqq a\iint\limits_G |\varphi(Q)|^p\,dQ\,,$$

wobei a eine Konstante ist. Die nochmalige Anwendung der Überlegungen des vorigen Lemmas ergibt die Abschätzungen

$$\iint\limits_G\left(\iint\limits_G |A^{(1)}_{l_1 l_2}(P, Q)|\left|\frac{\partial^l\varphi}{\partial x^{k_1+l_1}\partial y^{k_2+l_2}}\right|dQ\right)^p dP \leqq a^{(1)}_{l_1 l_2}\iint\limits_G\left|\frac{\partial^l\varphi}{\partial x^{k_1+l_1}\,\partial y^{k_2+l_2}}\right|^p dQ;$$

die $a^{(1)}_{l_1 l_2}$ sind ebenfalls Konstanten.

Diese Ungleichungen führen uns zu

$$\iint\limits_G\left|\frac{\partial^{l-1}\varphi}{\partial x^{k_1}\,\partial y^{k_2}}\right|^p dP \leqq b^{(l-1)}_{k_1 k_2}\left\{\iint\limits_G |\varphi(Q)|^p\,dQ + \sum_{l_1+l_2=1}\iint\limits_G\left|\frac{\partial^l\varphi}{\partial x^{k_1+l_1}\,\partial y^{k_2+l_2}}\right|^p dQ\right\}$$

$$\leqq b^{(l-1)}_{k_1 k_2}\left\{\iint\limits_G |\varphi(Q)|^p\,dQ + \sum_{l_1+l_2=l}\iint\limits_G\left|\frac{\partial^l\varphi}{\partial x^{l_1}\,\partial y^{l_2}}\right|^p dQ\right\}.$$

Diese Ungleichung, über alle Ableitungen $(l - 1)$-ter Ordnung summiert, liefert bei passender Wahl der Konstante

$$\iint_G |\varphi(Q)|^p \, dQ + \sum_{k_1+k_2=l-1} \iint_G \left|\frac{\partial^{l-1}\varphi}{\partial x^{k_1}\,\partial y^{k_2}}\right|^p dQ$$
$$\leq A^p \left\{\iint_G |\varphi(Q)|^p \, dQ + \sum_{l_1+l_2=l} \iint_G \left|\frac{\partial^{l}\varphi}{\partial x^{l_1}\,\partial y^{l_2}}\right|^p dQ\right\}.$$

Hieraus ergibt sich die gewünschte Ungleichung

$$||\varphi||_{W_p^{(l-1)}} \leq A \, ||\varphi||_{W_p^{(l)}}.$$

Der Satz ist damit vollständig bewiesen.

Eine vollständigere Formulierung des Einbettungssatzes von SOBOLEW findet man in [34].

KAPITEL III

LINEARE OPERATOREN

Eine der wichtigsten und am besten untersuchten Klassen von Operatoren ist die Klasse der in linearen Räumen definierten linearen Operatoren.

§ 1. Lineare Operatoren

Definition. Es seien zwei lineare Räume E_x und E_y gegeben, die beide reell oder beide komplex sind. Ferner sei ein Operator $y = A(x)$ gegeben, der auf E_x definiert ist und dessen Wertebereich in E_y liegt. Wir schreiben auch $y = A\,x$. Der Operator $y = A\,x$ heißt *linear*, wenn gilt:

1. A ist additiv, d. h., für alle x_1 und x_2 aus E_x ist

$$A\,(x_1 + x_2) = A\,x_1 + A\,x_2; \tag{1}$$

2. der Operator A ist homogen, d. h., für jedes $x \in E_x$ und eine beliebige reelle bzw. komplexe Zahl λ (je nachdem, ob E_x reell bzw. komplex ist) ist

$$A\,(\lambda\,x) = \lambda\,A\,x\,.$$

Im folgenden bezeichnen wir mit $(E_x \to E_y)$ die Menge aller linearen stetigen Operatoren, die E_x in E_y abbilden.

Offenbar bedeutet im Falle eines metrischen Raumes die Stetigkeit von A, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein solches $\delta > 0$ gibt, daß die Bilder aller Elemente der Kugel $S(x, \delta)$ in $S(A\,x, \varepsilon)$ liegen.

Beispiele. 1. Wir betrachten eine quadratische Matrix n-ter Ordnung $(a_{ik})_{i,k=1,\ldots,n}$. Die Gleichungen

$$\eta_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,\xi_k\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,,$$

definieren offenbar einen Operator A, der ein Element $x = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ des n-dimensionalen euklidischen Raumes E_n in ein Element $y = \{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$ desselben Raumes überführt. A ist ein linearer stetiger Operator.

Die Additivität von A folgt aus der Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(\xi_k^{(1)} + \xi_k^{(2)}\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,\xi_k^{(1)} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,\xi_k^{(2)}\,, \quad i = 1, \ldots, n\,,$$

die zu

$$A\,(x_1 + x_2) = A\,x_1 + A\,x_2$$

äquivalent ist. Die Stetigkeit folgt aus

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\eta_i^{(m)}-\eta_i\right)} \leqq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2}\;\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(\xi_k^{(m)}-\xi_k\right)^2},$$

was man mit Hilfe der SCHWARZschen Ungleichung erhält, wobei

$$x_m = \left\{\xi_k^{(m)}\right\}, \qquad y_m = A\,x_m = \left\{\eta_i^{(m)}\right\}, \qquad x_m \to x,$$

vorausgesetzt wird.

2. Wir setzen

$$y(s) = \int_0^1 K(s, t)\, x(t)\, dt\,.$$

Dabei ist $K(s, t)$ eine im Quadrat $0 \leqq s \leqq 1$, $0 \leqq t \leqq 1$ stetige Funktion. Ist $x(t) \in C\,[0, 1]$, so ist offenbar auch $y(s) \in C\,[0, 1]$. Folglich bildet die Operation $y = A\,x$ den Raum $C\,[0, 1]$ in sich ab. Wie man leicht sieht, ist A ein linearer stetiger Operator, denn es gilt

α)
$$\begin{aligned} A\,(x_1 + x_2) &= \int_0^1 K(s, t)\,[x_1(t) + x_2(t)]\,dt \\ &= \int_0^1 K(s, t)\, x_1(t)\, dt + \int_0^1 K(s, t)\, x_2(t)\, dt = A\,x_1 + A\,x_2\,, \end{aligned}$$

und die Additivität ist erfüllt.

β) Die Homogenität von A ist evident.

γ) $\{x_n(t)\}$ möge im Sinne der Konvergenz in $C\,[0, 1]$, d. h. gleichmäßig auf $[0, 1]$, gegen $x(t)$ konvergieren. Da man im Falle der gleichmäßigen Konvergenz unter dem Integralzeichen zur Grenze übergehen kann, ist

$$\lim_n \int_0^1 K(s, t)\, x_n(t)\, dt = \int_0^1 K(s, t)\, x(t)\, dt\,,$$

d. h. $\lim_n A\,x_n = A\,x$, und die Stetigkeit des Operators A ist bewiesen.

3. E sei die Menge der Funktionen, die auf einer geschlossenen ebenen Kurve Γ mit stetiger Krümmung definiert und stetig sind. Die Metrik sei durch die Gleichung $\varrho(x, y) = \max_{\Gamma} |x(t) - y(t)|$ gegeben. Es sei ferner E_1 ein Raum von Funktionen zweier Veränderlicher, die auf dem durch die Kurve Γ begrenzten Gebiet G definiert und stetig sind. Hier sei der Abstand durch die Gleichung $\varrho(u, v) = \max_{(\xi, \eta) \in G} |u(\xi, \eta) - v(\xi, \eta)|$ definiert. Jeder Funktion $x(t) \in E$ ordnen wir diejenige Funktion $u(\xi, \eta) \in E_1$ zu, die Lösung des DIRICHLETschen Problems für das Gebiet G ist bei der Randbedingung $x(t)$. Bekanntlich ist diese Aufgabe unter den gemachten Voraussetzungen eindeutig lösbar. Diese Zuordnung definiert eine gewisse Operation $u = A\,x$. Auf Grund der bekannten Eigenschaften harmonischer Funktionen ist A ein auf E definierter linearer stetiger Operator mit einem in E_1 gelegenen Wertebereich.

4. Es sei $E = C\,[0, 1]$. Wir betrachten in diesem Raum den durch

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)\, d\tau$$

definierten Operator A. Offenbar ist A ein linearer Operator, der auf ganz E erklärt ist. Ferner sei durch

$$y(t) = \frac{d}{dt}\, x(t)$$

auf E ein anderer Operator B gegeben. B ist nicht für alle $x(t) \in C[0, 1]$ definiert, und wenn $B x$ existiert, so ist nicht immer $y(t) \in C[0, 1]$. Wenn man jedoch als Definitionsgebiet von B die lineare Mannigfaltigkeit aller Funktionen verwendet, die stetige Ableitungen besitzen (diese Funktionen liegen überall dicht in $C[0, 1]$), so ist der Wertebereich von B ebenfalls in $C[0, 1]$ enthalten.

Der Operator B ist offenbar additiv und homogen. Er ist aber nicht stetig, da die Ableitung eines Grenzelementes einer gleichmäßig konvergenten Folge von Funktionen nicht gleich dem Limes der Ableitungen dieser Funktionen zu sein braucht, selbst wenn alle diese Ableitungen existieren und stetig sind.

Einfachste Eigenschaften linearer Operatoren. A sei ein linearer stetiger Operator. Wir setzen $x = \xi + \zeta$, dann ist $\zeta = x - \xi$. Man erhält $A x = A \xi + A \zeta = A \xi + A (x - \xi)$, und daraus folgt

$$A (x - \xi) = A x - A \xi . \tag{2}$$

Setzt man in (2) $x = \xi$, so ergibt sich

$$A(0) = A x - A x = 0 .$$

Setzt man in (2) $x = 0$, so erhält man

$$A(-\xi) = - A \xi .$$

Satz 1. *Es sei A ein additiver, auf einem reellen linearen Raum E_x definierter Operator, dessen Wertebereich in einem reellen linearen Raum E_y gelegen ist. Ist A in einem Punkt $x_0 \in E_x$ stetig, so ist A auf dem ganzen Raum E_x stetig.*

Es sei x ein beliebiger Punkt aus E_x, und es konvergiere $x_n \to x$. Dann konvergiert $x_n - x + x_0 \to x_0$, und da A im Punkt x_0 stetig ist, gilt

$$\lim_n A (x_n - x + x_0) = A x_0 .$$

Es ist aber

$$A (x_n - x + x_0) = A x_n - A x + A x_0$$

wegen der Additivität von A. Daher gilt

$$\lim_n A x_n - A x + A x_0 = A x_0 ,$$

und daraus folgt

$$\lim_n A x_n = A x .$$

Satz 2. *Ein auf einem reellen Raum E_x definierter additiver stetiger Operator A ist homogen.*

Es sei zuerst $t = n$ eine natürliche Zahl. Dann ist

$$A (n x) = A (x + x + \cdots + x) = A x + A x + \cdots + A x = n A x .$$

Ist $t = m$ eine negative ganze Zahl, dann gilt

$$A (m x) = - A (- m x) = - (- m) A x = m A x .$$

Wenn $t = \frac{m}{n}$ eine rationale Zahl ist, so erhalten wir

$$A \left(\frac{m}{n} x\right) = m A \left(\frac{1}{n} x\right).$$

Wir setzen $\frac{1}{n}x = \xi$. Dann ist $x = n\,\xi$ und

$$A\,x = A\,(n\,\xi) = n\,A\,\xi = n\,A\left(\frac{1}{n}x\right),$$

daraus folgt $A\left(\frac{1}{n}x\right) = \frac{1}{n}A\,x$, also gilt

$$A\left(\frac{m}{n}x\right) = m\,A\left(\frac{1}{n}x\right) = \frac{m}{n}A\,x\,.$$

Nun sei schließlich t eine beliebige reelle Zahl. Es braucht nur der Fall eines irrationalen t betrachtet zu werden. Es gibt eine Folge rationaler Zahlen $\{r_n\}$, für die $\lim\limits_n r_n = t$ ist. Folglich ist $\lim\limits_n r_n\,x = t\,x$, und da A stetig war, gilt

$$A\,(t\,x) = A\,(\lim_n r_n\,x) = \lim_n A\,(r_n\,x) = \lim_n r_n\,A\,x = t\,A\,x\,.$$

Der Raum der Operatoren. In der Menge der linearen stetigen Operatoren, die auf einem linearen Raum E_x definiert sind und deren Wertebereich in einem linearen Raum E_y gelegen ist, kann man algebraische Operationen einführen. A und B seien solche Operatoren. Wir definieren die Addition durch

$$(A + B)\,x = A\,x + B\,x$$

und die Multiplikation mit einer Zahl durch

$$(\lambda\,A)\,x = \lambda\,A\,x\,.$$

Die betrachtete Menge von linearen Operatoren ist bei dieser Definition ein linearer Raum, denn es sind alle erforderlichen Axiome erfüllt. Das Nullelement dieses Raumes ist derjenige Operator 0, für den bei beliebigem $x \in E$ gilt: $0\,x = 0$. Wir sagen, daß eine Folge A_n von Operatoren gegen den Operator A konvergiert, wenn für jedes $x \in E_x$ gilt

$$\lim_n A_n\,x = A\,x\,.$$

Wir schreiben dafür $A_n \to A$. Den Raum der Operatoren werden wir später unter ergänzenden Voraussetzungen über E_x und E_y noch eingehender behandeln.

Der Ring der linearen stetigen Operatoren. Wir betrachten jetzt zu einem linearen Raum E die Gesamtheit $(E \to E)$ aller linearen stetigen Operatoren, die E in sich abbilden. Diese Operatoren bilden, wie oben gezeigt, einen linearen Raum. Wir definieren das Produkt zweier linearer Operatoren A und B aus $(E \to E)$ durch

$$(A\,B)\,x = A\,(B\,x)\,.$$

Wie man leicht sieht, ist dies wiederum ein linearer stetiger Operator. Durch Induktion definiert man das Produkt endlich vieler linearer Operatoren. Speziell schreibt man

$$A\,A = A^2,\quad A^2\,A = A^3,\;\ldots\;.$$

Man erkennt leicht, daß $(A\,B)C = A\,(B\,C)$, $(A + B)\,C = A\,C + B\,C$ und auch $C\,(A + B) = C\,A + C\,B$ gilt. Ferner existiert ein durch $I\,x = x$ für jedes x definierter Einheitsoperator I. Für alle Operatoren A gilt $A\,I = I\,A = A$.

Also bildet die Menge $(E \to E)$ einen Ring mit Einselement, der nicht kommutativ ist, da im allgemeinen $A\,B \neq B\,A$ ist.

Beispiel. Es sei $E = C\,[0, 1]$. Wir betrachten die Operatoren

$$y(s) = \int_0^1 s\,t\,x(t)\,dt = A\,x \qquad \text{und} \qquad y(s) = s\,x(s) = B\,x\,.$$

Dann gilt

$$A\,B\,x = \int_0^1 s\,t\,t\,x(t)\,dt = s\int_0^1 t^2\,x(t)\,dt\,,$$

$$B\,A\,x = s\int_0^1 s\,t\,x(t)\,dt = s^2\int_0^1 t\,x(t)\,dt\,.$$

Also ist $A\,B \neq B\,A$.

Grundlegend ist der Begriff des inversen Operators. Analog zur Definition des inversen Elementes in einem Ring heißt ein linearer stetiger Operator B *linksinvers* zum linearen Operator A, wenn $B\,A = I$ ist. Entsprechend heißt ein linearer stetiger Operator C *rechtsinvers* zu A, wenn $A\,C = I$ ist. Besitzt der Operator A die Linksinverse B und die Rechtsinverse C, so sind diese gleich, denn es gilt

$$B = B\,(A\,C) = (B\,A)\,C = C\,.$$

In diesem Falle sagt man, der Operator A besitze einen *inversen Operator*, und man bezeichnet diesen mit A^{-1}. Wenn also A^{-1} existiert, so ist $A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = I$. Zum Begriff des inversen Operators kehren wir später zurück.

Funktionen eines Operators. Der Operator $A^n = \overbrace{A \cdot A \ldots A}^{n}$ stellt das einfachste Beispiel einer Operatorfunktion dar. Sie ist ein spezieller Fall einer allgemeineren Funktion, nämlich eines Operatorpolynoms

$$P_n(A) = a_0\,I + a_1\,A + a_2\,A^2 + \cdots + a_n\,A^n\,.$$

Man kann auch noch allgemeinere Operatorfunktionen $f(A)$ betrachten.

Es sei beispielsweise E ein n-dimensionaler Vektorraum und A ein Operator, der E in sich überführt und durch eine symmetrische Matrix $\mathfrak{A}$ gegeben ist. Mit Hilfe einer unitären Transformation $\mathfrak{U}$ bringen wir die Matrix $\mathfrak{A}$ auf Diagonalform

$$A = \mathfrak{U}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{U}^{-1}\,,$$

d. h.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \ldots & 0 \\ . & . & . \quad . & . \\ 0 & 0 & 0 \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

$f(t)$ sei eine beliebige Funktion einer reellen Veränderlichen t, definiert auf dem Intervall $[m, M]$ mit $m = \inf_i \lambda_i$ und $M = \sup_i \lambda_i$. Wir setzen

$$f(A) = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

und

$$f(\mathfrak{A}) = \mathfrak{U}^{-1} f(A)\, \mathfrak{U}\,.$$

So wird jeder auf $[m, M]$ definierten Funktion $f(t)$ einer reellen Veränderlichen t eine Funktion $f(\mathfrak{A})$ der Matrix $\mathfrak{A}$ zugeordnet. Offenbar entspricht der Funktion $f(t) = 0$ die Nullmatrix, der Funktion $f(t) \equiv 1$ die Matrix $\mathfrak{E}$ und der Funktion $f(t) = t^m$ die Matrix $\mathfrak{A}^m$. Ist ferner $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$, so ist $f(\mathfrak{A}) = f_1(\mathfrak{A}) + f_2(\mathfrak{A})$, und ist $\varphi(t) = f_1(t) \cdot f_2(t)$, so ist $\varphi(\mathfrak{A}) = f_1(\mathfrak{A}) \cdot f_2(\mathfrak{A})$. Diese Gleichungen folgen aus den für beliebige Matrizen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ geltenden Beziehungen

$$\mathfrak{U}\,(\mathfrak{B} + \mathfrak{C})\,\mathfrak{U}^{-1} = \mathfrak{U}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{U}^{-1} + \mathfrak{U}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{U}^{-1}\,,$$

$$\mathfrak{U}(\mathfrak{B}\,\mathfrak{C})\,\mathfrak{U}^{-1} = (\mathfrak{U}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{U}^{-1})\,(\mathfrak{U}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{U}^{-1})$$

und

$$f(A) = f_1(A) + f_2(A)\,, \qquad \varphi(A) = f_1(A) \cdot f_2(A)\,.$$

Man kann die Theorie der Funktionen von Matrizen auch anders aufbauen, indem man von Polynomen von Matrizen zu Potenzreihen von Matrizen übergeht. Auf diesem Wege kann man jedoch nur analytische Funktionen einer Matrix definieren. Weitgehende Untersuchungen in dieser Richtung hat A. I. LAPPO-DANILEWSKIJ durchgeführt. Diese Theorie der analytischen Funktionen von Matrizen wurde bei Untersuchungen von Differentialgleichungssystemen benutzt [21]. Die Konstruktion von Matrizenfunktionen durch Reduktion der Matrix auf Diagonalform wurde für unendliche Matrizen, und dann für beliebige selbstadjungierte Operatoren im HILBERTschen Raum in der Spektraltheorie durchgeführt (siehe § 5, Kap. VII).

Als zweites Beispiel betrachten wir Differentialoperatoren. Es sei $E = C\,[0, 1]$ und $D = d/dt$ der Operator, der jeder stetigen differenzierbaren Funktion $x(t)$ die Ableitung dieser Funktion zuordnet:

$$D\,x(t) = \frac{dx}{dt}\,.$$

Für n-mal stetig differenzierbare Funktionen hat

$$P_n(D)\,x(t) = a_0\,x(t) + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 \frac{d^2x}{dt^2} + \cdots + a_n \frac{d^nx}{dt^n}$$

einen Sinn. Dabei ist $P_n(s)$ ein beliebiges Polynom n-ten Grades vom Argument s. Für unbeschränkt differenzierbare Funktionen ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,D^n\,x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d^nx}{dt^n}$$

sinnvoll, wenn nur die auf der rechten Seite stehende Reihe konvergiert und ihre Summe zu $C\,[0, 1]$ gehört. Speziell gilt dies, wenn $x(t)$ ein Polynom vom Grade m ist, da dann $D^n\,x(t) = 0$ ist für $n > m$, und die Reihe zu einer endlichen Summe wird.

Polynome des Differentiationsoperators finden in der Theorie der linearen Differentialgleichungen Anwendung. Das einfachste Beispiel einer solchen Anwendung ist die sogenannte symbolische Methode zur Lösung von Gleichungen mit konstanten Koeffizienten. Tieferliegende Anwendungen von Funktionen des Differentiationsoperators auf gewöhnliche und partielle lineare Differentialgleichungen findet man in der sogenannten Operatorenrechnung [8].

Formale Operationen mit Reihen und den mit Hilfe von Reihen definierten Funktionen des Differentiationsoperators wurden in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts zur Ableitung von Quadratur- und Interpolationsformeln benutzt. Wir erläutern das Gesagte an Beispielen.

Zunächst bemerken wir, daß der Operator

$$I + h\,D + \frac{h^2\,D^2}{2!} + \frac{h^3\,D^3}{3!} + \cdots + \frac{h^n\,D^n}{n!} + \cdots = e^{h\,D}$$

bei Anwendung auf eine analytische Funktion $x(t)$ die Funktion $x\,(t+h)$ ergibt. Es ist nämlich

$$e^{h\,D}\,x(t) = x(t) + h\,x'(t) + \frac{h^2}{2!}\,x''(t) + \cdots + \frac{h^n}{n!}\,x^{(n)}(t) + \cdots = x\,(t+h)\,.$$

Bezeichnen wir mit Δ_h den Differenzenoperator zur Schrittweite h, der durch

$$\Delta_h x(t) = x\,(t+h) - x(t)$$

definiert wird, so ist

$$e^{h\,D}\,x(t) = x\,(t+h) = x(t) + \Delta_h x(t) = (I + \Delta_h)\,x(t)$$

oder

$$I + \Delta_h = e^{h\,D}\,.$$

Durch formales Potenzieren und Entwickeln in eine Potenzreihe ergibt sich

$$h\,D = \ln\,(I + \Delta_h) = \sum_{n-1}^{\infty} (-1)^{n-1}\,\frac{\Delta_h^n}{n}\,.$$

Dies ist die Formel von Gregory, die den Differentiationsoperator durch den Differenzenoperator ausdrückt.

Wir betrachten ferner die Operatoren

$$J\,x(t) = \int_0^1 x\,(t+\tau)\,d\tau \qquad \text{und} \qquad S\,x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i\,x\,(t+\tau_i)\,,$$

wobei $\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$ ist. Man überzeugt sich leicht davon, daß man die Operatoren J und S als Funktionen des Operators D ausdrücken kann, und zwar ist

$$J = \int_0^1 e^{\tau\,D}\,d\tau = \frac{e^D - I}{D}\,, \qquad S = \sum_{i=1}^{n} c_i\,e^{\tau_i D}\,.$$

Daraus folgt

$$J - S = J\,[I - J^{-1}\,S] = J\left[I - \sum_{i=1}^{n} c_i\,\frac{D\,e^{\tau_i D}}{e^D - I}\right].$$

Durch

$$\frac{z\,e^{\alpha z}}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\,B_k(\alpha)$$

sind bekanntlich die Bernoullischen Polynome definiert. Daher geht die vorige Formel über in

$$J - S = J\left[I - \sum_{i=1}^{n} c_i\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k}{k!}\,B_k(\tau_i)\right)\right] = -\,J\left[\sum_{i=1}^{n} c_i\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{D^k}{k!}\,B_k(\tau_i)\right)\right],$$

weil $\sum_{i=1}^{n} c_i\,B_0(\tau_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i = 1$ ist.

Da noch

$$J[D^k x(t)] = \int_0^1 x^{(k)}(t+\tau)\,d\tau = x^{(k-1)}(t+1) - x^{(k-1)}(t)$$

gilt, kommen wir zu der verallgemeinerten EULER-MACLAURINschen Summenformel

$$\int_0^1 x(t+\tau)\,d\tau = \sum_{i=1}^{n} c_i\, x(t+\tau_i) - \sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{B_k(\tau_i)}{k!}\right][x^{(k-1)}(t+1) - x^{(k-1)}(t)]\,.$$

Speziell erhalten wir für $t = 0$

$$\int_0^1 x(\tau)\,d\tau = \sum_{i=1}^{n} c_i\, x(\tau_i) - \sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{B_k(\tau_i)}{k!}\right][x^{(k-1)}(1) - x^{(k-1)}(0)]\,.$$

Die hier gebrachte Ableitung der Formeln von GREGORY und EULER-MACLAURIN kann für Polynome $x(t)$ als begründet angesehen werden. Die Reihen werden in diesem Falle zu endlichen Summen, und alle mit ihnen ausgeführten Operationen sind zulässig. Für beliebige unbeschränkt differenzierbare Funktionen bedürfen die Formeln von GREGORY und EULER-MACLAURIN einer zusätzlichen Begründung, etwa durch die Abschätzung von Restgliedern.

§ 2. Lineare Operatoren in linearen normierten Räumen

E_x und E_y seien lineare normierte Räume. Da ein linearer normierter Raum ein Spezialfall eines linearen topologischen Raumes ist, behält die früher gegebene Definition eines linearen Operators mit dem Definitionsbereich in E_x und dem Wertebereich in E_y auch für lineare normierte Räume Gültigkeit. Desgleichen bleiben die im vorangegangenen Paragraphen bewiesenen Sätze 1 und 2 gültig.

Da die Konvergenz in E_x und E_y eine Normkonvergenz ist, bedeutet die Stetigkeit eines Operators A in diesem Falle

$$||A\,x_n - A\,x|| \to 0 \qquad \text{für} \qquad ||x_n - x|| \to 0\,.$$

Die in den Beispielen 1 und 2 von § 1 betrachteten Operatoren sind lineare stetige Operatoren, die die linearen normierten Räume E_n bzw. $C\,[0, 1]$ in sich abbilden. Der Operator des Beispiels 3 ist ebenfalls ein linearer stetiger Operator. Er bildet den linearen normierten Raum der auf Γ definierten und stetigen Funktionen in den linearen normierten Raum der im Gebiet G harmonischen Funktionen ab. Die Normen in diesen Räumen sind erklärt durch

$$||x|| = \max_{\Gamma} |x(t)| \qquad \text{und} \qquad ||v|| = \max_{G} |v(\xi, \eta)|\,.$$

Als weiteres Beispiel für einen linearen Operator betrachten wir die unendliche Matrix (a_{ik}), $i, k = 1, 2, \ldots$, mit

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ij}|^q < \infty\,, \quad q > 1\,.$$

Dann bildet

$$\eta_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\,\xi_k\,, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots,$$

einen auf l_p linearen stetigen Operator A. Der Wertevorrat von A liegt in

l_q, wo q durch $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ bestimmt ist. Durch obiges System wird nämlich jedem $x = \{\xi_i\} \in l_p$ ein $y = \{\eta_i\} \in l_q$ zugeordnet, d. h., es ist

$$A \in (l_p \to l_q) .$$

Wir zeigen zunächst, daß tatsächlich $y \in l_q$ für $x \in l_p$ ist. Nach der HÖLDERschen Ungleichung für Summen haben wir

$$\sum_{i=1}^{N} |\eta_i|^q = \sum_{i=1}^{N} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\, \xi_k \right|^q \leqq \sum_{i=1}^{N} \left\{ \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^q \right)^{1/q} \right\}^q$$

$$= ||x||^q \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^q \leqq ||x||^q \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^q .$$

Da diese Ungleichung für beliebiges N gilt, können wir zur Grenze übergehen und erhalten so

$$||y||^q = \sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^q \leqq ||x||^q \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^q < \infty ,$$

d. h., es ist $y \in l_q$.

Wir beweisen nun, daß A ein linearer stetiger Operator ist. Für

$$x_1 = \{\xi_i^{(1)}\} \in l_p \qquad \text{und} \qquad x_2 = \{\xi_i^{(2)}\} \in l_p$$

folgt aus

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}(\xi_k^{(1)} + \xi_k^{(2)}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\, \xi_k^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\, \xi_k^{(2)}$$

die Gültigkeit von

$$A\,(x_1 + x_2) = A\, x_1 + A\, x_2 ,$$

also die Additivität des Operators A. Die Homogenität dieses Operators ist offensichtlich.

Es seien jetzt

$$x_n = \{\xi_i^{(n)}\} \in l_p , \qquad x = \{\xi_i\} \in l_p ,$$

$$A\, x_n = y_n , \qquad A\, x = y , \quad y_n = \{\eta_i^{(n)}\} , \quad y = \{\eta_i\} .$$

Dann gilt

$$||y - y_n|| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i^{(n)} - \eta_i|^q \right)^{1/q} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}(\xi_k^{(n)} - \xi_k) \right|^q \right)^{1/q}$$

$$\leqq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^{(n)} - \xi_k|)^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^q \right)^{1/q} = ||x_n - x|| \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^q \right)^{1/q} ,$$

und somit konvergiert

$$||y_n - y|| \to 0$$

für $||x_n - x|| \to 0$. Damit ist die Stetigkeit von A bewiesen.

Ein Operator A heißt *beschränkt*, wenn es eine Konstante M gibt, so daß $||A\, x|| \leqq M||x||$ ist für alle $x \in E_x$. ($||A\, x||$ bedeutet hier die Norm im Raum E_y, $||x||$ ist dagegen die Norm in E_x.)

Ist A beschränkt, so folgt aus der Beschränktheit der Urbildmenge $\{x\} \subseteqq E_x$ die Beschränktheit der Bildmenge $\{A\,x\} \subseteqq E_y$.

Satz 1. *Ein additiver und homogener Operator ist genau dann stetig, wenn er beschränkt ist.*

Notwendigkeit. A sei ein stetiger Operator. Wir nehmen an, er wäre nicht beschränkt. Dann gibt es eine Folge $\{x_n\}$ mit

$$||A\,x_n|| > n\,||x_n||\,.$$

Wir konstruieren Elemente

$$\xi_n = \frac{x_n}{n\,||x_n||}\,.$$

Für ξ_n gilt dann $\xi_n \to 0$, da

$$||\xi_n|| = \frac{1}{n\,||x_n||}\,||x_n|| = \frac{1}{n} \to 0$$

für $n \to \infty$ strebt. Andererseits ist

$$||A\,\xi_n|| = \frac{1}{n\,||x_n||}\,||A\,x_n|| > 1\,.$$

Folglich gilt

$$A\,\xi_n \nrightarrow A\,0 = 0\,.$$

Daher ist der Operator A im Nullpunkt nicht stetig. Das widerspricht aber der Voraussetzung.

Hinlänglichkeit. Der additive Operator A sei beschränkt, d. h., es gelte

$$||A\,x|| \leqq M||x||\,.$$

Strebt $x_n \to x$, d. h. $||x_n - x|| \to 0$, so gilt auch

$$||A\,x_n - A\,x|| = ||A\,(x_n - x)|| \leqq M\,||x_n - x|| \to 0\,,$$

d. h. $A\,x_n \to A\,x$; folglich ist A stetig.

Wir beweisen nun ein Lemma, das sich in einigen Fällen als nützlich erweist.

Lemma. *Es sei ein linearer (nicht notwendig beschränkter) Operator A gegeben, der den* Banach-*Raum E_x in den* Banach-*Raum E_y abbildet. Wir bezeichnen mit E_n die Menge derjenigen $x \in E_x$, für die gilt*

$$||A\,x|| \leqq n\,||x||\,.$$

Dann ist

$$E_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\,,$$

und mindestens eine der Mengen E_n ist überall dicht.

Zunächst einmal ist keine der Mengen E_n leer, da z. B. gilt $0 \in E_n$ für jedes n. Außerdem gehört offensichtlich jedes $x \in E_x$, $x \neq 0$, zu einer der Mengen E_n. Um das zu beweisen, genügt es, für n die kleinste ganze Zahl zu wählen, die größer als $\frac{||A\,x||}{||x||}$ ist. Folglich gilt

$$E_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\,.$$

Da der ganze Raum E_x nicht die abzählbare Summe von nirgends dichten Mengen sein kann (Satz 3, Seite 26), ist mindestens eine der Mengen E_{n_0} nicht nirgends dicht. Folglich existiert eine Kugel $S(x_0, r)$, in der $S(x_0, r) \cap E_{n_0}$ überall dicht ist.

Wir betrachten eine Kugel $\overline{S}(x_1, r_1)$, die ganz im Innern der Kugel $S(x_0, r)$ liegt und für die $x_1 \in E_{n_0}$ ist. x sei ein Element mit der Norm $||x|| = r_1$. Dann gilt $x_1 + x \in \overline{S}(x_1, r_1)$, denn es ist

$$||(x_1 + x) - x_1|| = r_1 .$$

Wegen $\overline{S}(x_1, r_1) \subset \overline{E}_n$ existiert eine Folge $\{z_k\}$ von Elementen aus $S(x_1, r_1) \cap E_{n_0}$, für die $z_k \to x_1 + x$ geht für $k \to \infty$ (diese Folge kann stationär sein, wenn $x_1 + x \in E_{n_0}$ ist). Folglich gilt

$$x_k = z_k - x_1 \to x .$$

Dabei darf man annehmen, daß

$$\frac{r_1}{2} \leqq ||x_k||$$

ist, denn es gilt $x_k \to x$ und $||x|| = r_1$; außerdem ist $||x_k|| \leqq r_1$. Da z_k und x_1 zu E_{n_0} gehören, gilt

$$||A\, x_k|| = ||A\, z_k - A\, x_1|| \leqq ||A\, z_k|| + ||A\, x_1||$$
$$\leqq n_0 (||z_k|| + ||x_1||) .$$

Ferner ist

$$||z_k|| = ||x_k + x_1|| \leqq ||x_k|| + ||x_1|| \leqq r_1 + ||x_1|| .$$

Daraus folgt

$$||A\, x_k|| \leqq n_0 (r_1 + 2\, ||x_1||) \leqq \frac{2\, n_0 (r_1 + 2\, ||x_1||)}{r_1} ||x_k|| .$$

Wir bezeichnen mit n die kleinste ganze Zahl, die größer als

$$\frac{2\, n_0 (r_1 + 2||x_1||)}{r_1}$$

ist. Dann ist

$$||A\, x_k|| \leqq n\, ||x_k|| ,$$

und daraus folgt, daß alle x_k zu E_n gehören.

Jedes Element x, dessen Norm r_1 ist, kann man also durch Elemente aus E_n approximieren. Es sei nun x ein beliebiges Element aus E_x. Wir betrachten das Element

$$\xi = r_1 \frac{x}{||x||} .$$

Es ist

$$||\xi|| = r_1 .$$

Nach dem, was schon bewiesen ist, existiert eine Folge $\{\xi_k\} \subset E_n$, die gegen ξ konvergiert.

Dann gilt

$$x_k = \xi_k \frac{||x||}{r_1} \to x ,$$

$$||A\,x_k|| = \frac{||x||}{r_1}\,||A\,\xi_k|| \leqq \frac{||x||}{r_1}\,n\,||\xi_k|| = n\,||x_k|| .$$

Daraus folgt

$$x_k \in E_n .$$

Demzufolge ist E_n überall dicht in E_x, und das Lemma ist bewiesen.

Während in einem BANACH-Raum ein linearer Operator im allgemeinen unstetig sein kann, ist in einem endlichdimensionalen Raum jeder lineare Operator stetig.

Zum Zwecke des Beweises wählen wir in E eine Basis $e_1, \ldots, e_n$. Wir können dann jedes Element x dieses Raumes in der Form $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\,e_i$ darstellen. Da jeder n-dimensionale BANACH-Raum dem n-dimensionalen euklidischen Raum homöomorph ist, folgt aus

$$x_k = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^{(k)}\,e_i \to x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\,e_i$$

stets $\xi_i^{(k)} \to \xi_i$, $i = 1, \ldots, n$. Daraus folgt weiter

$$A\,x_k = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^{(k)}\,A\,e_i \to \sum_{i=1}^{n} \xi_i\,A\,e_i = A\,x ,$$

und damit ist die Stetigkeit von A bewiesen.

Die Norm eines Operators. A sei ein linearer und beschränkter Operator. Die kleinste, der Bedingung

$$||A\,x|| \leqq M\,||x||$$

genügende Konstante M heißt *Norm des Operators* und wird mit $||A||$ bezeichnet. Sie existiert auf Grund der Beschränktheit von A. Die Zahl $||A||$ besitzt nach Definition die beiden folgenden Eigenschaften:

a) Für ein beliebiges $x \in E_x$ gilt

$$||A\,x|| \leqq ||A||\,||x||; \tag{1}$$

b) für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ gibt es ein Element x_ε mit

$$||A\,x_\varepsilon|| > (||A|| - \varepsilon)\,||x_\varepsilon|| .$$

Wir zeigen

$$||A|| = \sup_{||x|| \leqq 1} ||A\,x|| \tag{2}$$

oder, was auf das gleiche hinauskommt,

$$||A|| = \sup_{x \neq 0} \frac{||A\,x||}{||x||} . \tag{2'}$$

Aus $||x|| \leqq 1$ folgt
$$||A\,x|| \leqq ||A||\,||x|| \leqq ||A||\,,$$
also
$$\sup_{||x|| \leqq 1} ||A\,x|| \leqq ||A||\,. \tag{3}$$
Andererseits existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Element x_ε mit
$$||A\,x_\varepsilon|| > (||A|| - \varepsilon)\,||x_\varepsilon||\,.$$
Setzen wir
$$\xi_\varepsilon = \frac{x_\varepsilon}{||x_\varepsilon||}\,,$$
so ist
$$||A\,\xi_\varepsilon|| = \frac{1}{||x_\varepsilon||}\,||A\,x_\varepsilon|| > \frac{1}{||x_\varepsilon||}\,(||A|| - \varepsilon)\,||x_\varepsilon|| = ||A|| - \varepsilon\,.$$
Wegen $||\xi_\varepsilon|| = 1$ wird
$$\sup_{||x|| \leqq 1} ||A\,x|| \geqq ||A\,\xi_\varepsilon|| \geqq ||A|| - \varepsilon\,,$$
und folglich ist
$$\sup_{||x|| \leqq 1} ||A\,x|| \geqq ||A||\,. \tag{4}$$
Aus (3) und (4) folgt (2).

Als Beispiel betrachten wir die Norm eines Integraloperators mit stetigem Kern
$$y(t) = \int_0^1 K(t, s)\,x(s)\,ds\,.$$
Wir fassen den Integraloperator als einen Operator auf, der $C[0,1]$ in $C[0,1]$ abbildet. Wir setzen
$$A\,x = \int_0^1 K(t, s)\,x(s)\,ds$$
und erhalten
$$||A\,x|| = \max_t \left| \int_0^1 K(t, s)\,x(s)\,ds \right|$$
$$\leqq \max_t \int_0^1 |K(t, s)|\,ds \cdot \max_s |x(s)| = \max_t \int_0^1 |K(t, s)\,ds\,||x||\,.$$
Demzufolge ist
$$||A|| \leqq \max_t \int_0^1 |K(t, s)|\,ds\,. \tag{5}$$

Da nun $\int_0^1 |K(t, s)|\,ds$ eine stetige Funktion ist, nimmt sie ihr Maximum in einem Punkt t_0 des Intervalls $[0, 1]$ an. Wir setzen
$$z_0(s) = \operatorname{sign} K(t_0, s)\,.$$
$x_n(s)$ sei eine stetige Funktion mit $|x_n(s)\,| \leqq 1$, die folgende Eigenschaft besitzt: Es gilt überall $x_n(s) = z_0(s)$ außer auf einer Menge E_n, deren Maß kleiner

ist als $\frac{1}{2\,M\,n}$; hierbei ist

$$M = \max_{t,\,s} |K(t, s)|\,.$$

Auf der Menge E_n ergibt sich überall

$$|x_n(s) - z_0(s)| \leqq 2\,,$$

und wir erhalten

$$\left|\int_0^1 K(t, s)\, z_0(s)\, ds - \int_0^1 K(t,s)\, x_n(s)\, ds\right| \leqq \int_0^1 |K(t, s)|\, |x_n(s) - z_0(s)|\, ds$$

$$= \int_{E_n} |K(t, s)|\, |x_n(s) - z_0(s)|\, ds \leqq 2 \max_{t,\,s} |K(t, s)| \frac{1}{2\,M\,n} = \frac{1}{n}\,.$$

Diese Gleichung gilt für beliebiges $t \in [0, 1]$.

Folglich ist für alle $t \in [0, 1]$

$$\int_0^1 K(t, s)\, z_0(s)\, ds \leqq \int_0^1 K(t, s)\, x_n(s)\, ds + \frac{1}{n} \leqq ||A||\, ||x_n|| + \frac{1}{n}\,.$$

Setzen wir in dieser Gleichung $t = t_0$, so erhalten wir

$$\int_0^1 |K(t_0, s)|\, ds \leqq ||A||\, ||x_n|| + \frac{1}{n}\,.$$

Da $||x_n|| \leqq 1$ ist, liefert diese Gleichung für $n \to \infty$ die Beziehung

$$\int_0^1 |K(t, s)|\, ds \leqq ||A||\,,$$

d. h.

$$\max_t \int_0^1 |K(t, s)|\, ds \leqq ||A||\,. \tag{6}$$

Aus (5) und (6) folgt

$$||A|| = \max_t \int_0^1 |K(t, s)|\, ds\,.$$

In einem linearen normierten Raum E_x sei eine lineare Mannigfaltigkeit L gegeben. Diese lineare Mannigfaltigkeit kann als linearer Raum betrachtet unvollständig sein. Auf L sei ein additiver Operator A definiert, dessen Wertebereich in einem linearen normierten Raum E_y liegt. Man nennt den Operator A auf L beschränkt, wenn eine Konstante M derart existiert, daß

$$||A\,x|| \leqq M\,||x||$$

für alle $x \in L$ wird. Die kleinste dieser Konstanten bezeichnet man als Norm des Operators A auf der linearen Mannigfaltigkeit L und schreibt dafür $||A||_L$.[1])

---

[1]) Deshalb bezeichnen wir die Norm eines Operators in bezug auf den ganzen Raum manchmal mit $||A||_{E_x}$.

Satz 2. *L sei eine lineare Mannigfaltigkeit, die in dem linearen normierten Raum E_x überall dicht ist. Ein auf L definierter linearer beschränkter Operator A_0, dessen Wertebereich in einem vollständigen linearen normierten Raum E_y liegt, kann ohne Vergrößerung seiner Norm auf den ganzen Raum fortgesetzt werden.*

Mit anderen Worten: Man kann auf dem Raum E_x einen Operator A definieren, für den gilt

$$A\,x = A_0\,x$$

für $x \in L$ und

$$||A||_{E_x} = ||A_0||_L\,.$$

x sei ein Element des Raumes E_x, das nicht zu L gehört. Da L in E_x überall dicht ist, existiert eine Folge $\{x_n\} \subset L$ mit der Eigenschaft $||x_n - x|| \to 0$ für $n \to \infty$ und folglich

$$||x_n - x_m|| \to 0$$

für $n, m \to \infty$. Daraus folgt

$$||A_0\,x_n - A_0\,x_m|| = ||A_0\,(x_n - x_m)|| \leqq ||A_0||_L\,||x_n - x_m|| \to 0$$

für $n, m \to \infty$, d. h., die Folge $\{A_0\,x_n\}$ konvergiert in sich und wegen der Vollständigkeit von E_y auch gegen einen Grenzwert. Diesen Grenzwert bezeichnen wir mit $A\,x$. Es sei $\{\xi_n\} \subset L$ eine andere Folge, die gegen x konvergiert. Dann ist offensichtlich

$$||x_n - \xi_n|| \to 0\,,$$

und daraus folgt $||A_0\,x_n - A_0\,\xi_n|| \to 0$. Es gilt also $A_0\,\xi_n \to A\,x$. Das bedeutet, daß der Operator A auf den Elementen von E_x eindeutig bestimmt ist. Ist $x \in L$, so wählen wir $x_n = x$ für alle n, und dann ist

$$A\,x = \lim_n A_0\,x_n = A_0\,x\,.$$

Der konstruierte Operator A ist additiv wegen

$$A\,(x_1 + x_2) = \lim_n A_0\,(x_n^{(1)} + x_n^{(2)}) = \lim_n A_0\,x_n^{(1)} + \lim_n A_0\,x_n^{(2)} = A\,x_1 + A\,x_2$$

und beschränkt, denn aus der Ungleichung

$$||A_0\,x_n|| \leqq ||A_0||_L\,||x_n||$$

folgt durch Grenzübergang

$$||A\,x|| \leqq ||A_0||_L\,||x||\,.$$

Aus dieser Ungleichung ist ersichtlich

$$||A||_{E_y} \leqq ||A_0||_L\,.$$

Da sich bei der Fortsetzung eines Operators dessen Norm offensichtlich nicht verkleinern kann, gilt

$$||A||_{E_x} = ||A_0||_L\,,$$

und damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Der angegebene Prozeß der Erweiterung eines Operators wird als stetige *Fortsetzung* eines Operators bezeichnet.

§ 3. Lineare Funktionale

Ist der Wert eines Operators eine reelle Zahl, so heißt der Operator, wie bereits erwähnt, *Funktional.* Ein in einem linearen topologischen Raum definiertes Funktional $f(x)$ heißt *linear*, wenn gilt

1. $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$.
2. $f(x_n) \to f(x)$ bei $x_n \to x$ im Sinne der Konvergenz im linearen Raum E.

Da die Menge R der reellen Zahlen ein Raum vom Typ B ist, behalten für die linearen Funktionale alle Definitionen und Sätze ihre Gültigkeit, die oben für die linearen stetigen Operatoren angegeben wurden.

Satz 1′. *Ein auf einem linearen Raum E definiertes und in einem Punkt des Raumes stetiges additives Funktional $f(x)$ ist überall auf E stetig und folglich linear.*

Satz 2′. *Ein lineares Funktional ist homogen.*

Satz 3′. *Notwendig und hinreichend für die Linearität eines auf einem linearen normierten Raum E definierten additiven Funktionals ist seine Beschränktheit*

$$|f(x)| \leqq M\,||x||\,.$$

Die kleinste dieser Ungleichung genügende Konstante M heißt *Norm des Funktionals* und wird mit $||f||$ bezeichnet. Somit gilt

$$|f(x)| \leqq ||f||\,||x||\,.$$

Schließlich ist

$$||f|| = \sup_{||x|| \leqq 1} |f(x)|$$

oder

$$||f|| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{||x||}\,.$$

Beispiele. 1. Es sei $E = L_p[0, 1]$, dann ist

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\,dt$$

ein lineares Funktional.

Daß $f(x)$ für beliebiges $x \in L_p(0, 1]$ einen Sinn hat, folgt aus der Hölderschen Ungleichung

$$\left|\int_0^1 x(t)\,dt\right| \leqq \left(\int_0^1 |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \left(\int_0^1 dt\right)^{1/q} = ||x||\,.$$

Aus dieser Ungleichung ergibt sich die Beschränktheit von $f(x)$; die Additivität ist offensichtlich.

2. E sei gleich E_k, d. h. der k-dimensionale euklidische Raum. Für das Element $x = \{\xi_i\}$ dieses Raumes setzen wir

$$f(y) = c_1\,\xi_1 + c_2\,\xi_2 + \cdots + c_k\,\xi_k\,,$$

wobei $c_1, c_2, \ldots, c_k$ Konstanten sind. Die Additivität des Funktionals $f(x)$ ist wiederum evident. Da $x_n \to x$ bedeutet, daß $\xi_i^{(n)} \to \xi_i$ für alle $i = 1, 2, \ldots, k$ strebt, ist

$$\lim_n f(x_n) = \lim_n \sum_{i=1}^k c_i\,\xi_i^{(n)} = \sum_{i=1}^k c_i\,\xi_i = f(x)$$

und die Stetigkeit von $f(x)$ bewiesen.

Die Norm eines linearen Funktionals läßt eine geometrische Deutung zu. Da im k-dimensionalen euklidischen Raum die Ebenengleichung

$$c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \cdots + c_k \xi_k = c$$

in der Form

$$f(x) = c$$

geschrieben werden kann, nennen wir in Analogie dazu in einem beliebigen linearen Raum E die Gesamtheit der der Gleichung

$$f(x) = c$$

genügenden Punkte des Raumes eine *Hyperebene*, wobei f ein lineares Funktional auf E bedeutet. Die Hyperebenen

$$f(x) = c_0 \quad \text{und} \quad f(x) = c_1$$

heißen natürlich *parallel*.

Die Hyperebene $f(x) = c$ teilt den Raum in zwei Halbräume: die Gesamtheit der Punkte x mit $f(x) \leqq c$ und die Gesamtheit der Punkte x mit $f(x) \geqq c$. Wir bezeichnen mit Vorbehalt den ersten Halbraum als links, den zweiten als rechts von der Hyperebene $f(x) = c$ liegend.

Die Hyperebene $f(x) = ||f||$ besitzt die Eigenschaft, daß die gesamte Einheitskugel $||x|| \leqq 1$ links von dieser Hyperebene liegt (wir erhalten nämlich für die Punkte der Kugel $||x|| \leqq 1$ $f(x) \leqq ||f||$). Andererseits besitzt keine der parallelen Hyperebenen $f(x) = ||f|| - \varepsilon$ diese Eigenschaft.

In Analogie zur Theorie der konvexen Körper des k-dimensionalen euklidischen Raumes nennen wir die Hyperebene $f(x) = ||f||$ eine *Stützebene der Kugel* $||x|| \leqq 1$.

§ 4. Der Raum der linearen beschränkten Operatoren

Wir sahen bereits, daß alle möglichen linearen beschränkten Operatoren, die auf ein- und demselben linearen Raum E_x definiert sind und deren Wertebereich in einem linearen Raum E_y liegt, einen linearen Raum $(E_x \to E_y)$ bilden.

Wenn zusätzlich vorausgesetzt wird, daß E_x und E_y normierte Räume sind, so kann auch im Raum $(E_x \to E_y)$ eine Norm eingeführt werden.

Für jeden linearen beschränkten Operator A, der E_x in E_y abbildet, ist eine Norm definiert (nach der in § 2 angegebenen Methode). Unschwer läßt sich zeigen, daß diese Norm den drei Normaxiomen genügt. Es ist nämlich

1. $||A|| = \sup\limits_{||x|| \leqq 1} ||A\,x|| \geqq 0$. Wenn $||A|| = 0$ ist (d. h. $\sup\limits_{||x|| \leqq 1} ||A\,x|| = 0$), so gilt $||A\,x|| = 0$ für alle x mit $||x|| \leqq 1$. Auf Grund der Homogenität des Operators ist dann $A\,x = 0$ für alle x und folglich $A = 0$.

2. $||\lambda\,A|| = \sup\limits_{||x|| \leqq 1} ||\lambda\,A\,x|| = |\lambda| \sup\limits_{||x|| \leqq 1} ||A\,x|| = |\lambda|\;||A||$.

3. $||A + B|| = \sup\limits_{||x|| \leqq 1} ||A\,x + B\,x|| \leqq \sup\limits_{||x|| \leqq 1} ||A\,x|| + \sup\limits_{||x|| \leqq 1} ||B\,x|| = ||A|| + ||B||$.

Der Raum der linearen beschränkten Operatoren ist also ein linearer normierter Raum.

Ist speziell E_y gleich dem Raum der reellen Zahlen, d. h., betrachten wir den Raum der auf E_x definierten linearen Funktionale, so heißt dieser Raum der linearen Funktionale der zu E_x konjugierte Raum. Er wird mit E_x^* bezeichnet.

Satz 1. *Wenn E_y vollständig ist, so ist der Raum der linearen beschränkten Operatoren ebenfalls vollständig und folglich ein* BANACH-*Raum.*

Es sei eine Folge von linearen Operatoren $\{A_n\}$ gegeben, die bezüglich der Norm im Raum der linearen Operatoren in sich konvergiert, d. h., es gelte $||A_n - A_m|| \to 0$ für $n, m \to \infty$. Dann strebt für beliebiges x

$$||A_n x - A_m x|| \leqq ||A_n - A_m|| \, ||x|| \to 0$$

für $n, m \to \infty$.

Daher konvergiert für jedes feste x die Folge $\{A_n x\}$ von Elementen des Raumes E_y in sich. Auf Grund der Vollständigkeit des Raumes E_y besitzt die Folge $\{A_n x\}$ einen Grenzwert y.

Somit ist jedem $x \in E_x$ ein $y \in E_y$ zugeordnet, und wir erhalten einen durch die Gleichung $y = A x$ definierten Operator A. Dieser Operator ist additiv:

$$A(x_1 + x_2) = \lim_n A_n (x_1 + x_2) = \lim_n A_n x_1 + \lim_n A_n x_2 = A x_1 + A x_2 .$$

Wir zeigen: A ist beschränkt. Nach Voraussetzung ist

$$||A_n - A_m|| \to 0$$

für $n, m \to \infty$. Daraus folgt

$$|\, ||A_n|| - ||A_m|| \,| \to 0$$

für $n, m \to \infty$, d. h., die Zahlenfolge $\{||A_n||\}$ konvergiert in sich und ist folglich beschränkt. Deshalb existiert eine Konstante K mit $||A_n|| \leqq K$ für alle n. Daraus ergibt sich

$$||A_n x|| \leqq K ||x||$$

für alle n. Folglich ist

$$||A x|| = \lim_n ||A_n x|| \leqq K \, ||x|| .$$

Die Beschränktheit des Operators A ist damit bewiesen. Da A außerdem additiv und homogen war, ist A ein linearer beschränkter Operator.

Wir beweisen, daß A ein Grenzwert der Folge $\{A_n\}$ im Sinne der Normkonvergenz im Raum der linearen Operatoren ist. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zahl n_0 derart, daß

$$||A_{n+p} x - A_n x|| < \varepsilon \tag{1}$$

für $n \geqq n_0$, $p > 0$ und alle x mit der Norm $||x|| < 1$ ist. Durch den Grenzübergang $p \to \infty$ in der Ungleichung (1) erhalten wir für $n \geqq n_0$ und alle x, deren Norm nicht größer als Eins ist,

$$||A x - A_n x|| \leqq \varepsilon .$$

Deshalb ist für $n \geqq n_0$

$$||A_n - A|| = \sup_{||x|| \leqq 1} ||(A_n - A)\, x|| \leqq \varepsilon\,.$$

Folglich ist

$$A = \lim_n A_n$$

im Sinne der Normkonvergenz im Raum der linearen beschränkten Operatoren. Damit ist die Vollständigkeit des Raumes bewiesen.

Folgerung. *Der zu dem linearen normierten Raum E konjugierte Raum E^* ist ein* BANACH-*Raum.*

Die gleichmäßige und die punktweise Konvergenz von Operatoren. Wir werden die Konvergenz einer Folge von linearen beschränkten Operatoren im Sinne der Normkonvergenz im Raum der linearen Operatoren *gleichmäßige Konvergenz* nennen. Diese Bezeichnung wird dadurch gerechtfertigt, daß $A_n x \to A_x$ in jeder Kugel $||x|| \leqq r$ gleichmäßig konvergiert, wenn $A_n \to A$ im Sinne der Normkonvergenz gilt. Zum Beweis wählen wir für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ n_0 so, daß für $n \geqq n_0$

$$||A_n - A|| < \frac{\varepsilon}{r}$$

ist. Dann wird

$$||A_n x - A\, x|| \leqq ||A_n - A||\, ||x|| < \frac{\varepsilon}{r}\, r = \varepsilon$$

für alle $x \in \bar{S}(0, r)$, und die Behauptung hat sich bestätigt. Wenn umgekehrt $A_n x \to A\, x$ gleichmäßig auf einer Kugel $||x|| \leqq r$ strebt, so konvergiert $A_n x \to x$ gleichmäßig auch in der Einheitskugel, und daraus folgt, wie bereits bewiesen ist,

$$||A_n - A|| \to 0\,.$$

Im Raum $(E_x \to E_y)$ der linearen beschränkten Operatoren führen wir auch noch eine andere Konvergenz von Operatorfolgen ein. Wir nennen eine Folge $\{A_n\}$ von linearen beschränkten Operatoren *punktweise* gegen den linearen Operator A (in sich) *konvergent*, wenn für jedes feste x die Folge $\{A_n x\}$ gegen $A\, x$ (in sich) konvergiert. Offensichtlich ergibt sich aus der gleichmäßigen Konvergenz der Folge $\{A_n\}$ die punktweise Konvergenz dieser Folge.

Die Umkehrung gilt nicht, wie man dem folgenden Beispiel entnehmen kann. Es sei E ein HILBERT-Raum H mit der orthonormalen Basis $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$. A_n sei der Projektionsoperator auf den Unterraum H_n, der von den Elementen $e_1, e_2, \ldots, e_n$ erzeugt wird. Für jedes $x \in H$ gilt

$$A_n x = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i)\, e_i \to \sum_{i=1}^{\infty} (x, e_i)\, e_i = x\,,$$

und folglich strebt $A_n \to I$ im Sinne der punktweisen Konvergenz.

Andererseits erhalten wir für ein $\varepsilon_0 < 1$, beliebiges n und $p > 0$

$$||A_n\, e_{n+1} - A_{n+p}\, e_{n+1}|| = ||e_{n+1}|| = 1 > \varepsilon_0\,,$$

und folglich konvergiert die Folge $\{A_n\}$ in der Einheitskugel $||x|| \leqq 1$ des Raumes H nicht gleichmäßig.

Satz 2. *Sind die Räume E_x und E_y vollständig, so ist der Raum der linearen beschränkten Operatoren im Sinne der punktweisen Konvergenz vollständig.*

Da für jedes x die Folge $\{A_n x\}$ in sich konvergent ist, so existiert das Grenzelement $y = \lim\limits_n A_n x$ für jedes x. Wir erhalten so eine auf E_x definierte Operation $A x = y$, deren Wertevorrat zu E_y gehört. Wie oben beweist man die Linearität von A. Die Beschränktheit von A ergibt sich aus dem folgenden

Satz 3 (Banach-Steinhaus). *Ist in dem vollständigen Raum E_x eine Folge linearer Operatoren in jedem Punkt x in sich konvergent, so ist die Folge $\{||A_n||\}$ beschränkt.*

Beweis. Wir nehmen das Gegenteil an. Dann ist die Menge $\{||A_n x||\}$ auf keiner abgeschlossenen Kugel $||x - x_0|| \leqq \varepsilon$ beschränkt. Würde nämlich

$$||A_n x|| \leqq c$$

für alle n und alle $x \in \overline{S}(x_0, \varepsilon)$ gelten, so müßte für jedes $\xi \in E_x$ das Element

$$x = \frac{\varepsilon}{||\xi||} \xi + x_0$$

dieser Kugel angehören, und es wäre dann

$$||A_n x|| \leqq c, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

oder

$$\frac{\varepsilon}{||\xi||} ||A_n \xi|| - ||A_n x_0|| \leqq \left\| \frac{\varepsilon}{||\xi||} A_n \xi + A_n x_0 \right\| \leqq c .$$

Hieraus folgt

$$||A_n \xi|| \leqq \frac{c + ||A_n x_0||}{\varepsilon} ||\xi|| .$$

Wegen der Konvergenz von $\{A_n x_0\}$ ist die Folge $\{||A_n x_0||\}$ beschränkt. Daher folgt

$$||A_n \xi|| \leqq c_1 ||\xi||, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

also

$$||A_n|| \leqq c_1, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Das widerspricht aber der Annahme.

$\overline{S}_0$ sei jetzt eine beliebige abgeschlossene Kugel aus E. Da nach dem Vorhergehenden auf ihr $\{||A_n x||\}$ nicht beschränkt ist, so existiert insbesondere ein Operator A_{n_1} und ein $x_1 \in \overline{S}_0$ mit

$$||A_{n_1} x_1|| > 1 .$$

Wegen der Stetigkeit von A_{n_1} gilt diese Ungleichung auf einer ganzen Kugel $\overline{S}_1(x_1, \varepsilon_1) \subseteq \overline{S}_0$. Auf $\overline{S}_1$ ist $\{||A_n x||\}$ wiederum nicht beschränkt, und daher gibt es einen Operator A_{n_2}, $n_2 > n_1$, und ein $x_2 \in \overline{S}_1$ derart, daß

$$||A_{n_2} x_2|| > 2$$

ist. Diese Ungleichung muß, da A_{n_2} stetig ist, auf einer Kugel $\overline{S}_2(x_2, \varepsilon_2) \subseteq \overline{S}_1$ gelten. Setzen wir diese Schlüsse fort, und lassen wir die ε_n hierbei gegen 0 gehen für $n \to \infty$, dann gibt es wegen der Vollständigkeit einen Punkt $\bar{x}$, der allen Kugeln $\overline{S}_n(x_n, \varepsilon_n)$ angehört und die Ungleichungen

$$||A_{n_k} \bar{x}|| \geq k$$

erfüllt. Das kann aber nicht sein, weil $\{A_n x\}$ für jedes $x \in E_x$ konvergieren sollte. Folglich ist der Satz von Banach-Steinhaus richtig.

Wir kehren nun zu unserem Operator

$$A x = \lim_n A_n x$$

zurück. Nach der aus dem Satz von Banach-Steinhaus erhaltenen Ungleichung

$$||A_n x|| \leq M \, ||x||$$

ergibt sich $||A x|| \leq M \, ||x||$ durch Grenzübergang $n \to \infty$. Also ist A beschränkt.

Bemerkung. In der Formulierung des Satzes von Banach-Steinhaus kann anstelle der Konvergenz in sich einer Folge $\{A_n\}$ in jedem Punkt $x \in E_x$ die Beschränktheit dieser Folge in jedem Punkt des Raumes gefordert werden. Dabei ändert sich der Beweis des Satzes nicht.

Folglich existiert der Grenzwert einer beliebigen, punktweise in sich konvergenten Folge linearer beschränkter Operatoren, und er ist ebenfalls ein linearer beschränkter Operator, d. h., der Raum der Operatoren ist vollständig im Sinne der punktweisen Konvergenz.

Oft erweist sich der folgende Satz als nützlich.

Satz 4. *Notwendig und hinreichend für die punktweise Konvergenz der Folge* $\{A_n\}$ *gegen den Operator* A_0 *ist:*

1. *Die Folge* $\{||A_n||\}$ *ist beschränkt;*
2. *es gilt* $A_n x \to A_0 x$ *für jedes* x *aus einer Menge* X, *deren lineare Hülle in* E_x *überall dicht liegt.*

Die Notwendigkeit der ersten Bedingung ist gleichbedeutend mit dem oben bewiesenen Satz von Banach-Steinhaus. Die Notwendigkeit der zweiten Bedingung ist offensichtlich. Man braucht also nur die Hinlänglichkeit der Bedingungen zu beweisen.

Es sei

$$M = \sup_{n=0, 1, \ldots} ||A_n||$$

und $L(X)$ die lineare Hülle der Menge X. Auf Grund der Linearität der Operatoren A_n und A_0 und der zweiten Bedingung gilt $A_n x \to A_0 x$ für jedes $x \in L(X)$.

Wir nehmen nun ein Element ξ des Raumes E_x, das nicht in $L(X)$ liegt. Für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ existiert ein Element $x \in L(X)$ mit $||\xi - x|| < \frac{\varepsilon}{4M}$.

Wir erhalten

$$||A_n \xi - A_0 \xi|| \leqq ||A_n \xi - A_n x|| + ||A_n x - A_0 x|| + ||A_0 x - A_0 \xi||$$
$$\leqq ||A_n x - A_0 x|| + (||A_n|| + ||A_0||)\, ||x - \xi|| < ||A_n x - A_0 x|| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Auf Grund der Tatsache $A_n x \to A_0 x$ gibt es eine ganze Zahl n_0 derart, daß

$$||A_n x - A_0 x|| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für $n \geqq n_0$ ist. Deshalb gilt für $n \geqq n_0$

$$||A_n \xi - A_0 \xi|| < \varepsilon,$$

und der Satz ist bewiesen.

Anwendungen in der Interpolationstheorie. Der oben bewiesene Satz von Banach-Steinhaus besitzt viele Anwendungsmöglichkeiten. Als Beispiel führen wir den folgenden Satz an.

Satz 5. *Durch die Dreiecksmatrix*

$$T = \begin{pmatrix} t_1^{(1)} & 0 & 0 & \ldots & \ldots \\ t_1^{(2)} & t_2^{(2)} & 0 & \ldots & \ldots \\ t_1^{(3)} & t_2^{(3)} & t_3^{(3)} & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_1^{(n)} & t_2^{(n)} & \ldots & t_n^{(n)} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \tag{2}$$

seien im Intervall $[0, 1]$ *gewisse Punkte gegeben. Dann lassen sich zu jeder auf* $[0, 1]$ *gegebenen Funktion* $x(t)$ *die* Lagrange*schen Interpolationspolynome* $L_n x$ *angeben, deren Teilpunkte die Punkte der* n*-ten Zeile von* (2) *sind:*

$$L_n x = \sum_{k=1}^{n} x(t_k^{(n)})\, l_k^{(n)}(t)$$

mit

$$l_k^{(n)}(t) = \frac{\omega_n(t)}{\omega_n'(t_k^{(n)})\,(t - t_k^{(n)})}, \qquad \omega_n(t) = \prod_{k=1}^{n} (t - t_k^{(n)}).$$

Für jede beliebige Matrix (2) *gibt es stets eine stetige Funktion* $x(t)$, *so daß die* $L_n x$ *nicht gleichmäßig gegen* $x(t)$ *für* $n \to \infty$ *konvergieren.*

Wir betrachten die $L_n x$ als Operatoren, welche die Funktionen $x(t) \in C[0, 1]$ in Elemente des gleichen Raumes abbilden und setzen

$$\lambda_n = \max_t \lambda_n(t) \qquad \text{mit} \qquad \lambda_n(t) = \sum_{k=1}^{n} |l_k^{(n)}(t)|.$$

Dann gilt, wie leicht zu beweisen ist [25],

$$||L_n|| = \lambda_n.$$

Andererseits gilt die Ungleichung von S. N. Bernstein:

$$\lambda_n > \frac{\ln n}{8\sqrt{\pi}}.$$

Folglich strebt

$$||L_n|| \to \infty$$

für $n \to \infty$. Hieraus ergibt sich sofort der oben formulierte Satz. Denn würde $L_n x \to x$ streben für alle $x \in C[0, 1]$, so müßten die $||L_n||$ beschränkt sein.

§ 5. Inverse Operatoren

Definitionen. Mit dem schon früher eingeführten Begriff des inversen Operators ist die Frage nach Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen von Funktionalgleichungen

$$A x = y \tag{1}$$

verbunden. y ist ein vorgegebenes Element des linearen Raumes E und x das gesuchte Element aus E. Da durch (1) lineare algebraische Gleichungssysteme, lineare Differential- und Integralgleichungen u. a. ausgedrückt werden können, erkennt man, daß der inverse Operator von großer Bedeutung ist.

Setzen wir voraus, daß A aus (1) einen inversen Operator A^{-1} besitzt, so ergibt sich durch Einsetzen von $x = A^{-1} y$ in (1) die Identität

$$A A^{-1} y = y \,,$$

also $y = y$. Folglich ist

$$x = A^{-1} y$$

eine Lösung von (1).

x_1 sei eine weitere Lösung von (1), d. h., für x_1 gelte $A x_1 = y$. Durch Multiplikation beider Seiten dieser Gleichung mit A^{-1} ergibt sich $x_1 = A^{-1} y$ und damit die Eindeutigkeit der Lösung $x = A^{-1} y$ von (1). Besitzt A einen rechtsinversen Operator C, so erkennt man sofort, daß $x = C y$ (1) löst, doch bleibt die Frage nach der Eindeutigkeit offen. Umgekehrt ist es, wenn A nur einen linksinversen Operator B besitzt. Existiert in diesem Fall überhaupt eine Lösung $\bar{x}$, so auch nur diese, weil aus $A \bar{x} = y$ durch linksseitige Multiplikation mit B sofort $\bar{x} = B y$ folgt. Ob es allerdings überhaupt eine Lösung gibt, ist nicht allgemein zu entscheiden.

Eine Analyse der vorangegangenen Überlegungen zeigt, daß der inverse Operator (beidseitig, links- oder rechtsinvers) nicht auf ein beliebiges Element $x \in E$ angewandt wird, sondern nur auf die Elemente der Form $A x$, d. h. auf die Bilder der Elemente des Raumes E. Die Gesamtheit dieser Bilder ist eine lineare Mannigfaltigkeit (ein Teil des Raumes E). Das legt folgende allgemeine Definition des inversen Operators nahe.

Gegeben seien zwei lineare Räume E_x und E_y und ein Operator A, der E_x auf E_y abbildet. Existiert ein auf E_y definierter Operator A^{-1} mit Werten in E_x derart, daß für beliebiges $x \in E_x$

$$A^{-1} A x = x \tag{2}$$

und

$$A A^{-1} y = y \tag{2'}$$

für beliebiges $y \in E_y$ gilt, so heißen die Operatoren A und A^{-1} *zueinander invers*. Aus dieser Definition folgt insbesondere

$$(A^{-1})^{-1} = A \,.$$

Wenn der Operator A^{-1} nur einer der vorangestellten Bedingungen genügt, so heißt er *links-* bzw. *rechtsinvers* zum Operator A.

Daß ein zu einem linearen Operator inverser Operator wieder linear ist, läßt sich leicht zeigen.

Ist nämlich

$$x = A^{-1}(y_1 + y_2) - A^{-1}y_1 - A^{-1}y_2 ,$$

so gilt auf Grund der Additivität von A die Beziehung

$$A\,x = A\,A^{-1}(y_1 + y_2) - A\,A^{-1}y_1 - A\,A^{-1}y_2 = (y_1 + y_2) - y_1 - y_2 = 0 .$$

Daraus folgt

$$x = A^{-1}A\,x = A^{-1}0 = 0 ,$$

d. h.

$$A^{-1}(y_1 + y_2) = A^{-1}y_1 + A^{-1}y_2 ,$$

und damit ist die Additivität des Operators A^{-1} bewiesen. Analog beweist man die Homogenität des Operators A^{-1}. Jedoch folgt aus der Stetigkeit des Operators A in einer Topologie im allgemeinen nicht die Stetigkeit des inversen Operators in derselben oder einer anderen Topologie, d. h., der zu einem linearen beschränkten Operator inverse Operator braucht kein linearer beschränkter Operator zu sein.

Sätze über den inversen Operator. Wir führen einige Sätze an, die hinreichende Bedingungen für die Existenz eines inversen linearen beschränkten Operators angeben.

Vorweg eine Bemerkung. Der lineare beschränkte Operator A möge E_x auf E_y umkehrbar eindeutig abbilden. Dann existiert der inverse Operator A^{-1} und ist linear. Zu einem beliebigen $y \in E_y$ existiert nur ein Urbild $x \in E_x$. Ordnen wir jedem Element $y \in E_y$ sein Urbild $x \in E_x$ zu, so erhalten wir den Operator A^{-1}, der nach seiner Definition den Bedingungen (2) genügt, und aus diesen Bedingungen folgt die Linearität des Operators A^{-1}.

Satz 1. *Der lineare Operator A bilde den linearen normierten Raum E_x auf den linearen normierten Raum E_y ab und genüge für jedes $x \in E_x$ der Bedingung*

$$||A\,x|| \geqq m\,||x|| , \qquad m > 0 , \tag{3}$$

wobei m eine Konstante darstellt. Dann existiert der inverse Operator A^{-1} und ist linear und beschränkt.

Aus der Bedingung (3) folgt, daß A umkehrbar eindeutig E_x auf E_y abbildet: Wenn $A\,x_1 = y$ und $A\,x_2 = y$ ist, so gilt $A\,(x_1 - x_2) = 0$ und wegen (3)

$$m\,||x_1 - x_2|| \leqq ||A\,(x_1 - x_2)|| = 0$$

und deshalb $x_1 = x_2$. Daher existiert, wie oben gezeigt, der lineare Operator A^{-1}. Dieser Operator ist beschränkt, was unmittelbar schon aus (3) für beliebiges $y \in E_y$ folgt:

$$||A^{-1}y|| \leqq \frac{1}{m}\,||A\,A^{-1}y|| = \frac{1}{m}\,||y|| .$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Wir betrachten zwei lineare beschränkte Operatoren A und B, die den linearen normierten Raum E in sich abbilden. Dann ist die Bildung des Produktes AB möglich. Wir zeigen zunächst

$$||A\,B|| \leqq ||A||\,||B||\,. \tag{4}$$

Für beliebiges $x \in E$ gilt

$$||A\,B\,x|| \leqq ||A||\,||B\,x|| \leqq ||A||\,||B||\,||x||\,,$$

woraus unsere Behauptung folgt.

Es seien nun A_n, A, B_n, $B \in (E \to E)$, und es gelte $A_n \to A$, $B_n \to B$ im Sinne der gleichmäßigen Konvergenz. Dann strebt $A_n B_n \to A\,B$. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned}||A_n B_n - A\,B|| &\leqq ||A_n B_n - A_n B|| + ||A_n B - A\,B|| \\ &\leqq ||A_n||\,||B_n - B|| + ||B||\,||A_n - A||\,.\end{aligned}$$

Die Folge $\{||A_n||\}$ ist eine konvergente Zahlenfolge und daher beschränkt. Ferner gilt

$$||A_n - A|| \to 0 \qquad \text{und} \qquad ||B_n - B|| \to 0\,.$$

Folglich gilt auch

$$||A_n B_n - A\,B|| \to 0\,,$$

und damit ist die Behauptung bewiesen.

Satz 2. *Der lineare beschränkte Operator A bilde E in E ab, und es sei $||A|| \leqq q < 1$. Dann besitzt der Operator $I + A$ einen inversen linearen beschränkten Operator.*

Im Raum der auf E definierten Operatoren, deren Werte im selben Raum liegen, betrachten wir die Reihe

$$I - A + A^2 - A^3 + \cdots + (-1)^n A^n + \cdots\,. \tag{5}$$

Wegen

$$||A^2|| \leqq ||A||^2$$

und analog

$$||A^n|| \leqq ||A||^n$$

gilt für die Partialsummen S_n der Reihe (5) für $n \to \infty$, $p > 0$

$$\begin{aligned}||S_{n+p} - S_n|| &= ||(-1)^{n+1} A^{n+1} + (-1)^{n+2} A^{n+2} + \cdots + (-1)^{n+p} A^{n+p}|| \\ &\leqq ||A||^{n+1} + ||A||^{n+2} + \cdots + ||A||^{n+p} \leqq q^{n+1} + q^{n+2} + \cdots + q^{n+p} \to 0\,.\end{aligned}$$

Deshalb konvergiert die Folge der Partialsummen der Reihe (5) in sich und folglich wegen der Vollständigkeit des Raumes der Operatoren auch gegen einen Grenzwert, d. h., die Reihe (5) konvergiert.

Ist S die Summe der Reihe (5), so erhalten wir

$$\begin{aligned}S\,(I + A) &= \lim_n S_n\,(I + A) \\ &= \lim_n\,(I + A + A^2 + \cdots + A^n - A - A^2 - \cdots - A^{n+1}) \\ &= \lim_n\,(I - A^{n+1}) = I\,,\end{aligned}$$

d. h.

$$S = (I + A)^{-1}.$$

S ist ein linearer Operator. Er ist beschränkt, da

$$||S|| \leqq \sum_{n=0}^{\infty} ||A||^n \leqq \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

ist. Also ist $(I + A)^{-1}$ wie behauptet ein linearer beschränkter Operator.

Satz 3. *Der Operator $A \in (E_x \to E_y)$ besitze die Inverse A^{-1}, und der Operator ΔA sei von der Gestalt, daß*

$$||\Delta A|| < ||A^{-1}||^{-1}$$

ist. Dann besitzt der Operator $B = A + \Delta A$ eine Inverse B^{-1}, wobei

$$||B^{-1} - A^{-1}|| \leqq \frac{||\Delta A||}{1 - ||A^{-1}|| \, ||\Delta A||} ||A^{-1}||^2 \tag{6}$$

gilt.

Den Ausgang bildet die Beziehung

$$A + \Delta A = A\,(I + A^{-1}\,\Delta A).$$

Wegen $||A^{-1}\,\Delta A|| < 1$ besitzt der Operator $I + A^{-1}\,\Delta A$ die Inverse

$$(I + A^{-1}\,\Delta A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-\,A^{-1}\,\Delta A)^n.$$

Dann ist offenbar $(I + A^{-1}\,\Delta A)^{-1}\,A^{-1}$ invers zum Operator $A\,(I + A^{-1}\,\Delta A) = A + \Delta A$. Ferner gilt

$$||(A + \Delta A)^{-1} - A^{-1}|| \leqq ||A^{-1}|| \; ||(I + A^{-1}\,\Delta A)^{-1} - I||$$

$$\leqq \sum_{n=1}^{\infty} ||A^{-1}\,\Delta A||^n \, ||A^{-1}|| = \frac{||A^{-1}\,\Delta A||}{1 - ||A^{-1}\,\Delta A||} ||A^{-1}|| \leqq \frac{||\Delta A||}{1 - ||A^{-1}|| \, ||\Delta A||} ||A^{-1}||^2,$$

und damit ist die Behauptung bewiesen.

Beispiel. Wir betrachten den Integraloperator

$$A\,x = x(t) - \int_0^1 K(t, s)\,x(s)\,ds \tag{7}$$

mit dem stetigen Kern $K(t, s)$, der den Raum $C\,[0, 1]$ in sich abbildet. Es sei $K_0(t, s)$ ein $K(t, s)$ approximierender entarteter Kern und A_0 der dem Kern $K_0(t, s)$ entsprechende Integraloperator:

$$A_0\,x = x(t) - \int_0^1 K_0(t, s)\,x(s)\,ds. \tag{8}$$

Wir betrachten die Gleichungen

$$A\,x = y \tag{7'}$$

und

$$A_0\,x = y \tag{8'}$$

und setzen

$$\omega = \max_{t,\,s} |K(t, s) - K_0(t, s)|.$$

Für $\Delta A = A - A_0$ ist offensichtlich $||\Delta A|| \leqq \omega$. Bekanntlich[1]) führt die Lösung von Gleichung (8) mit dem entarteten Kern auf die Lösung eines linearen algebraischen Systems. Wir setzen voraus, daß dieses System eine Lösung besitzt und schreiben sie in der Form

$$x_0(t) = R\, y\,.$$

Dabei ist R der durch die zur Matrix des erwähnten Systems inverse Matrix (r_{ij}) bestimmte Operator. r möge die Norm des Operators R sein. Ist

$$\omega < \frac{1}{r}\,,$$

so besitzt die Integralgleichung (7) mit dem nichtentarteten Kern auf Grund des bewiesenen Satzes eine Lösung $x(t)$. Dann gilt

$$||x(t) - x_0(t)|| \leqq \frac{\omega}{1 - \omega\, r}\, r^2\,.$$

Wenn umgekehrt die Lösbarkeit von Gleichung (7) bekannt ist, so kann der Satz zum Existenzbeweis für die Lösung der approximierendden Gleichung mit entartetem Kern und zur Abschätzung des Näherungsfehlers benutzt werden.

Zum Schluß beweisen wir folgenden Satz:

Satz 4 (Banach). *Wenn der lineare beschränkte Operator A den gesamten* Banach-*Raum E_x auf den gesamten* Banach-*Raum E_y umkehrbar eindeutig abbildet, so existiert ein linearer beschränkter Operator A^{-1}, der invers zum Operator A ist und E_y auf E_x abbildet.*

Man braucht nur die Beschränktheit des Operators A^{-1} zu zeigen.

Auf Grund des Lemmas von § 2 des vorigen Kapitels kann der Raum E_y in der Form

$$E_y = \bigcup_{k=1}^{\infty} Y_k$$

dargestellt werden, wobei Y_k die Gesamtheit der Elemente $y \in E_y$ mit

$$||A^{-1}\, y|| \leqq k\, ||y||$$

bezeichnet und mindestens eine der Mengen Y_k überall dicht in E_y ist. Das möge die Menge Y_n sein.

Wir nehmen ein beliebiges Element $y \in E_y$. Es sei $||y|| = l$.

Wir wählen $y_1 \in Y_n$ so, daß

$$||y - y_1|| \leqq \frac{l}{2}\,, \quad ||y_1|| \leqq l\,,$$

ist. (So ein Element existiert, weil ja $\overline{S}(0, 1) \cap Y_n$ überall dicht in $\overline{S}(0, 1)$ liegt

[1]) S. beispielsweise [22].

und $y \in \bar{S}(0, l)$ ist.) Weiter gibt es ein $y_2 \in Y_n$ mit

$$||(y - y_1) - y_2|| \leqq \frac{l}{2^2}, \qquad ||y_2|| \leqq \frac{l}{2}.$$

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens konstruieren wir allgemein $y_k \in Y_n$ derart, daß

$$||y - (y_1 + y_2 + \cdots + y_k)|| \leqq \frac{l}{2^k} \quad \text{und} \quad ||y|| \leqq \frac{l}{2^{k-1}}$$

ist. Wir erhalten dann

$$y = \lim_k \sum_{i=1}^{k} y_i .$$

Für $x_k = A^{-1} y_k$ gilt $||x_k|| \leqq n\, ||y_k|| \leqq \frac{n\, l}{2^{k-1}}$.

Wegen

$$||S_{k+p} - S_k|| = \left\| \sum_{i=k+1}^{k+p} x_i \right\| < \frac{n\, l}{2^{k-1}},$$

und da E vollständig ist, konvergiert die Folge $\{S_k\}$, $S_k = \sum_{i=1}^{k} x_i$, gegen einen Grenzwert $x \in E_x$, d. h., es ist

$$x = \lim_k \sum_{i=1}^{k} x_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i .$$

Aus

$$A\, x = A \left(\lim_k \sum_{i=1}^{k} x_i \right) = \lim_k \sum_{i=1}^{k} A\, x_i = \lim_k \sum_{i=1}^{k} y_i = y$$

folgt schließlich

$$||A^{-1} y|| = ||x|| = \lim_k \left\| \sum_{i=1}^{k} x_i \right\| \leqq \lim_k \sum_{i=1}^{k} ||x_i|| \leqq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{n\, l}{2^{i-1}} = 2\, n\, l = 2\, n\, ||y||,$$

und hiernach ist, weil y ein beliebiges Element aus E_y war, unser inverser Operator A^{-1} beschränkt, was zu beweisen war.

Wie bereits erwähnt, kann der Fall eintreten, daß der zu einem beschränkten linearen Operator inverse Operator zwar linear ist, aber nicht auf dem ganzen Raum E_y definiert. Er ist dann auf einer linearen Mannigfaltigkeit erklärt und unbeschränkt. Ebenso kann der inverse Operator eines auf einer in E_x überall dichten linearen Mannigfaltigkeit definierten linearen unbeschränkten Operators auf ganz E_y definiert, linear und beschränkt sein.

Eine eingehendere Betrachtung dieser verschiedenen Fälle würde über den Rahmen unseres Buches hinausgehen. Wir beschränken uns deshalb auf zwei Beispiele.

1. Es sei $E = C\,[0, 1]$ und

$$A\, x = \int_0^t x(\tau)\, d\tau .$$

Offenbar ist A linear und beschränkt, während der inverse Operator

$$A^{-1}\,y = \frac{d}{dt}\,y(t)$$

nicht beschränkt und nur auf der Mannigfaltigkeit der stetig differenzierbaren Funktionen mit $y(0) = 0$ erklärt ist.

2. Es sei $E = C\,[0, 1]$ und $A\,x = \frac{d}{dt}\left\{p(t)\,\frac{dx}{dt}\right\} + q(t)\,x$ der nicht beschränkte STURM-LIOUVILLEsche Operator, der auf der linearen Mannigfaltigkeit der zweimal stetig differenzierbaren Funktionen mit $x(0) = x(1) = 0$ definiert ist. Der inverse Operator

$$A^{-1}\,y = \int\limits_0^1 G(t,\tau)\,y(\tau)\,d\tau$$

($G(t,\tau)$ ist die GREENsche Funktion) ist beschränkt, linear und auf ganz $C\,[0, 1]$ erklärt.

Parameterabhängige Operatoren. Gleichungen der Form

$$A\,x - \lambda\,x = y \qquad \text{oder} \qquad (A - \lambda\,I)\,x = y \tag{9}$$

kommen in verschiedenen Gebieten der Mathematik häufig vor. Dabei soll A ein linearer Operator und λ ein Parameter sein. Ein Spezialfall von (9) ist

$$A\,x - \lambda\,x = 0 \qquad \text{oder} \qquad (A - \lambda\,I)\,x = 0\,. \tag{10}$$

Dies ist die zu (9) gehörige *Eigenwertgleichung*. Die stets vorhandene Lösung $x = 0$ von (10) heißt *triviale Lösung*.

Es werde vorausgesetzt, daß der Operator $A - \lambda\,I$ für gewisse λ einen inversen Operator $(A - \lambda\,I)^{-1} = R_\lambda$ besitzt. R_λ wird *Operatorresolvente* von (9) genannt. Wenn also R_λ existiert, dann gibt es für dieses λ und beliebiges y die einzige Lösung

$$x = R_\lambda\,y\,.$$

Die Eigenwertgleichung (10) besitzt dann nur die triviale Lösung $x = 0$.

Diejenigen λ, bei denen (9) für alle y eine eindeutige Lösung besitzt und für die außerdem R_λ beschränkt ist, heißen *reguläre* Werte von (9) bzw. von A. Besitzt (10) für ein λ außer der trivialen auch noch eine andere Lösung, so heißt λ *Eigenwert* oder *charakteristische Zahl* von (9) bzw. von A. Die nichttriviale Lösung nennt man *Eigenelement* von A zum Eigenwert λ. Wenn λ ein Eigenwert des Operators A ist und Gleichung (9) für irgendein y eine Lösung besitzt, so ist die Lösung nicht eindeutig. Ist nämlich x_0 eine Lösung von Gleichung (9),

$$A\,x_0 - \lambda\,x_0 = y\,,$$

und e ein Eigenelement von A, das dem Eigenwert λ entspricht,

$$A\,e - \lambda\,e = 0\,,$$

so gilt

$$A\,(x_0 + e) - \lambda\,(x_0 + e) = y\,,$$

und $x_0 + e$ ist ebenfalls eine Lösung von (9).

Die Gesamtheit aller Werte λ, die nicht regulär sind, heißt *Spektrum* des Operators A. Insbesondere gehören alle Eigenwerte zum Spektrum.

Aus den Sätzen 2 und 3 folgen die Behauptungen:

Gilt für λ die Beziehung $\frac{1}{|\lambda|}\,||A|| = q < 1$, so existiert zum Operator $A - \lambda I$ der inverse Operator. Dabei gilt

$$R_\lambda = -\frac{1}{\lambda}\left(I + \frac{A}{\lambda} + \frac{A^2}{\lambda^2} + \cdots\right).$$

Ist λ ein regulärer Wert, so stellt auch $\lambda + \Delta\lambda$ bei

$$|\Delta\lambda| < ||(A - \lambda I)^{-1}||^{-1}$$

einen regulären Wert dar. Daraus folgt, daß die Gesamtheit der regulären Werte eine offene Menge darstellt und folglich das Spektrum abgeschlossen ist.

Beispiel. Wir betrachten im Raum $C\,[0, 1]$ die Integralgleichung

$$x(t) = y(t) + \lambda \int_0^1 K(t, s)\, x(s)\, ds\,. \tag{11}$$

$K(t, s)$ sei eine im Quadrat $0 \leq t, s \leq 1$ stetige Funktion. Wir setzen $1/\lambda = \mu$ und schreiben die Gleichung in der Form der obigen Operatorgleichung; wir erhalten

$$\int_0^1 K(t, s)\, x(s)\, ds - \mu\, x(t) = -\mu\, y(t)$$

oder, wenn man $A\,x = \int_0^1 K(t, s)\, x(s)\, ds$ setzt,

$$A\,x - \mu\,x = -\mu\,y\,.$$

Weiter ergibt sich

$$R_\mu = R_{1/\lambda} = -\frac{1}{\mu}\left(I + \frac{A}{\mu} + \frac{A^2}{\mu^2} + \cdots\right) = -\lambda\,(I + \lambda\,A + \lambda^2\,A^2 + \cdots)\,.$$

Wir bemerken, daß

$$A^p\,z = \int_0^1 K_p(t, s)\, z(s)\, ds$$

ist, worin $K_p(t, s)$ die p-te Iteration des Kerns $K(t, s)$ darstellt. Folglich ist

$$R_{1/\lambda}\,z = -\lambda\,z(t) - \lambda^2 \int_0^1 K(t, s)\, z(s)\, ds - \lambda^3 \int_0^1 K_2(t, s)\, z(s)\, ds - \cdots.$$

Deshalb hat die Gleichung (11) die Lösung

$$x(t) = R_{1/\lambda}\left(-\frac{1}{\lambda}\,y\right) = y(t) + \lambda \int_0^1 K(t, s)\, y(s)\, ds + \lambda^2 \int_0^1 K_2(t, s)\, y(s)\, ds + \cdots.$$

Auf diese Weise erhalten wir dieselbe Lösung wie in der Theorie der Integralgleichungen, nämlich

$$x(t) = y(t) + \lambda \int_0^1 R(t, s, \lambda)\, y(s)\, ds\,,$$

wobei $R(t, s, \lambda)$ die Resolvente des Kerns $K(t, s)$ bildet:

$$R(t, s, \lambda) = K(t, s) + \lambda\, K_2(t, s) + \lambda^2\, K_3(t, s) + \cdots .$$

Die in der Theorie der Integralgleichungen hergeleiteten Gleichungen für die Resolvente $R(t, s, \lambda)$ sind die Bedingungen dafür, daß $R_{1/\lambda}$ Rechts- und Linksinverse zum Operator $\lambda\, A - I$ ist.

§ 6. BANACH-Räume mit Basis

Definition. E sei ein unendlichdimensionaler BANACH-Raum. Die Folge von Elementen $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ aus E wird *Basis* von E genannt, wenn jedes $x \in E$ eindeutig in der Form $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i\, e_i$ mit reellem ξ_i $(i = 1, 2, \ldots)$ darstellbar ist. Die Eindeutigkeit der Darstellung ist offenbar mit der Bedingung gleichwertig, daß $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i\, e_i = 0$ dann und nur dann gilt, wenn $\xi_i = 0$ ist für alle i.

Beispiele. 1. Es sei $E = l_p$. Dann bilden die Elemente

$$e_1 = \{1, 0, 0, \ldots\}$$
$$e_2 = \{0, 1, 0, \ldots\}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

eine Basis in l_p, da jedes $x \in l_p$, $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots\}$, die eindeutige Darstellung $x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i\, e_i$ besitzt. Es gilt nämlich

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i\, e_i = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, 0, 0, \ldots\}$$

und deshalb

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \xi_i\, e_i \right\| = \| \{0, 0, \ldots, 0, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \ldots\} \| = \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} |\xi_i|^p \right)^{1/p} \to 0 .$$

Der letzte Ausdruck ist der Rest einer konvergenten Reihe. Folglich ist

$$x = \lim_n \sum_{i=1}^{n} \xi_i\, e_i = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i\, e_i .$$

Wenn weiter

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i\, e_i = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i'\, e_i$$

gilt, d. h.

$$0 = \sum_{i=1}^{\infty} (\xi_i - \xi_i')\, e_i = \{\xi_1 - \xi_1', \xi_2 - \xi_2', \ldots\} ,$$

so bestätigt sich erwartungsgemäß

$$\xi_i = \xi_i', \quad i = 1, 2, \ldots .$$

2. Es sei $E = C\,[0, 1]$. Wir betrachten in $C[0, 1]$ die Folge von Elementen

$$t,\ 1 - t;\ u_{00}(t);\ u_{10}(t),\ u_{11}(t);\ u_{20}(t),\ u_{21}(t),\ u_{22}(t),\ u_{23}(t);\ \ldots, \tag{1}$$

wo die $u_{kl}(t)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots;\ 0 \leq l < 2^k)$ auf die folgende Weise definiert werden: $u_{kl}(t)$ hat für t aus $\left(\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}\right)$ die Form eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Höhe Eins (in Abb. 3

ist die Funktion $u_{22}(t)$ dargestellt), außerhalb dieses Intervalls ist $u_{kl}(t) = 0$. Jede Funktion $x(t) \in C\,[0, 1]$ ist durch eine Reihe

$$x(t) = a_0\,t + a_1\,(1 - t) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{2^k-1} a_{kl}\,u_{kl}(t) \tag{2}$$

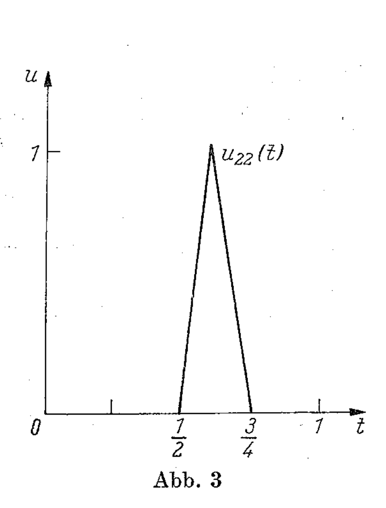


Abb. 3

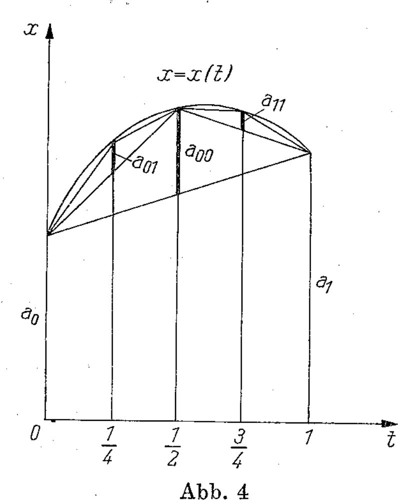


Abb. 4

darstellbar mit $a_0 = x(1)$, $a_1 = x(0)$. Die Koeffizienten a_{kl} lassen sich durch die geometrische Konstruktion, die in Abb. 4 angegeben ist, eindeutig finden. Das Bild der Partialsumme

$$a_0\,t + a_1\,(1 - t) + \sum_{k=0}^{s-1} \sum_{l=0}^{2^k-1} a_{kl}\,u_{kl}(t)$$

der Reihe (2) ist offenbar ein Vieleck mit $2^s + 1$ Ecken, die auf der Kurve $x = x(t)$ mit äquidistanten Abszissen liegen. Die Gesamtheit der Funktionen (1) bildet in $C\,[0, 1]$ eine Basis.

Wenn E eine Basis hat, so ist E offensichtlich separabel. In einem Raum mit Basis ist die Menge der Linearkombinationen $\sum_{i=1}^{n} r_i\,e_i$ mit rationalen Koeffizienten r_i eine abzählbare überall dichte Menge. Für alle bekannten separablen Banach-Räume sind Basen konstruiert worden. Ihre Existenz für einen beliebigen separablen Raum vom Typ B ist jedoch noch nicht bewiesen worden.

$E = E_x$ sei ein Banach-Raum mit der Basis $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$. Wir betrachten den linearen Raum E_y, dessen Elemente alle Zahlenfolgen $y = \{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots\}$ sind, für die die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i\,e_i$ konvergiert.

In E_y wird eine Norm eingeführt durch

$$||y|| = \sup_n \left|\left| \sum_{i=1}^{n} \eta_i\,e_i \right|\right| .$$

Wir beweisen, daß E_y ein Raum vom Typ B ist. Tatsächlich lassen sich die Axiome der Norm mühelos nachweisen.

Es sei jetzt eine in sich konvergente Folge

$$\{y_k\},\ y_k = \{\eta_1^{(k)}, \eta_2^{(k)}, \ldots\} \in E_y\,,$$

gegeben. Dann ist für ein $\varepsilon > 0$

$$||y_m - y_k|| = \sup_n \left\|\sum_{i=1}^{n} (\eta_i^{(m)} - \eta_i^{(k)})\, e_i\right\| < \varepsilon \quad \text{für} \quad m, k \geqq m_0(\varepsilon)$$

und folglich

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} (\eta_i^{(m)} - \eta_i^{(k)})\, e_i\right\| < \varepsilon \tag{3}$$

für $m, k \geqq m_0(\varepsilon)$ und beliebiges n. Hiernach ist

$$\begin{aligned}||(\eta_n^{(m)} - \eta_n^{(k)})\, e_n|| &= \left\|\sum_{i=1}^{n} (\eta_i^{(m)} - \eta_i^{(k)})\, e_i - \sum_{i=1}^{n-1} (\eta_i^{(m)} - \eta_i^{(k)})\, e_i\right\| \\ &\leqq \left\|\sum_{i=1}^{n} (\eta_i^{(m)} - \eta_i^{(k)})\, e_i\right\| + \left\|\sum_{i=1}^{n-1} (\eta_i^{(m)} - \eta_i^{(k)})\, e_i\right\| < 2\,\varepsilon\end{aligned}$$

und daher auch für jedes n

$$|\eta_n^{(m)} - \eta_n^{(k)}| < \frac{2\,\varepsilon}{||e_n||}\,, \qquad \text{sobald} \quad m, k \geqq m_0 \quad \text{ist.}$$

Somit konvergiert die Zahlenfolge $\{\eta_n^{(1)}, \eta_n^{(2)}, \ldots\}$ gegen ein $\eta_n^{(0)}$, und das gilt für jedes n.

Wir gehen jetzt in der Ungleichung (3) zum Limes $k \to \infty$ über und erhalten für $m \geqq m_0(\varepsilon)$ und jedes n

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} (\eta_i^{(m)} - \eta_i^{(0)})\, e_i\right\| \leqq \varepsilon\,. \tag{4}$$

Setzt man

$$s_n^{(m)} = \sum_{i=1}^{n} \eta_i^{(m)}\, e_i\,, \qquad s_n^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} \eta_i^{(0)}\, e_i$$

und berücksichtigt die Ungleichung (4), so wird für $m \geqq m_0(\varepsilon)$ und beliebige n und $p > 0$

$$||s_{n+p}^{(0)} - s_n^{(0)}|| \leqq ||s_{n+p}^{(m)} - s_n^{(m)}|| + 2\,\varepsilon\,.$$

Es sei eine Zahl $\omega > 0$ gegeben. Wir wählen zuerst ε und damit $m_0(\varepsilon)$, so daß $2\,\varepsilon < \frac{\omega}{2}$ ist. Sodann wird für ein festes $m \geqq m_0(\varepsilon)$ ein n_0 so bestimmt, daß

$$||s_{n+p}^{(m)} - s_n^{(m)}|| < \frac{\omega}{2}$$

für jedes $n \leqq n_0$ und jedes $p > 0$ ist (das ist wegen der Konvergenz der Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i^{(m)}\, e_i$ immer möglich). Dann ist

$$||s_{n+p}^{(0)} - s_n^{(0)}|| < \omega$$

für $n \geqq n_0$ und beliebiges $p > 0$, d. h., die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i^{(0)} e_i$$

konvergiert, und folglich ist $y_0 = \{\eta_1^{(0)}, \eta_2^{(0)}, \ldots, \eta_n^{(0)}, \ldots\} \in E_y$. Außerdem erhalten wir aus (4), daß für $m \geqq m_0$

$$\sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} (\eta_i^{(m)} - \eta_i^{(0)})\, e_i \right\| \leqq \varepsilon$$

ist, d. h., für $m \geqq m_0$ gilt

$$||y_0 - y_m|| < \varepsilon .$$

Damit ist die Vollständigkeit von E_y bewiesen, also ist E_y ein BANACH-Raum.

Offensichtlich ist jedem $x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i \in E_x$ genau ein $y_x = \{\xi_i\} \in E_y$ zugeordnet. Umgekehrt entspricht auch jedem $y = \{\eta_i\} \in E_y$ genau ein $x_y \in E_x$:

$$x_y = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i e_i .$$

Auf diese Weise ist also ein Operator A_0 definiert worden, der E_y auf E_x umkehrbar eindeutig abbildet, d. h., es ist $x = A_0 y$. Die Linearität von A_0 ist leicht zu sehen. A_0 ist außerdem beschränkt, denn es ist

$$||A_0 y|| = ||x|| = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i e_i \right\| \leqq \sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} \eta_i e_i \right\| = ||y|| .$$

Wir haben somit einen linearen Operator A_0, der E_y auf E_x eineindeutig abbildet. Nach dem Satz von BANACH existiert die inverse Operation $y = A_0^{-1} x$, die ebenfalls linear und beschränkt ist.

Es sei

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i$$

beliebig aus E_x. Wir definieren das Funktional f_k, indem wir $f_k(x) = \xi_k$ setzen. Offenbar ist f_k additiv. Es ist fener

$$|f_k(x)| = |\xi_k| = \frac{|\xi_k|\, ||e_k||}{||e_k||} = \frac{||\xi_k e_k||}{||e_k||} = \frac{\left\| \sum_{i=1}^{k} \xi_i e_i - \sum_{i=1}^{k-1} \xi_i e_i \right\|}{||e_k||}$$

$$\leqq 2 \sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \right\| \frac{1}{||e_k||} = \frac{2\, ||y||}{||e_k||} = \frac{2\, ||A_0^{-1} x||}{||e_k||} \leqq 2 \frac{||A_0^{-1}||}{||e_k||} ||x|| .$$

Hieraus folgt die Beschränktheit und damit die Linearität von f_k, denn es gilt

$$||f_k|| \leqq 2 \frac{||A_0^{-1}||}{||e_k||} .$$

Indem wir zu jedem k ein f_k konstruieren, erhalten wir eine unendliche Folge von Funktionalen $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ aus E^*. Jetzt kann man jedes $x \in E$ in der

Form

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)\, e_i$$

schreiben. Wir setzen insbesondere $x = e_j$. Dann ist

$$\xi_i = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j\,, \\ 0 & \text{für } i \neq j\,, \end{cases}$$

$$f_i(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j\,, \\ 0 & \text{für } i \neq j\,. \end{cases} \tag{5}$$

Auf diese Weise haben wir die Elemente $\{e_i\}$ und die Funktionale $\{f_i\}$ als *biorthogonale* Folgen erkannt.

Es sei jetzt f ein beliebiges Funktional aus E^*. Da

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)\, e_i = \lim_n \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, e_i$$

gilt, ist

$$f(x) = \lim_n \sum_{i=1}^{n} f\,[f_i(x)\, e_i] = \lim_n \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, f(e_i) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)\, f(e_i)\,.$$

Man setzt $f(e_i) = c_i$ und erhält für jedes $f \in E^*$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i\, f_i(x)$$

oder

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} c_i\, f_i\,. \tag{6}$$

Die Darstellung (6) ist offensichtlich auch eindeutig. (6) ist für jedes $x \in E$ konvergent.

x sei ein beliebiges Element aus E. Dann ist

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i\, e_i = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\, e_i + \sum_{i=n+1}^{\infty} \xi_i\, e_i = S_n\, x + R_n\, x\,.$$

S_n und R_n kann man als Operatoren ansehen, die E in sich abbilden. S_n und R_n sind offenbar für jedes n lineare beschränkte Operatoren. Ihre Linearität ist offensichtlich, und die Beschränktheit folgt aus den Ungleichungen

$$||S_n\, x|| \leqq \sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} \xi_i\, e_i \right\| = ||A_0^{-1}\, x|| \leqq ||A_0^{-1}||\; ||x||$$

und

$$||R_n\, x|| \leqq 2\; ||A_0^{-1}||\; ||x||\,.$$

KAPITEL IV

LINEARE FUNKTIONALE

In diesem Kapitel betrachten wir ausführlich die einfachsten Eigenschaften der linearen Funktionale, die in linearen normierten Räumen definiert sind.

Wir erinnern uns vor allem einiger oben bewiesener Sätze, die gleichermaßen für Operatoren und Funktionale gelten und die wir hier in bezug auf Funktionale formulieren.

Satz (BANACH-STEINHAUS). *Wenn die auf einem* BANACH-*Raum E definierte Folge linearer Funktionale in jedem Punkt $x \in E$ beschränkt ist, so ist die Folge der Normen $\{\|f_n\|\}$ dieser Funktionale ebenfalls beschränkt.*

Satz 1. *Wenn die Folge der linearen Funktionale $\{f_n(x)\}$ in jedem Punkt des* BANACH-*Raumes E in sich konvergiert, so existiert ein lineares Funktional $f(x)$ mit*

$$f_n(x) \to f(x)$$

für jedes $x \in E$.

Satz 2. *Für die Konvergenz der Folge $\{f_n\}$ von linearen Funktionalen in jedem Punkt x des* BANACH-*Raumes E gegen das Funktional f_0 ist notwendig und hinreichend, daß*

1. *die Folge $\{\|f_n\|\}$ beschränkt ist,*
2. *$f_n(x) \to f_0(x)$ für beliebiges x aus einer Menge $M \subset E$, deren lineare Hülle in E überall dicht liegt.*

Satz 3. *Ein auf einer im linearen Raum E überall dichten linearen Mannigfaltigkeit L gegebenes und dort beschränktes lineares Funktional f_0 kann auf den ganzen Raum eindeutig ohne Vergrößerung seiner Norm fortgesetzt werden.*

§ 1. Der Satz von BANACH-HAHN und seine Folgerungen

Der folgende Satz zeigt die Möglichkeit, ein ursprünglich auf einer linearen Mannigfaltigkeit L eines linearen normierten Raumes E definiertes lineares Funktional auf den ganzen Raum ohne Vergrößerung seiner Norm auszudehnen, auch dann, wenn L in E nicht überall dicht ist.

Satz 4 (BANACH-HAHN). *Jedes auf einer linearen Mannigfaltigkeit L eines linearen normierten Raumes E definierte lineare Funktional $f(x)$ kann bei Erhaltung der Norm auf den ganzen Raum fortgesetzt werden. Das heißt, es läßt sich*

ein lineares Funktional $F(x)$ angeben, welches auf ganz E definiert ist und für das

1. $F(x) = f(x)$ *für* $x \in L$ *und*
2. $\|F\|_E = \|f\|_L$ *gilt.*

Beweis. Es sei $x_0 \notin L$, und wir betrachten die Menge $(L; x_0) = L_1$ der Elemente $x + t\,x_0$, wo $x \in L$ und t eine beliebige reelle Zahl ist.

Offenbar ist L_1 eine lineare Mannigfaltigkeit. Auch ist jedes Element aus L_1 eindeutig in der Form $x + t\,x_0$ darstellbar. Angenommen, es gäbe zwei Darstellungen von $u \in L_1$:

$$u = x_1 + t_1\,x_0 \quad \text{und} \quad u = x_2 + t_2\,x_0\,.$$

Dabei kann $t_1 \neq t_2$ vorausgesetzt werden, sonst würde aus $x_1 + t_1\,x_0 = x_2 + t_1\,x_0$ $x_1 = x_2$ folgen, und die Darstellung wäre doch eindeutig. Angenommen, es wäre

$$x_1 - x_2 = (t_2 - t_1)\,x_0 \quad \text{und} \quad x_0 = \frac{x_1 - x_2}{t_2 - t_1}\,.$$

Das ist aber unmöglich, weil $x_0 \notin L$ und $x_1, x_2 \in L$ sind. Somit gilt $t_1 = t_2$ und damit $x_1 = x_2$, womit die Eindeutigkeit bewiesen ist.

Für zwei Elemente x' und x'' aus L gilt

$$\begin{aligned} f(x') - f(x'') = f(x' - x'') &\leqq \|f\|\,\|x' - x''\| \\ &\leqq \|f\|\,\{\|x' + x_0\| + \|x'' + x_0\|\} \end{aligned}$$

und damit auch

$$f(x') - \|f\|\,\|x' + x_0\| \leqq f(x'') + \|f\|\,\|x'' + x_0\|\,.$$

Da x' und x'' beliebig aus L waren, ist

$$\sup_{x \in L}\{f(x) - \|f\|\,\|x + x_0\|\} \leqq \inf_{x \in L}\{f(x) + \|f\|\,\|x + x_0\|\}\,.$$

Es gibt also eine reelle Zahl c, die der Ungleichung

$$\sup_{x \in L}\{f(x) - \|f\|\,\|x + x_0\|\} \leqq c \leqq \inf_{x \in L}\{f(x) + \|f\|\,\|x + x_0\|\} \tag{1}$$

genügt. Nun sei u ein beliebiges Element aus L_1. Nach dem oben Bewiesenen hat u dann die Form

$$u = x + t\,x_0$$

mit $x \in L$ und eindeutig bestimmtem reellem t. Durch die Gleichung

$$\varphi(u) = f(x) - t\,c\,,$$

wo c eine feste reelle Zahl ist, die (1) genügt, führen wir ein neues Funktional ein.

Auf L stimmen f und φ offenbar überein. φ ist additiv, da f diese Eigenschaft hat. Wir beweisen, daß $\varphi(u)$ beschränkt ist und dieselbe Norm wie $f(x)$ besitzt.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. $t > 0$. Aus $\frac{x}{t} \in L$ und (1) folgt dann

$$|\varphi(u)| = t \left| f\left(\frac{x}{t}\right) - c \right| \leqq t \left\{ ||f|| \left\| \frac{x}{t} + x_0 \right\| \right\} = ||f|| \, ||x + t\,x_0|| = ||f|| \, ||u|| ,$$

also ist

$$\varphi(u) \leqq ||f|| \, ||u|| . \tag{2}$$

2. $t < 0$. Aus (1) bekommen wir

$$f\left(\frac{x}{t}\right) - c \geqq -\,||f|| \left\| \frac{x}{t} + x_0 \right\| = -\frac{1}{|t|} ||f|| \, ||x + t\,x_0|| = \frac{1}{t} ||f|| \, ||u||$$

und hieraus

$$\varphi(u) = t \left\{ f\left(\frac{x}{t}\right) - c \right\} \leqq t \cdot \frac{1}{t} ||f|| \, ||u|| = ||f|| \, ||u|| ,$$

also wiederum (2).

Somit gilt die Ungleichung (2) für alle $u \in (L; x_0) = L_1$. Ersetzen wir in (2) u durch $-u$, so ist

$$-\varphi(u) \leqq ||f|| \, ||u|| .$$

Zusammen mit (2) ergibt sich hieraus

$$|\varphi(u)| \leqq ||f|| \, ||u||$$

und damit

$$||\varphi|| \leqq ||f|| .$$

Da nun aber das Funktional φ eine Fortsetzung von f von L auf L_1 darstellt, gilt

$$||\varphi|| \geqq ||f||$$

und folglich

$$||\varphi|| = ||f|| .$$

(Wir haben dabei die Norm des Funktionals φ bezüglich derjenigen linearen Mannigfaltigkeit bestimmt, auf der φ definiert ist.) Somit ist das Funktional $f(x)$ tatsächlich unter Erhaltung der Norm auf $L_1 = (L; x_0)$ fortgesetzt.

Wenn der Raum E separabel ist, kann der Beweis des Satzes von Banach-Hahn auf folgende Weise abgeschlossen werden. N sei eine abzählbare, überall dichte Menge in E. Wir numerieren die nicht in L liegenden Elemente dieser Menge:

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots .$$

Durch Erweiterung des Funktionals $f(x)$ auf die Mannigfaltigkeiten

$$(L; x_0) = L_1 , \quad (L_1; x_1) = L_2, \ldots$$

usw. konstruieren wir nach und nach ein lineares Funktional φ_ω, das auf einer linearen, in E überall dichten Mannigfaltigkeit L_ω definiert ist, nämlich auf der Vereinigung aller L_n. Dabei ist $||\varphi_\omega|| = ||f||$. Die stetige Fortsetzung des Funktionals φ_ω auf ganz E (Satz 3) führt uns zum gewünschten Funktional F.

Im allgemeinen Fall wird der Beweis des Satzes von BANACH-HAHN in der folgenden Weise zum Abschluß gebracht.

Wir betrachten alle möglichen Fortsetzungen des Funktionals f unter Beibehaltung der Norm. Wie oben gezeigt wurde, existieren derartige Fortsetzungen. In der Menge Φ dieser Fortsetzungen führen wir eine teilweise Ordnung ein, indem wir

$$f' \prec f''$$

setzen, wenn die lineare Mannigfaltigkeit L', auf der f' definiert ist, ein Teil der linearen Mannigfaltigkeit L'' ist, auf der f'' definiert ist, und $f'(x) = f''(x)$ für $x \in L'$ gilt. Die Relation $f' \prec f''$ besitzt alle Eigenschaften einer Ordnung.

Es sei nun $\{f_\alpha\}$ irgendeine geordnete Teilmenge der Menge Φ. Diese Teilmenge besitzt eine obere Grenze, und zwar ein auf der linearen Mannigfaltigkeit $L_* = \bigcup\limits_\alpha L_\alpha$ definiertes Funktional f_*. Dabei ist L_α der Definitionsbereich von f_α und

$$f_*(x) = f_{\alpha_0}(x)\,,$$

wenn $x \in L_*$ ein Element von L_{α_0} ist. f_* ist ein lineares Funktional mit $||f_*|| = ||f||$, d. h., es ist $f_* \in \Phi$. Folglich sind alle Bedingungen des ZORNschen Lemmas erfüllt, und Φ besitzt ein maximales Element F. Dieses Funktional ist auf ganz E definiert. Andernfalls könnte man es fortsetzen, und F wäre kein maximales Element von Φ.

Der Satz ist damit vollständig bewiesen.

Bemerkung. Da die Zahl c, die in Gleichung (1) auftritt, ganz verschieden gewählt werden kann und da Φ mehrere maximale Elemente besitzen kann, ist die Fortsetzung eines linearen Funktionals nach dem Satz von BANACH-HAHN im allgemeinen nicht eindeutig.

G. A. SUCHOMLINOW[1]) verallgemeinerte den Fortsetzungssatz auf Räume über den komplexen Zahlen und Quaternionen.

Folgerung 1. E sei ein linearer normierter Raum und $x_0 \neq 0$ ein beliebiges, aber festes Element aus E. Dann existiert ein auf E definiertes lineares Funktional $f(x)$ mit den Eigenschaften

1. $||f|| = 1$ und
2. $f(x_0) = ||x_0||$.

Beweis. Wir betrachten die Menge $\{t\,x_0\} = L$, wo t eine beliebige reelle Zahl ist. L ist der durch x_0 erzeugte Unterraum von E. Es sei nun

$$\varphi(x) = t\,||x_0|| \tag{3}$$

für $x = t\,x_0$. Offenbar gilt dann

1. $\varphi(x_0) = ||x_0||$ und
2. $|\varphi(x)| = |t|\,||x_0|| = ||t\,x_0|| = ||x||$, d. h. $||\varphi|| = 1$.

[1]) Matem. sb. 3 (45), 1938.

Setzen wir nun das Funktional $\varphi(x)$ auf den ganzen Raum fort, ohne die Norm zu verändern, so gelangen wir zu einem Funktional $f(x)$ mit den geforderten Eigenschaften.

Folgerung 2. In dem linearen normierten Raum E sei die lineare Mannigfaltigkeit L und ein Element $x \notin L$ gegeben. x habe den Abstand $d > 0$ von L $(d = \inf_{x \in L} \|x_0 - x\|)$. Dann existiert ein überall auf E definiertes Funktional $f(x)$ mit den Eigenschaften

1. $f(x) = 0$ für $x \in L$,

2. $f(x_0) = 1$ und

3. $\|f\| = \frac{1}{d}$.

Beweis. Wie wir bereits sahen, ist jedes Element der Menge $(L; x_0)$ eindeutig in der Form $u = x + t\,x_0$ mit $x \in L$ und reellem t darstellbar. Das Funktional $\varphi(u)$ definieren wir auf folgende Weise: Es sei $\varphi(u) = t$ für $u = x + t\,x_0$. Offenbar gilt dann $\varphi(x) = 0$ für $x \in L$ und $\varphi(x_0) = 1$. Wir bestimmen jetzt $\|\varphi\|$. Es gilt

$$|\varphi(u)| = |t| = \frac{|t|\,\|u\|}{\|u\|} = \frac{|t|\,\|u\|}{\|x + t\,x_0\|} = \frac{\|u\|}{\left\|\frac{x}{t} + x_0\right\|} = \frac{\|u\|}{\left\|x_0 - \left(-\frac{x}{t}\right)\right\|} \leqq \frac{\|u\|}{d}$$

und damit

$$\|\varphi\| \leqq \frac{1}{d}. \tag{4}$$

Ferner gibt es eine Folge $\{x_n\} \subset L$ mit

$$\lim_n \|x_n - x_0\| = d.$$

Man hat

$$|\varphi\,(x_n - x_0)| \leqq \|\varphi\|\,\|x_n - x_0\|,$$

und wegen

$$|\varphi\,(x_n - x_0)| = |\varphi(x_n) - \varphi(x_0)| = 1$$

ist dann

$$1 \leqq \|\varphi\|\,\|x_n - x_0\|.$$

Durch Grenzübergang folgt hieraus

$$1 \leqq \|\varphi\|\,d \tag{5}$$

oder

$$\|\varphi\| \geqq \frac{1}{d}.$$

Aus (4) und (5) ergibt sich $\|\varphi\| = \frac{1}{d}$.

Durch Fortsetzung von $\varphi(x)$ auf den ganzen Raum unter Beibehaltung der Norm erhalten wir dann ein Funktional $f(x)$ mit den geforderten Eigenschaften.

Die erste Folgerung zeigt die Existenz eines Funktionals in einem beliebigen linearen normierten Raum, welches nicht überall verschwindet. Andererseits besagt diese Folgerung, daß $x = 0$ gilt, wenn bei festem x aus E für jedes lineare Funktional aus E^* die Gleichung $f(x) = 0$ erfüllt ist.

Man kann dieser Folgerung auch die folgende geometrische Fassung geben: *Durch jeden, auf der Oberfläche der Kugel* $\|x\| \leq r$ *gelegenen Punkt* x_0 ($\|x_0\| = r$) *kann man eine Stützebene legen.*

Dieser Satz stellt eine Verallgemeinerung einer für den n-dimensionalen Raum von H. MINKOWSKI bewiesenen Behauptung dar.

Die Gleichung der Stützebene an eine solche Kugel lautet $f(x) = r\,\|f\|$. Für x_0 gibt es aber ein Funktional f_0 mit $\|f_0\| = 1$ und

$$f_0(x_0) = \|x_0\| = r\,. \tag{6}$$

Wegen (6) geht die Stützebene

$$f_0(x) = r$$

durch x_0.

Die zweite Folgerung ist interessant für das Problem, ein Element x_0 durch Linearkombinationen anderer Elemente $x_1, x_2, \ldots$ aus E zu approximieren. Aus der zweiten Folgerung ergibt sich:

x_0 ist dann und nur dann Grenzwert einer Folge von Linearkombinationen $\sum_{i=1}^{n} c_i\, x_i$, wenn $f(x_0) = 0$ ist für alle Funktionale, die für $x_1, x_2, \ldots$ verschwinden.

Wir beweisen das. Aus $f(x_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots$, folge $f(x_0) = 0$. Dann kann x_0 keinen Abstand $d > 0$ von der durch die Elemente $\{x_i\}$ erzeugten linearen Mannigfaltigkeit L haben, weil sonst nach der zweiten Folgerung ein Funktional f_0 existieren würde mit $f_0(x_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots$, aber $f_0(x_0) = 1$. Es bedeutet aber, $d = 0$, daß x_0 entweder Häufungspunkt von L ist oder selbst zu L gehört, d.h., x_0 muß durch Elemente der Form $\sum_{i=1}^{n} c_i\, x_i$ approximiert werden können.

Nun sei umgekehrt x_0 Grenzwert einer Folge von Elementen aus L, und es sei $f(x_i) = 0$ für alle Funktionale f. Setzt man

$$x_0 = \lim_n \xi_n\,, \qquad \xi_n = \sum_{i=1}^{k_n} c_i^{(n)}\, x_i\,,$$

so findet man

$$f(\xi_n) = \sum_{i=1}^{k_n} c_i^{(n)} f(x_i) = 0$$

und folglich

$$f(x_0) = f(\lim_n \xi_n) = \lim_n f(\xi_n) = 0\,.$$

§ 2. Die allgemeine Form linearer Funktionale in speziellen Funktionenräumen

Bei vielen konkreten Funktionenräumen kann man eine allgemeine Form der auf ihnen definierten linearen Funktionale angeben. Die Kenntnis der

allgemeinen Form der linearen Funktionale erweist sich bei verschiedenen Untersuchungen von Funktionenräumen als nützlich.

Lineare Funktionale im n-dimensionalen Raum E_n. f sei ein auf E_n definiertes lineares Funktional. Für

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \in E_n$$

($\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ ist eine Basis in E_n) gilt

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i f_i .$$

Umgekehrt ist ein Ausdruck der Form

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i f_i , \tag{1}$$

wobei die f_i beliebige Zahlen sind, ein lineares Funktional auf E_n. Der Ausdruck (1) gibt also die allgemeine Form eines auf dem n-dimensionalen Raum definierten linearen Funktionals an. Da die f_i als Komponenten eines n-dimensionalen Vektors f angesehen werden können, ist der zu E_n konjugierte Raum E_n^* auch ein n-dimensionaler Raum mit einer im allgemeinen von der Metrik des E_n verschiedenen Metrik.

Ist z. B. $||x|| = \max\limits_i |\xi_i|$, so ist

$$|f(x)| = \left|\sum_{i=1}^{n} \xi_i f_i\right| \leqq \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|\,|f_i| \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|\right) ||x||$$

und

$$||f|| \leqq \sum_{i=1}^{n} |f_i| . \tag{2}$$

Andererseits ist für das Element

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sign} f_i \cdot e_i \in E_n ,$$

$||x_0|| = 1$ und

$$f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sign} f_i \cdot f_i = \sum_{i=1}^{n} |f_i| = \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|\right) ||x_0|| .$$

Deshalb gilt

$$||f|| \geqq \sum_{i=1}^{n} |f_i| . \tag{3}$$

(2) und (3) ergeben $||f|| = \sum\limits_{i=1}^{n} |f_i|$.

Wird in E_n die euklidische Metrik eingeführt, so läßt sich leicht nachweisen, daß die Metrik in E_n^* auch euklidisch wird.

In Übereinstimmung mit der in der Tensoralgebra gebräuchlichen Terminologie heißen die Elemente des Raumes E_n *kontravariant* und die Elemente von E_n^*

kovariant. Das lineare Funktional $f(x)$ wird in der Form eines Skalarproduktes dargestellt:

$$f(x) = (x, f),$$

$x \in E_n$, $f \in E_n^*$.

Lineare Funktionale in s. Es sei $f(x)$ ein auf s gegebenes lineares Funktional (siehe S. 13). Wir setzen $e_n = \{\xi_i^{(n)}\}$ mit $\xi_n^{(n)} = 1$ und $\xi_i^{(n)} = 0$ für $i \neq n$. Weiter sei $f(e_n) = a_n$. Da die Konvergenz in s koordinatenweise ist, so gilt für jedes $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots\}$ die Gleichung

$$x = \lim_n \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k,$$

aus der wegen der Stetigkeit von $f(x)$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f(e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi_k$$

folgt. Diese Reihe muß nun für jede Zahlenfolge $\{\xi_k\}$ konvergieren. Das ist aber nur möglich, wenn die a_k von einer gewissen Nummer ab durchweg gleich Null sind. Folglich ist

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \xi_k.$$

Umgekehrt ist jeder solche Ausdruck mit beliebigen reellen Zahlen a_k und natürlichem N ein lineares Funktional in s. Wir haben damit das Ergebnis:

Jedes auf s definierte lineare Funktional hat die Form

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \xi_k.$$

Leicht ist einzusehen, daß N und a_k, $k = 1, 2, \ldots, N$, durch das Funktional f eindeutig bestimmt sind.

Lineare Funktionale in C [0, 1] (Satz von Riesz). $f(x)$ sei ein lineares Funktional in C [0, 1]. Da jede auf [0, 1] gegebene stetige Funktion beschränkt und meßbar ist und für jede stetige Funktion $x(t)$

$$\sup_{0 \leqq t \leqq 1} x(t) = \max_{0 \leqq t \leqq 1} x(t)$$

gilt, kann man C [0, 1] als Unterraum von M [0, 1] ansehen, da in M [0, 1]

$$||x|| = \varrho(x, 0) = \sup_{0 \leqq t \leqq 1} |x(t)|$$

ist. Das auf C [0, 1] gegebene Funktional $f(x)$ setzen wir unter Beibehaltung der Norm auf ganz M [0, 1] fort. Diese Fortsetzung werde mit $F(x)$ bezeichnet.

Für die Funktion

$$u_t(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad 0 \leqq \xi < t, \\ 0 & \text{für} \quad t \leqq \xi \leqq 1 \end{cases}$$

gilt offenbar

$$u_t(\xi) \in M\,[0, 1]\,.$$

Das durch

$$F[u_t(\xi)] = g(t)$$

erklärte $g(t)$ ist eine Funktion von beschränkter Schwankung. Mit

$$t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1$$

als Zerlegung des Intervalls [0, 1] betrachten wir die Summe

$$\sum_{i=1}^{n} [g(t_i) - g(t_{i-1})]\,.$$

Wird

$$\varepsilon_i = \operatorname{sgn}\,[g(t_i) - g(t_{i-1})]$$

gesetzt, so gilt

$$\sum_{i=1}^{n} |g(t_i) - g(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\,[g(t_i) - g(t_{i-1})]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\,[F(u_{t_i}) - F(u_{t_{i-1}})] = F\left[\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\,(u_{t_i} - u_{t_{i-1}})\right].$$

Daraus folgt

$$\sum_{i=1}^{n} |g(t_i) - g(t_{i-1})| \leqq ||F||\,\left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon\,(u_{t_i} - u_{t_{i-1}})\right\| = ||f||$$

wegen

$$||F|| = ||f|| \qquad \text{und} \qquad \left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\,(u_{t_i} - u_{t_{i-1}})\right\| = 1\,.$$

Somit haben wir schließlich

$$\left|\sum_{i=1}^{n} [g(t_i) - g(t_{i-1})]\right| \leqq ||f||\,,$$

d. h., $g(t)$ ist von beschränkter Schwankung.

Es sei $x(t)$ jetzt eine beliebige auf [0, 1] stetige Funktion. Die Funktionen

$$z_n(t) = \sum_{k=1}^{n} x\left(\frac{k}{n}\right)\left[u_{\frac{k}{n}}(t) - u_{\frac{k-1}{n}}(t)\right]$$

approximieren dann $x(t)$. Aus der Gleichung

$$F(z_n) = \sum_{k=1}^{n} x\left(\frac{k}{n}\right)\left[g\left(\frac{k}{n}\right) - g\left(\frac{k-1}{n}\right)\right]$$

folgt

$$\lim_{n} F(z_n) = \lim_{n} \sum_{k=1}^{n} x\left(\frac{k}{n}\right)\left[g\left(\frac{k}{n}\right) - g\left(\frac{k-1}{n}\right)\right] = \int_0^1 x(t)\,dg(t)\,.$$

Andererseits konvergiert die Folge $\{z_n(t)\}$ gleichmäßig gegen $x(t)$, d. h., es geht $||z_n - x|| \to 0$. Da nun $F(x)$ stetig ist, so strebt

$$F(z_n) \to F(x)\,,$$

und deshalb ist

$$F(x) = \int_0^1 x(t)\, dg(t)\,.$$

$x(t)$ war nach Voraussetzung stetig, daher gilt

$$F(x) = f(x)\,,$$

und es ist

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\, dg(t)\,. \tag{4}$$

Dabei kann die Funktion $g(t)$ durch die mit ihr in allen Stetigkeitspunkten übereinstimmende linksseitig stetige Funktion $\bar{g}(t) = g\,(t - 0)$ ersetzt werden.
Dies führt uns auf den

Satz (F. RIESZ). *Jedes lineare Funktional über* $C\,[0, 1]$ *läßt sich durch ein* STIELTJES-*Integral* (4) *darstellen. Dabei ist* $g(t)$ *durch das Funktional* $f(x)$ *bestimmt und von beschränkter Schwankung.*

Wie man leicht sieht, ist umgekehrt auch

$$\varphi(x) = \int_0^1 x(t)\, dh(t)$$

mit $h(t)$ von beschränkter Schwankung ein lineares Funktional in $C\,[0, 1]$.

Offenbar ist $\varphi(x)$ additiv. Da man für gleichmäßig konvergierende Funktionenfolgen unter dem STIELTJES-Integral zur Grenze übergehen kann, so ist $\varphi(x)$ außerdem stetig. Somit ist (4) die allgemeine Form linearer Funktionale in $C\,[0, 1]$, d. h., läßt man $g(t)$ alle Funktionen von beschränkter Schwankung durchlaufen, so erhält man alle linearen Funktionale in $C\,[0, 1]$.

Wir wollen die Norm von $f(x)$ bestimmen. Zunächst gilt

$$\sum_{i=1}^{n} |g(t_i) - g(t_{i-1})| \leqq ||f||$$

und damit

$$\overset{1}{\underset{0}{\mathrm{Var}}}\,(g) \leqq ||f||\,. \tag{5}$$

Aus (5) folgt andererseits

$$|f(x)| = \left|\int_0^1 x(t)\, dg(t)\right| \leqq \max_{t\in[0,1]} |x(t)|\, \overset{1}{\underset{0}{\mathrm{Var}}}\,(g) = ||x||\, \overset{1}{\underset{0}{\mathrm{Var}}}\,(g)\,.$$

Somit ist

$$||f|| \leqq \overset{1}{\underset{0}{\mathrm{Var}}}\,(g)\,. \tag{6}$$

Aus (5) und (6) ergibt sich

$$||f|| = \overset{1}{\underset{0}{\mathrm{Var}}}\,(g)\,. \tag{7}$$

Werden zwei Funktionen mit beschränkter Schwankung als gleich angesehen, wenn sie sich an allen ihren Stetigkeitsstellen höchstens um eine additive Kon-

stante unterscheiden, so ist offenbar die obige Zuordnung zwischen den linearen Funktionalen in $C\,[0, 1]$ und den Funktionen von beschränkter Schwankung umkehrbar eindeutig.

Ersetzt man in (4) die Funktion $g(t)$ durch $\bar{g}(t)$, so bleibt die Ungleichung (6) richtig, und die Ungleichung (5) verschärft sich höchstens noch. Folglich behält die Gleichung (7) ihre Gültigkeit.

A. A. Markow[1]) erweiterte den Satz von Riesz, indem er die allgemeine Form linearer Funktionale im Raum $C(K)$ der auf einem Kompaktum K stetigen Funktionen fand.

Die allgemeine Form linearer Funktionale in l_p. $f(x)$ sei ein auf l_p definiertes lineares Funktional. Da die Elemente $e_k = \{\xi_i^{(k)}\}$ mit $\xi_k^{(k)} = 1$ und $\xi_i^{(k)} = 0$ bei $i \neq k$ eine Basis von l_p bilden, läßt sich jedes Element $x \in l_p$ in der Form

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$$

darstellen. Aus der Linearität von $f(x)$ erhält man

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f(x_k)\,.$$

Die Zahlen $f(e_k) = c_k$ sind durch f eindeutig bestimmt. Mit ihnen schreibt man für die letzte Gleichung

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k c_k\,. \tag{8}$$

Es sei $x_n = \{\xi_k^{(n)}\}$ mit

$$\xi_k^{(n)} = \begin{cases} |c_k|^{q-1} \operatorname{sign} c_k & \text{für} \quad k \leqq n\,, \\ 0 & \text{für} \quad k > n\,. \end{cases}$$

Wie früher soll auch jetzt wieder für q gelten $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann ist

$$f(x_n) = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^q$$

und andererseits

$$f(x_n) \leqq ||f||\;||x_n|| = ||f|| \left(\sum_{k=1}^{n} |c_k|^{(q-1)\,p} \right)^{1/p} = ||f|| \left(\sum_{k=1}^{n} |c_k|^q \right)^{1/p}.$$

So erhält man

$$\sum_{k=1}^{n} |c_k|^q \leqq ||f|| \left(\sum_{k=1}^{n} |c_k|^q \right)^{1/p},$$

woraus

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |c_k|^q \right)^{1/q} \leqq ||f||$$

folgt. Diese Ungleichung gilt für beliebiges n. Für $n \to \infty$ hat man daher

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^q \right)^{1/q} \leqq ||f||\,, \tag{9}$$

[1]) Matem. sb. 4 (46), 1938.

d. h., es ist

$$\{c_k\} \in l_q .$$

Nehmen wir umgekehrt eine beliebige Folge $\{d_k\} \in l_q$, dann ist

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k d_k$$

ein lineares Funktional in l_p. Neben der trivialen Additivität ergibt sich die Beschränktheit von $\varphi(x)$ aus der Hölderschen Ungleichung.

Damit haben wir gefunden:

Gleichung (8) *stellt die allgemeine Form eines auf l_p definierten linearen Funktionals dar.*

Wir berechnen noch die Norm eines solchen Funktionals f. Mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung erhält man aus (8) sofort

$$|f(x)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k c_k\right| \leqq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^q\right)^{1/q} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^q\right)^{1/q} ||x||$$

und hieraus

$$||f|| \leqq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^q\right)^{1/q}. \tag{10}$$

Mit (9) ergibt sich

$$||f|| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^q\right)^{1/q}.$$

Folgerung. Wir betrachten den Raum l_2. Jedes lineare auf l_2 definierte Funktional läßt sich allgemein in der Form

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k c_k$$

schreiben, wo $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$ und $||f|| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2}$ ist.

In der Funktionalanalysis betrachtet man außer dem Raum l_p auch den *Raum* l, dessen Elemente alle Zahlenfolgen

$$x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots\}$$

mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| < \infty$$

sind. Eine Norm wird durch

$$||x|| = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|$$

eingeführt. Es läßt sich zeigen, daß jedes lineare Funktional im Raum l die Gestalt

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k$$

annimmt. $\{c_k\}$ ist hierbei eine beschränkte reelle Zahlenfolge. Die Norm des Funktionals f wird durch die Gleichung

$$||f|| = \sup_k |c_k|$$

gegeben.

Lineare Funktionale in L_p [0, 1]. Wir betrachten irgendein lineares Funktional $f(x)$ aus $L_p[0, 1]$ für $p > 1$, setzen

$$u_t(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad 0 \leqq \xi < t\,, \\ 0 & \text{für} \quad t \leqq \xi \leqq 1 \end{cases}$$

und beweisen, daß $g(t) = f[u_t(\xi)]$ absolut stetig ist. Dazu sei $\delta_i = (\tau_i, t_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, ein beliebiges System sich nicht überdeckender in [0, 1] gelegener Intervalle. Außerdem benutzen wir die schon auf S. 126 definierten ε_i.

Es gilt dann

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |g(t_i) - g(\tau_i)| &= \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \,[g(t_i) - g(\tau_i)] \\
&= f\left\{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \,[u_{t_i}(\xi) - u_{\tau_i}(\xi)]\right\} \leqq ||f|| \left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \,[u_{t_i}(\xi) - u_{\tau_i}(\xi)]\right\| \\
&= ||f|| \left(\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \,[u_{t_i}(\xi) - u_{\tau_i}(\xi)]\right|^p d\xi\right)^{1/p} \\
&\leqq ||f|| \left(\sum_{i=1}^{n} \int_{\delta_i} d\xi\right)^{1/p} = ||f|| \left(\sum_{i=1}^{n} \text{Maß}\ \delta_i\right)^{1/p},
\end{aligned}$$

also ist $g(t)$ absolut stetig. Als absolut stetige Funktion besitzt $g(t)$ eine fast überall L-integrable Ableitung, und $g(t)$ ist gleich dem LEBESGUEschen Integral seiner Ableitung. Setzt man $\alpha(t) = g'(t)$, so ist

$$g(t) = g(0) + \int_0^t \alpha(\tau)\, d\tau\,.$$

Nun muß aber

$$g(0) = f[u_0(\xi)] = 0$$

sein, weil

$$u_0(\xi) \equiv 0$$

das Nullelement von L_p [0, 1] ist. Folglich gilt

$$g(t) = \int_0^t \alpha(\tau)\, d\tau\,.$$

Mit den oben erklärten Funktionen $u_t(\tau)$ erhalten wir

$$f\big(u_t(\tau)\big) = g(t) = \int_0^t \alpha(\tau)\, d\tau = \int_0^1 u_t(\tau)\, \alpha(\tau)\, d\tau\,,$$

und da f ein lineares Funktional sein sollte, so gilt

$$f(z_n) = \int_0^1 z_n(\tau)\, \alpha(\tau)\, d\tau\,,$$

wenn

$$z_n(\tau) = \sum_{k=1}^{n} c_k \left[u_{\frac{k}{n}}(\tau) - u_{\frac{k-1}{n}}(\tau) \right]$$

gesetzt wird.

Ist $x(t)$ eine beliebige beschränkte und meßbare Funktion, dann kann man eine Folge $\{z_m(t)\}$ von stückweise konstanten Funktionen angeben, so daß fast überall

$$z_m(t) \to x(t)$$

konvergiert. Dabei kann $\{z_m(t)\}$ als gleichmäßig beschränkt angenommen werden.

Nach dem Satz von LEBESGUE über die Integration einer beschränkten Folge erhalten wir

$$\lim_m f(z_m) = \lim_m \int_0^1 z_m(\tau)\, \alpha(\tau)\, d\tau = \int_0^1 \lim_m z_m(\tau)\, \alpha(\tau)\, d\tau = \int_0^1 x(\tau)\, \alpha(\tau)\, d\tau .$$

Da andererseits fast überall

$$z_m(t) \to x(t)$$

strebt, so geht

$$\|z_m - x\| = \left(\int_0^1 |z_m(t) - x(t)|^p\, dt \right)^{1/p} \to 0$$

für $m \to \infty$. Deshalb strebt $f(z_m) \to f(x)$, und es ist schließlich

$$f(x) = \int_0^1 x(\tau)\, \alpha(\tau)\, d\tau .$$

Die durch

$$x_n(t) = \begin{cases} |\alpha(t)|^{q-1} \operatorname{sgn} \alpha(t)\,, & \text{wenn} \quad |\alpha(t)| \leqq n\,, \\ 0, & \text{wenn} \quad |\alpha(t)| > n \end{cases}$$

definierten Funktionen sind beschränkt und meßbar. Dabei ist q die zu p konjugierte Zahl, d. h., es ist $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Folglich ist

$$f(x_n) = \int_0^1 x_n(t)\, \alpha(t)\, dt$$

und

$$|f(x_n)| \leqq \|f\|\, \|x_n\| = \|f\| \left(\int_0^1 |x_n(t)|^p\, dt \right)^{1/p} .$$

Andererseits gilt

$$|f(x_n)| = f(x_n) = \int_0^1 x_n(t)\, \alpha(t)\, dt = \int_0^1 |x_n(t)|\, |\alpha(t)|\, dt$$

$$\geqq \int_0^1 |x_n(t)|\, |x_n(t)|^{\frac{1}{q-1}}\, dt = \int_0^1 |x_n(t)|^{\frac{q}{q-1}}\, dt = \int_0^1 |x_n(t)|^p\, dt .$$

Also ergibt sich

$$\int_0^1 |x_n(t)|^p\, dt \leqq ||f||\, ||x_n|| = ||f|| \left(\int_0^1 |x_n(t)|^p\, dt\right)^{1/p}$$

und daraus

$$\left(\int_0^1 |x_n(t)|^p\, dt\right)^{1/q} \leqq ||f||\,.$$

Offenbar geht aber

$$|x_n(t)| \to |\alpha(t)|^{q-1}$$

fast überall auf [0, 1] für $n \to \infty$, weil $\alpha(t)$ L-integrabel ist und folglich nur für eine Punktmenge vom Maß Null unendlich wird. Für $n \to \infty$ erhält man

$$\left(\int_0^1 |\alpha(t)|^{(q-1)\,p}\, dt\right)^{1/q} \leqq ||f||$$

oder

$$\left(\int_0^1 |\alpha(t)|^q\, dt\right)^{1/q} \leqq ||f||\,. \tag{11}$$

Also ist

$$\alpha(t) \in L_q\,[0, 1]\,.$$

Ist $x(t)$ jetzt eine beliebige Funktion aus $L_p\,[0, 1]$, dann existiert

$$\int_0^1 x(t)\, \alpha(t)\, dt$$

wegen der HÖLDERschen Ungleichung. Ferner läßt sich eine Folge beschränkter Funktionen $\{x_m(t)\}$ angeben, wobei

$$\int_0^1 |x(t) - x_m(t)|^p\, dt \to 0$$

strebt für $m \to \infty$. Nach der HÖLDERschen Ungleichung geht

$$\int_0^1 x_m(t)\, \alpha(t)\, dt \to \int_0^1 x(t)\, \alpha(t)\, dt\,.$$

Da aber die $x_m(t)$ beschränkte meßbare Funktionen sein sollten, so ist

$$\int_0^1 x_m(t)\, \alpha(t)\, dt = f(x_m)\,,$$

und folglich strebt

$$f(x_m) \to \int_0^1 x(t)\, \alpha(t)\, dt$$

für $m \to \infty$. Andererseits konvergiert

$$f(x_m) \to f(x)\,.$$

Es gilt also

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\, \alpha(t)\, dt\,. \tag{12}$$

Wir haben damit das Ergebnis: Jedes auf L_p [0, 1] definierte Funktional läßt sich in der Form (12) darstellen. Ist $\beta(t)$ eine beliebige zu L_q [0, 1] gehörige Funktion, so ist umgekehrt auch

$$\varphi(x) = \int_0^1 x(t)\, \beta(t)\, dt$$

ein auf L_p [0, 1] definiertes lineares Funktional, weil $\varphi(x)$ additiv und wegen der HÖLDERschen Ungleichung auch beschränkt ist.

Die Formel (12) stellt also für ein beliebiges $\alpha(t) \in L_q$ [0, 1] die allgemeine Form der auf L_p [0, 1] definierten linearen Funktionale dar.

Die Norm eines solchen Funktionals läßt sich leicht angeben. Aus (12) folgt zunächst

$$|f(x)| = \left|\int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\, dt\right| \leqq \left(\int_0^1 |x(t)|^p\, dt\right)^{1/p} \left(\int_0^1 |\alpha(t)|^q\, dt\right)^{1/q} = ||x|| \left(\int_0^1 |\alpha(t)|^q\, dt\right)^{1/q}.$$

Also gilt

$$||f|| \leqq \left(\int_0^1 |\alpha(t)|^q\, dt\right)^{1/q}. \tag{13}$$

Aus (13) und (11) schließt man

$$||f|| = \left(\int_1^0 |\alpha(t)|^q\, dt\right)^{1/q}.$$

Häufig betrachtet man den *Raum* $L[0, 1] = L_1[0, 1]$ der im Sinne von LEBESGUE integrablen Funktionen. Dann ist also $||x|| = \int_0^1 |x(t)|\, dt$. Die allgemeine Form der auf $L[0, 1]$ definierten linearen Funktionale wird dann $f(x) = \int_0^1 x(t)\, \alpha(t)\, dt$, wo $\alpha(t)$ fast überall beschränkt ist. Für die Norm ergibt sich

$$||f|| = \operatorname*{vrai\,max}_{[0,1]} |\alpha(t)|\,.$$

Die allgemeine Form linearer Funktionale im HILBERT-Raum. Wir betrachten ein lineares Funktional $f(x)$ auf einem HILBERT-Raum H. Da H ein komplexer linearer Raum ist, wird man natürlich für $f(x)$ komplexe Werte zulassen. Ein komplexes Funktional heißt *linear*, wenn es additiv, homogen und stetig ist (diese drei Bedingungen sind für komplexe Funktionale unabhängig).

Es sei $f(x)$ ein beliebiges auf H definiertes lineares Funktional. Mit L werde die Menge der Nullstellen dieses Funktionals, d. h. die Gesamtheit der $x \in H$ mit $f(x) = 0$, bezeichnet. Offenbar ist L ein Unterraum von H. Denn L bildet wegen der Additivität und Homogenität von $f(x)$ eine lineare Mannigfaltigkeit und ist abgeschlossen, weil $f(x)$ stetig ist.

Für ein beliebiges Element x aus H, welches nicht zu L gehöre, werde mit x_0 die Projektion von x auf den Unterraum $H \dot{-} L$ bezeichnet. Dann ist offenbar

$f(x_0) = \alpha \neq 0$. Für $x_1 = \frac{x_0}{\alpha}$ hat man $f(x_1) = 1$. Ist nun x ein beliebiges Element aus H und $f(x) = \beta$, so gilt

$$f(x) - \beta f(x_1) = 0$$

oder

$$f(x - \beta x_1) = 0 .$$

Also muß $x - \beta x_1 = z$ mit $z \in L$ oder

$$x = \beta x_1 + z$$

sein. Diese Gleichung zeigt, daß H die orthogonale Summe des Unterraumes L und des durch x_1 erzeugten eindimensionalen Unterraumes ist.

Da $x_1 \perp z$ ist, so haben wir

$$(x, x_1) = \beta \, ||x_1||^2$$

oder, da $\beta = f(x)$ ist,

$$f(x) = \left(x, \frac{x_1}{||x_1||^2}\right).$$

Wird $\frac{x_1}{||x_1||^2}$ mit u bezeichnet, so gilt

$$f(x) = (x, u) , \tag{14}$$

d. h. die Darstellung von $f(x)$ als inneres Produkt das Element x mit einem festen Element u.

Durch $f(x)$ ist u eindeutig bestimmt. Wäre auch

$$f(x) = (x, v) ,$$

so würde

$$(x, u - v) = 0$$

folgen. Da diese Beziehung für beliebiges $x \in H$ gelten müßte, so kann nur $u = v$ sein.

Aus (14) erhält man weiter

$$|f(x)| = |(x, u)| \leqq ||u|| \, ||x||$$

d. h., es gilt

$$||f|| \leqq ||u|| .$$

Andererseits ist

$$f(u) = (u, u) = ||u||^2 .$$

Also kann $||f||$ nicht kleiner als $||u||$ sein, somit ist $||f|| = ||u||$.

Zusammenfassend gilt: *Jedes lineare, auf einem* HILBERT-*Raum definierte Funktional $f(x)$ besitzt die Form*

$$f(x) = (x, u) ,$$

wobei u durch $f(x)$ eindeutig bestimmt und

$$||f|| = ||u|| \tag{15}$$

ist.

Auch umgekehrt ist für ein beliebiges $u \in H$ durch (14) *ein Funktional f definiert, und die Norm von f genügt der Gleichung* (15). (14) *ist also die allgemeine Form linearer Funktionale in einem* HILBERT-*Raum.*

§ 3. Konjugierte Räume und adjungierte Operatoren

Wie schon erwähnt wurde, bildet die Gesamtheit aller auf dem linearen normierten Raum E definierten linearen Funktionale einen BANACH-Raum E^*, der zu dem Raum E konjugiert ist. Unter Benutzung der allgemeinen Form der linearen Funktionale kann man in bestimmten Fällen den Raum E^* bis auf Isomorphie genau realisieren.

1. Es sei $E = C\,[0, 1]$. Wir betrachten die Menge der auf $[0, 1]$ definierten linksseitig stetigen Funktionen $g(t)$ von beschränkter Schwankung, die für $t = 0$ verschwinden. Diese bilden offenbar eine lineare Mannigfaltigkeit, wenn man in der üblichen Weise die Addition zweier Funktionen und die Multiplikation einer Funktion mit einer reellen Zahl erklärt. Die Norm einer solchen Funktion definieren wir durch $||g|| = \operatorname*{Var}_0^1 (g)$. Die Axiome der Norm sind offenbar erfüllt.

Der so erhaltene lineare normierte Raum v ist der der Funktionen mit beschränkter Schwankung.

Betrachten wir den Raum $E^* = C^*\,[0, 1]$ aller linearen Funktionale, die auf $C\,[0, 1]$ definiert sind, so entspricht jedem linearen Funktional $f \in C^*\,[0, 1]$ eindeutig eine Funktion $g(t)$ mit $g(0) = 0$ und beschränkter Schwankung. Umgekehrt ist den Funktionen $g(t)$ mit $g(0) = 0$ und beschränkter Schwankung ein Funktional $f \in C^*\,[0, 1]$ zugeordnet. Deshalb besteht zwischen der Menge aller linearen Funktionale aus $C^*\,[0, 1]$ und allen Elementen des Raumes der Funktionen mit beschränkter Schwankung eine umkehrbar eindeutige Zuordnung. Offenbar entspricht bei dieser Zuordnung, falls den Funktionalen f_1, f_2 die Funktionen $g_1(t)$, $g_2(t)$ zugeordnet sind, der Summe $f_1(t) + f_2(t)$ die Summe $g_1(t) + g_2(t)$ und dem Funktional $\lambda f(t)$ die Funktion $\lambda\, g(t)$. Diese Zuordnung zwischen $C^*\,[0, 1]$ und dem Raum der Funktionen mit beschränkter Schwankung ist also ein Isomorphismus. Da außerdem $||f|| = \operatorname*{Var}_0^1 (g) = ||g||$ gilt, ist diese Zuordnung isometrisch.

Vom Standpunkt der Funktionalanalysis aus sind diese beiden Räume gleich. Man sagt deshalb oft, daß $C^*\,[0, 1]$ der Raum der Funktionen mit beschränkter Schwankung ist.

2. Es sei $E = L_p\,[0, 1]$. Wir betrachten außerdem den Raum $L_q\,[0, 1]$ mit $q = \frac{1}{p-1}$. Da jedem Funktional $f \in L_p^*\,[0, 1]$ eindeutig eine Funktion $\alpha(t) \in L_q\,[0, 1]$ entspricht und umgekehrt, besteht zwischen den Räumen $L_p^*\,[0, 1]$ und $L_q\,[0, 1]$ eine umkehrbar eindeutige Zuordnung. Wie früher überzeugen wir uns davon, daß diese Zuordnung isomorph und isometrisch ist, d. h., es ist

$L_p^* [0, 1] = L_q (0, 1]$ bis auf Isomorphie und Isometrie. Insbesondere gilt bei $p = 2: L_2^* [0, 1] = L_2 [0, 1]$. Deshalb heißt der Raum $L_2 [0, 1]$ *zu sich selbst konjugiert*.

3. Es ist $l_p^* = l_q$, speziell $l_2^* = l_2$.

Wir haben in Kapitel III, § 4, S. 101 gesehen, daß ein zu einem linearen normierten, nicht unbedingt vollständigen Raum konjugierter Raum ein BANACH-Raum ist, d. h. ein vollständiger linearer normierter Raum. Da nun $L_p [0, 1]$ konjugiert zu $L_q [0, 1]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und l_p zu l_q konjugiert ist, erhalten wir als Folgerung von 2. und 3. einen neuen Beweis für die Vollständigkeit der Räume L_p [0, 1] und l_p.

4. Ein lineares Funktional im HILBERT-Raum wird von einem Element desselben Raumes erzeugt. Der HILBERT-Raum ist selbstkonjugiert.

Aus dem gleichen Grunde ist auch der n-dimensionale euklidische Raum selbstkonjugiert.

Reflexive Räume. E sei ein linearer normierter Raum und E^* der konjugierte. Da E^* ebenfalls ein linearer normierter Raum ist, kann man $E^{**} = (E^*)^*$ usw. konstruieren.

Wir betrachten E^{**} ausführlicher. Es ist der Raum der auf E^* definierten linearen Funktionale. Die Elemente von E^* sind auf E definierte lineare Funktionale. Wir betrachten das auf E definierte lineare Funktional $f(x)$. Hier wird das Funktional f festgehalten, und x durchläuft alle Elemente von E.

Man kann den Ausdruck $f(x)$ auch anders interpretieren.

Ist etwa

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\, dg(t)\,,$$

so haben wir bei festem $g(t)$ und veränderlichem $x(t)$ den ersten Fall; festes $x(t)$ und veränderliches $g(t)$ entspricht dagegen dem zweiten Fall.

Hält man x fest und läßt f die Elemente von E^* durchlaufen, so entspricht jedem $f \in E^*$ eine reelle Zahl. Der Ausdruck $f(x)$ ist also für festes x und veränderliches f ein auf E^* definiertes Funktional F_x. Man kann deshalb

$$f(x) = F_x(f)$$

schreiben. Da, wie leicht einzusehen ist, F_x sogar ein lineares Funktional ist, gilt $F_x \in E^{**}$. Denn es ist

$$F_x (f_1 + f_2) = (f_1 + f_2) (x) = f_1(x) + f_2(x) = F_x(f_1) + F_x(f_2)\,.$$

Aus

$$|F_x(f)| = |f(x)| \leqq ||x||\, ||f||$$

folgt insbesondere

$$||F_x|| \leqq ||x||\,. \tag{1}$$

Nach der ersten Folgerung aus dem Satz von BANACH-HAHN gibt es zu jedem x ein lineares Funktional f_0 mit $f_0(x) = ||x||$ und $||f_0|| = 1$. Für ein solches Funktional ist $|F_x(f_0)| = |f_0(x)| = ||x||$ oder $|F_x(f_0)| = ||f_0||\, ||x||$, was dasselbe be-

deutet. Also haben wir

$$||F_x|| \geqq ||x|| \,. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt

$$||F_x|| = ||x|| \,. \tag{3}$$

Offenbar ist auch

$$F_{x_1+x_2}(f) = F_{x_1}(f) + F_{x_2}(f)$$

und

$$F_{\lambda x}(f) = \lambda\, F_x(f) \,.$$

Somit entspricht jedem $x \in E$ ein wohlbestimmtes Funktional $F_x \in E^{**}$. Dabei ist diese Zuordnung zwischen dem Raum E und der Menge $\{F_x\} \subseteq E^{**}$ isomorph und isometrisch [die umkehrbare Eindeutigkeit zwischen E und $\{F_x\}$ folgt aus (3)], d. h., es ist $E \subseteq E^{**}$. Ist $E = E^{**}$, so heißt der Raum E *reflexiv*.

Beispiele. 1. Der n-dimensionale euklidische Raum ist reflexiv. Ist E ein solcher Raum, so ist E^* ebenfalls ein n-dimensionaler euklidischer Raum, folglich auch E^{**}. Ist aber ein n-dimensionaler Raum Teil eines anderen, so stimmen beide überein. Aus $E \subseteq E^{**}$ folgt deshalb $E = E^{**}$.

2. Der Raum $L_p\,[0, 1]\,(p > 1)$ ist reflexiv. Denn es gilt

$$L_p^{**}\,[0, 1] = (L_p^*\,[0, 1])^* = (L_q\,[0, 1])^* = L_p\,[0, 1]\,.$$

3. $l_p\,(p > 1)$ ist reflexiv. Man schließt analog wie bei 2.

4. $C\,[0, 1]$ ist nicht reflexiv. Angenommen $C\,[0, 1]$ wäre reflexiv. Ein beliebiges lineares, auf dem Raum V der Funktionen von beschränkter Schwankung definiertes Funktional $F(f)$ muß bei passender Wahl von $x \in C\,[0, 1]$ dann die Gestalt $F_x(f) = f(x)$ haben. Erinnern wir uns an die allgemeine Form der auf $C\,[0, 1]$ definierten Funktionale, so können wir für ein beliebiges $F(f)$

$$F_x(f) = f(x) = \int_0^1 x(t)\, df(t) \tag{4}$$

schreiben. Mit $f(t)$ bezeichnen wir die dem Funktional $f(x)$ aus $C^*\,[0, 1]$ zugeordnete Funktion von beschränkter Schwankung. Das Funktional

$$F_{x_0}(f) = f\,(t_0 + 0) - f\,(t_0 - 0)$$

ordnet jeder Funktion $f(t)$ mit beschränkter Schwankung ihren Sprung im Punkt t_0 zu. Offenbar ist $F_{x_0}(f)$ additiv. Aus

$$|F_{x_0}(f)| = |f\,(t_0 + 0) - f\,(t_0 - 0)| \leqq \operatorname*{Var}_0^1 (f) = ||f||$$

folgt die Beschränktheit von $F_{x_0}(f)$ und die Tatsache, daß die Norm von $F_{x_0}(f)$ nicht größer als 1 sein kann. Außerdem ist offenbar $F_{x_0}(f) \not\equiv 0$. Es genügt nämlich, $F_{x_0}(f_1)$ mit $f_1(t) = \begin{cases} 0 \text{ für } 0 \leqq t < t_0, \\ 1 \text{ für } t_0 \leqq t \leqq 1 \end{cases}$ zu betrachten. Wegen (4) muß es eine stetige Funktion $x_0(t)$ geben derart, daß

$$F_{x_0}(f) = \int_0^1 x_0(t)\, df(t) \tag{5}$$

gilt. Für

$$f_0(t) = \int_0^t x_0(\tau)\, d\tau$$

hat man $F_{x_0}(f_0) = 0$, weil $f_0(t)$ stetig auf [0, 1] ist. Andererseits ist aber

$$F_{x_0}(f_0) = \int_0^1 x_0(t)\, df_0(t) = \int_0^1 x_0^2(t)\, dt > 0\,,$$

da $x_0(t) \not\equiv 0$ ist. Sonst wäre $F_{x_0}(f) = 0$. Das ist ein Widerspruch.

Dieser Widerspruch entstand auf Grund der Annahme, daß jedes lineare Funktional $F \in C^{**}[0, 1]$ die Form F_x besitzt, d. h., daß der Raum $C[0, 1]$ reflexiv ist. Demzufolge ist der Raum $C[0, 1]$ nicht reflexiv.

A. J. PLESSNER bewies: Entweder es ist $E = E^{**}$, oder es sind alle Räume E, E^*, E^{**}, E^{***}, ... verschieden. Näheres dazu siehe [6].

Adjungierte Operatoren. Wir betrachten einen linearen beschränkten Operator $y = A\,x$, der den linearen normierten Raum E_x in den linearen normierten Raum E_y abbildet. Es sei $\varphi(y)$ ein auf E_y definiertes lineares Funktional. Dann ist $\varphi(y)$ definiert für $y = A\,x$, wo x ein beliebiges Element aus E ist. Es gilt

$$\varphi(y) = \varphi\,(A\,x) = f(x)\,.$$

$f(x)$ stellt ein gewisses auf E definiertes Funktional dar. Offenbar ist $f(x)$ linear. Somit entspricht jedem $\varphi \in E_y^*$ ein Funktional $f \in E_x^*$.

Die Gesamtheit der so erhaltenen Zuordnungen bildet einen gewissen Operator, der auf E_y^* definiert ist und dessen Wertevorrat E_x^* angehört. Dieser Operator wird mit A^* bezeichnet und heißt der zu A *adjungierte Operator*. Für die Gleichung $\varphi(y) = f(x)$ schreiben wir

$$f = A^*\,\varphi\,.$$

Beispiele. 1. A sei ein Operator aus $(E \to E)$, wo E der n-dimensionale Raum ist. Dann wird A durch eine Matrix (a_{ij}) der Ordnung n gegeben, und für

$$y = A\,x$$

mit $y = \{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n\}$, $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ kann man auch schreiben $\eta_i = \sum_j a_{ij}\,\xi_j$. Für jedes lineare Funktional $f \in E^*$ gilt

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)\,, \quad f(x) = \sum_i f_i\,\xi_i$$

und deshalb

$$f(A\,x) = \sum_i f_i\,\eta_i = \sum_i \sum_j f_i\,a_{ij}\,\xi_j = \sum_i \sum_j a_{ij}\,f_i\,\xi_j = \sum_j \Big(\sum_j a_{ij}\,f_i\Big)\,\xi_j = \sum_j g_j\,\xi_j$$

mit

$$g_j = \sum_i a_{ij}\,f_i\,.$$

Der Vektor $g = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ ist ein Element von E^*. Man erhält g aus dem Vektor $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ desselben Raumes durch die lineare Abbildung $g = A^*\,f$, wo A^* die zu transponierte Matrix ist. Dem adjungierten Operator entspricht deshalb im n-dimensionalen Raum die transponierte Matrix.

2. Wir betrachten in $L_2\,[0, 1]$ den FREDHOLMschen Operator

$$A\,x = y(t) = \int_0^1 K(t, s)\,x(s)\,ds$$

mit stetigem Kern $K(t, s)$.

Ein beliebiges lineares Funktional $f(y)$ auf $L_2[0,1]$ hat die Form

$$f(y) = (y, f) = \int_0^1 y(t) f(t)\, dt\,, \qquad f(t) \in L_2\,[0, 1]\,.$$

Deshalb ist

$$f(A\,x) = \int_0^1 f(t) \left\{\int_0^1 K(t, s)\, x(s)\, ds\right\} dt = \int_0^1 x(s) \left\{\int_0^1 K(t, s) f(t)\, dt\right\} ds$$

$$= \int_0^1 x(s)\, g(s)\, ds$$

mit

$$g(t) = \int_0^1 K(s, t) f(s)\, ds\,.$$

Im vorliegenden Falle entspricht somit dem adjungierten Operator die Vertauschung der Veränderlichen s und t im Kern $K(t, s)$ ($K(s, t)$ bezeichnet man als den zu $K(t, s)$ transponierten Kern).

Satz 1. *Der zu dem linearen Operator A, welcher den linearen normierten Raum E_x in den linearen normierten Raum E_y abbildet, adjungierte Operator A^* ist ebenfalls ein linearer Operator, und es gilt $\|A^*\| = \|A\|$.*

Zunächst ist klar, daß A^* additiv ist. Weiter gilt

$$|(A^*\varphi)\,(x)| = |f(x)| = |\varphi\,(A\,x)| \leqq \|\varphi\|\;\|A\,x\| \leqq \|\varphi\|\;\|A\|\;\|x\|\,.$$

Daraus folgt $\|f\| \leqq \|\varphi\|\;\|A\|$. Da $f = A^*\varphi$ ist, ergibt sich

$$\|A^*\varphi\| \leqq \|A\|\;\|\varphi\|\,.$$

A^* ist somit ein beschränkter Operator, für den

$$\|A^*\| \leqq \|A\| \tag{6}$$

gilt. x_0 sei nun irgendein Element aus E_x. Nach der ersten Folgerung aus dem Satz von BANACH-HAHN gibt es dann ein Funktional $\varphi_0 \in E_y^*$ mit $\|\varphi_0\| = 1$ und $\varphi_0(A\,x_0) = \|A\,x_0\|$. Hieraus erhalten wir

$$\|A\,x_0\| = \varphi_0\,(A\,x_0) = f_0(x_0) \leqq \|f_0\|\;\|x_0\| = \|A^*\varphi_0\|\;\|x_0\| \leqq \|A^*\|\;\|\varphi_0\|\;\|x_0\|$$
$$= \|A^*\|\;\|x_0\|\,,$$

also gilt

$$\|A\| \leqq \|A^*\|\,. \tag{7}$$

Aus dieser Ungleichung und (6) folgt $\|A\| = \|A^*\|$.

Der Begriff des adjungierten Operators kann auch dann eingeführt werden, wenn der Ausgangsoperator A ein linearer, nicht beschränkter, auf einer in einem linearen normierten Raum E_x überall dichten linearen Mannigfaltigkeit L_x definierter Operator ist, dessen Werte in einem Raum E_y liegen. A sei solch ein Operator und $\varphi \in E_y^*$. Wir betrachten

$$\varphi\,(A\,x) = f_0(x)\,, \qquad x \in L_x\,.$$

Dann ist offenbar $f_0(x)$ ein additives und homogenes auf L_x definiertes Funktional. Für ein beliebiges Funktional φ aus E_y^* wird das Funktional f_0 im allgemeinen nicht beschränkt sein. Ist jedoch für ein $\varphi \in E_y^*$ das Funktional f beschränkt, so kann es stetig zu einem linearen Funktional f, das auf ganz E_x definiert ist, fortgesetzt werden.

Wir haben so auf einer Mannigfaltigkeit $L_y^* \subset E_y^*$ einen Operator A^* definiert, der den linearen Funktionalen $\varphi \in L_y^*$ die linearen Funktionale $f \in E_x^*$ zuordnet. Dieser Operator heißt *adjungiert* zum linearen unbeschränkten Operator A. Wie man leicht sieht, ist L_y eine lineare Mannigfaltigkeit und der lineare Operator A^* auf L_y^* im allgemeinen nicht beschränkt.

Beispiel. G sei ein beschränktes meßbares Gebiet der Ebene. Wir betrachten im Raum $L_q(G)$ den Differentiationsoperator

$$A = \frac{\partial^l}{\partial x^{l_1}, \partial y^{l_2}}, \qquad l_1 + l_2 = l,$$

der auf der linearen Mannigfaltigkeit $L_0 \subset L_q(G)$ der l-mal stetig differenzierbaren Funktionen, die auf einem Randstreifen von G verschwinden, definiert ist. Die Mannigfaltigkeit L_0 ist überall dicht in $L_q(G)$ und der Operator A auf ihr distributiv und nicht beschränkt. Die Werte des Operators sehen wir als zu demselben Raum $L_q(G)$ zugehörig an.

Für eine Funktion $v(x, y) \in L_p(G)$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$ gelte die Gleichung

$$\iint_G \frac{\partial^l u(x, y)}{\partial x^{l_1}\, \partial y^{l_2}}\, v(x, y)\, dx\, dy = \iint_G A\ u\, v\, dx\, dy = \iint_G u\, w\, dx\, dy$$

für jede Funktion $u(x, y) \in L_0$ und eine Funktion $w(x, y) \in L_p$.

Das Funktional

$$f(u) = \iint_G u(x, y)\, w(x, y)\, dx\, dy$$

ist als ein auf $L_0 \subset L_q(G)$ definiertes Funktional offenbar distributiv und darüberhinaus wegen

$$|f(u)| = \left|\iint_G u\, w\, dx\, dy\right| \leqq \|u\|_{L_q} \|w\|_{L_p}$$

beschränkt. Wir können es auf ganz $L_q(G)$ fortsetzen. Dadurch erhalten wir den zu A adjungierten Operator A^*,

$$A^* v = w .$$

Sein Definitionsbereich ist eine Menge von Funktionen $v(x, y) \in L_p(G)$, und sein Wertebereich liegt im selben Raum. Wir erinnern uns an die zweite Definition der verallgemeinerten Ableitung. $A^* v$ unterscheidet sich von der verallgemeinerten Ableitung $\frac{\partial^l v}{\partial x^{l_1}\, \partial x^{l_2}}$ nur um den Faktor $(-1)^l$. Also kann die verallgemeinerte Differentiation auch als Operator angesehen werden, der adjungiert zum Differentiationsoperator ist, wobei man als dessen Definitionsbereich die Menge aller l-mal stetig differenzierbaren Funktionen ansieht, die auf einem Randstreifen von G verschwinden.

Die Matrixdarstellung eines Operators in einem Raum mit Basis. Im Banach-Raum E mit Basis sei ein linearer beschränkter Operator A gegeben, der E in sich abbildet.

Wir wählen $x \in E$. Dann ist

$$x = \lim_n x_n$$

mit

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i .$$

Folglich ist

$$y = A x = A (\lim_n x_n) = \lim_n \sum_{i=1}^{n} \xi_i A e_i .$$

Da $A e_i$ wiederum ein Element aus E ist, kann es nach den Basiselementen zerlegt werden:

$$A e_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k\,i} e_k .$$

Dann ist

$$y = A x = \lim_n \sum_{i=1}^{n} \xi_i \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{k\,i} e_k \right). \tag{8}$$

Nun ist aber $y \in E$ und kann folglich auch nach den Basiselementen zerlegt werden:

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k e_k . \tag{9}$$

Es sei jetzt $\{f_i\}$ eine zur Folge $\{e_i\}$ biorthogonale Folge von Funktionalen. Dann erhalten wir aus (8) und (9)

$$\eta_m = f_m(y) = f_m \left\{ \lim_n \sum_{i=1}^{n} \xi_i \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{k\,i} e_k \right) \right\} = \lim_n f_m \left\{ \sum_{i=1}^{n} \xi_i \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{k\,i} e_k \right) \right\}$$

$$= \lim_n \sum_{i=1}^{n} \xi_i \sum_{k=1}^{\infty} a_{k\,i} f_m(e_k) = \lim_n \sum_{i=1}^{n} a_{m\,i} \xi_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_{m\,i} \xi_i . \tag{10}$$

Die Gleichung (10) zeigt, daß der Operator A eindeutig bestimmt ist durch die unendliche Matrix $(a_{m\,i})$ (mit Hilfe dieser Matrix ergeben sich aus den Komponenten des Elementes x eindeutig diejenigen von $y = A x$).

Wir betrachten nun den adjungierten Operator A^*, der E^* in sich abbildet. Es sei $f = A^* \varphi$, d. h., für beliebiges $x \in E$ gilt

$$\varphi(A x) = f(x) .$$

Es sei weiter

$$\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i$$

und

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} d_i f_i .$$

Wir erhalten

$$\varphi(A\,x) = \varphi\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{k\,i}\,\xi_i\right)e_k\right\} = \lim_n \varphi\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{k\,i}\,\xi_i\right)e_k\right\}$$

$$= \lim_n \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{k\,i}\,\xi_i\right)\varphi(e_k) = \lim_n \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{k\,i}\,\xi_i\right)c_k$$

$$= \lim_n \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{k\,i}\,c_k\right)\xi_i\,.$$

Andererseits ist

$$\varphi\,(A\,x) = f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} d_i f_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} d_i \xi_i\,.$$

Folglich gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} d_i \xi_i = \lim_n \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{k\,i}\,c_k\right)\xi_i\,. \tag{11}$$

Es sei $x = e_m$, d. h. $\xi_m = 1$, $\xi_i = 0$ für $i \neq m$. Dann ergibt Gleichung (11)

$$d_m = \lim_n \sum_{k=1}^{n} a_{m\,k}\,c_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k\,m}\,c_k\,.$$

Die erhaltene Gleichung zeigt, daß die dem adjungierten Operator entsprechende Matrix die Transponierte zur Matrix des Ausgangsoperators ist. Diese Darstellung von Operatoren und ihren Adjungierten gilt beispielsweise im Raum l_2.

Aus der Matrixdarstellung der Operatoren lassen sich leicht die folgenden Eigenschaften ablesen:

1. $(A + B)^* = A^* + B^*$,
2. $(A\,B)^* = B^*A^*$,
3. $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$, sofern A^{-1} existiert.

Diese Formeln lassen sich übrigens auch ohne die Voraussetzung der Existenz einer Basis leicht beweisen.

Inneres Produkt, orthogonale Elemente und biorthogonale Systeme. Es sei $x \in E$ und $f \in E^*$. Der Ausdruck

$$f(x) = (x, f) = (f, x) \tag{12}$$

ist für die beiden Veränderlichen x und f ein bilineares Funktional, d. h., er ist in x und auch in f linear.

Ist E ein Hilbert-Raum, so gilt $E^* = E$, und (12) stellt das innere Produkt von x und f dar [siehe (20) in § 2].

Es ist auch im allgemeinen Fall, wenn $E^* = E$ ist, üblich, (12) als lineares Produkt von $f \in E^*$ und $x \in E$ aufzufassen.

Ist

$$(x, f) = (f, x) = 0\,,$$

so heißen $f \in E^*$ und $x \in E$ orthogonal.

Satz 2. *Es sei λ_0 Eigenwert des linearen Operators $A \in (E \to E)$ und x_0 ein entsprechendes Eigenelement. Weiter sei μ_0 Eigenwert des adjungierten Operators A^* mit dem Eigenelement f_0.*

Dann sind die Eigenelemente orthogonal, falls $\lambda \neq \mu_0$ ist.

Dieser Satz ist die Verallgemeinerung des Satzes von der Orthogonalität der Eigenfunktionen adjungierter Integralgleichungen.

Der Zusammenhang zwischen den Operatoren A und A^* läßt sich mit Hilfe des inneren Produktes ausdrücken. Es gilt

$$(A\,x, f) = (x, A^* f)$$

für alle $f \in E^*$, $x \in E$. Nach Voraussetzung ist

$$A\,x_0 = \lambda_0\,x_0\,, \qquad A^* f_0 = \mu_0 f_0\,.$$

Daraus und aus der obigen Gleichung erhalten wir

$$\lambda_0(x_0, f_0) = \mu_0(x_0, f_0)$$

oder

$$(\lambda_0 - \mu_0)\,(x_0, f_0) = 0\,.$$

Da nach Voraussetzung $\mu_0 - \lambda_0 \neq 0$ ist, so folgt

$$(x_0, f_0) = 0\,.$$

Die Folgen $\{x_n\}$, $x_n \in E$, und $\{f_n\}$, $f_n \in E^*$, heißen, wie bereits erwähnt, *biorthogonal*, wenn für alle i und j

$$(x_i, f_j) = \delta_{ij} \tag{13}$$

ist.

Für $i \neq j$ sind also x_i und f_j orthogonal.

In § 6 des vorigen Kapitels haben wir ein Beispiel biorthogonaler Folgen betrachtet. Es waren dies die Basiselemente $l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots$ und die durch $f_k(x) = \xi_k$ für $x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k\, l_k$ definierten Funktionale $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$.

Ist E selbstkonjugiert, etwa ein Hilbert-Raum, so gehören beide Folgen zu E. Fallen $\{x_n\}$ und $\{f_n\}$ zusammen, so wird aus der Biorthogonalität die gewöhnliche Orthogonalität.

Es seien $\{x_n\}$ und $\{f_n\}$ biorthogonal und $x \in E$ sei durch eine Reihe

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i\, x_i \tag{14}$$

darstellbar. Es gilt

$$(x, f_k) = \lim_n \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\, x_i, f_k\right) = \lim_n \sum_{i=1}^{n} \xi_i\,(x_i, f_k)\,.$$

Für $n \geqq k$ ist wegen (13) dann

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i(x_i, f_k) = \xi_k\,,$$

weil in dieser Summe alle Glieder außer

$$\xi_k(x_k, f_k) = \xi_k$$

verschwinden. Hieraus folgt $(x, f_k) = \xi_k$, und für (14) bekommt man

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} (x, f_i)\, x_i \,. \tag{15}$$

Ist

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} d_n f_n \,, \tag{16}$$

so erhält man analog

$$d_n = (x_n, f) \,.$$

(15) und (16) heißen FOURIER-Reihen der biorthogonalen Folgen.

P. L. TSCHEBYSCHEW und A. A. MARKOW untersuchten erstmalig nichttriviale Beispiele biorthogonaler Folgen im Zusammenhang mit Interpolationsaufgaben.

Wir zeigen, daß zu einem beliebigen linear unabhängigen System vom Elementen $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \subset E$ ein zu ihm biorthogonales System linearer Funktionale $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\} \subset E^*$ existiert.

Es sei $L_1 = L(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ die von den Elementen $x_2, x_3, \ldots, x_n$ erzeugte lineare Mannigfaltigkeit . Da x_1 einen Abstand $d > 0$ von L_1 besitzt (auf Grund der linearen Unabhängigkeit der Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und der Abgeschlossenheit von L_1), existiert ein lineares Funktional $f_1(x)$ derart, daß $f_1(x) = 0$ auf L_1, speziell für die Elemente $x_2, x_3, \ldots, x_n$, und $f_1(x_1) = 1$ ist.

Durch Wiederholung dieser Operation für die Mannigfaltigkeit

$$L_2 = L(x_1, x_3, \ldots, x_n)$$

und das Element x_2 usf. erhalten wir das geforderte System von Funktionalen.

Ist nun umgekehrt ein System $\{f_1, f_2, \ldots, f_n) \subset E^*$ linear unabhängiger linearer Funktionale gegeben, d. h., folgt aus

$$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \cdots + \lambda_n f_n(x) = 0$$

für beliebiges $x \in E$ die Beziehung $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$, so existiert ein System $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset E$, das biorthogonal zu diesem System von Funktionalen ist.

Zunächst sei $n = 1$. Wegen $f_1(x) \not\equiv 0$ existiert ein Element x_0 mit $f_1(x_0) = \alpha \neq 0$. Dann besitzt das Element $x_1 = \frac{x_0}{\alpha}$ die geforderte Eigenschaft.

Unter der Voraussetzung, daß die Behauptung für $n - 1$ linear unabhängige Funktionale gilt, beweisen wir den Satz für n Funktionale. Es sei $\{x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ ein zu den Funktionalen $f_2, f_3, \ldots, f_n$ biorthogonales System von Elementen. Wir bezeichnen mit M_1 die durch das Gleichungssystem

$$f_2(x) = 0 \,, \qquad f_3(x) = 0, \ldots, f_n(x) = 0$$

definierte lineare Mannigfaltigkeit. Für beliebiges $x \in E$ gehört das Element

$$u = x - \sum_{i=2}^{n} c_i x_i$$

mit

$$c_i = f_i(x)$$

dieser Mannigfaltigkeit an. In M_1 existiert ein Element x_0 mit $f_1(x_0) = \alpha \neq 0$. Andernfalls wäre $f_1(u)$ für alle u gleich Null:

$$f_1(x) = \sum_{i=2}^{n} c_i f_1(x_i) = 0$$

oder

$$f_1(x) = \sum_{i=2}^{n} f_1(x_i) f_i(x)$$

für jedes $x \in E$. Das würde bedeuten, daß f_1 eine Linearkombination der Funktionale $f_2, f_3, \ldots, f_n$ wäre, was aber nach Voraussetzung nicht möglich ist.

Somit existiert ein Element x_0 mit

$$f_1(x_0) = \alpha \neq 0\,,\ f_2(x_0) = f_3(x_0) = \cdots = f_n(x_0) = 0\,.$$

Indem wir $x_1 = \frac{x_0}{\alpha}$ setzen, erhalten wir das erste Element des biorthogonalen Systems.

Wir wiederholen die gleichen Überlegungen für die Mannigfaltigkeit

$$M_2 = \{x\colon f_1(x) = 0\,,\ f_3(x) = 0, \ldots, f_n(x) = 0\}$$

und das Funktional f_2 und erhalten das Element x_2 usw.

Konjugierte Räume von komplexen linearen Räumen. Alle in diesem Paragraphen eingeführten Begriffe lassen sich auch auf den Fall eines komplexen linearen Raumes E übertragen. Als zu E konjugierten Raum E^* bezeichnen wir die Gesamtheit aller *linearen* komplexen Funktionale auf E.

Wie oben nennen wir inneres Produkt (x, f) mit $x \in E$ und $f \in E^*$ die Zahl $f(x)$. Damit die Eigenschaften des inneren Produktes in einem komplexen Hilbert-Raum erhalten bleiben, muß (x, f) ein lineares Funktional in x und adjungiert-linear in f sein:

$$(x, \lambda f) = \bar{\lambda}(x, f)\,.$$

Dadurch ist auch die Multiplikation mit einer komplexen Zahl λ in E^* erklärt: λf ist das lineare Funktional φ auf E mit

$$\varphi(x) = \bar{\lambda} f(x)\,.$$

Der Begriff des zu einem Operator A aus $(E \to E)$ adjungierten Operators A^* wird für den Fall komplexer Räume folgendermaßen definiert: A^* ist derjenige Operator aus $(E^* \to E^*)$, für den

$$(A x, f) = (x, A^* f)$$

für alle $x \in E$ und alle $f \in E^*$ gilt.

Alle Eigenschaften des adjungierten Operators übertragen sich unmittelbar auf den komplexen Fall bis auf eine Modifikation. Der Satz von der Orthogonalität der Eigenelemente x_0 und f_0 der Operatoren A bzw. A^* gilt für

$$A x_0 = \lambda_0 x_0 , \qquad A^* f_0 = \mu_0 f_0 ,$$

wenn $\lambda_0 \neq \bar{\mu}$ ist.

§ 4. Schwache Konvergenz von Funktional- und Elementfolgen

E sei ein linearer normierter Raum. Eine Folge von linearen Funktionalen $\{f_n\}$ aus E^* heißt schwach konvergent gegen das lineare Funktional $f_0 \in E^*$, wenn für jedes $x \in E$ die Folge $f_n(x) \to f_0(x)$ geht. Für lineare Funktionale stimmt also der Begriff der schwachen Konvergenz mit dem Begriff der punktweisen Konvergenz von Operatoren überein.

Mit Hilfe des Begriffs der schwachen Konvergenz lassen sich die Sätze 1 und 2 vom Anfang dieses Kapitels folgendermaßen aussprechen:

Satz 1. *Eine schwach in sich konvergente Folge $\{f_n\}$ von linearen Funktionalen konvergiert schwach gegen ein lineares Funktional f_0.*

Satz 2. *Eine Folge $\{f_n\}$ von linearen Funktionalen konvergiert schwach gegen ein lineares Funktional f_0 genau dann, wenn*

1. *die Folge $\{\|f_n\|\}$ beschränkt ist und*

2. *$f_n(x) \to f_0(x)$ konvergiert für beliebige x aus einer Menge M, deren lineare Hülle in E überall dicht liegt.*

Wir bemerken noch, daß aus Satz 1 die schwache Vollständigkeit des zum BANACH-Raum E konjugierten Raumes E^* folgt.

Anwendung auf Quadraturformeln [15]. Wir betrachten im Raum $C[0, 1]$ das Funktional

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\, d\sigma(t)$$

mit nichtfallendem $\sigma(t)$ und die Folge der Funktionale

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{k_n} c_k^{(n)} x(t_k^{(n)}) , \qquad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Die $c_k^{(n)}$ werden so ausgewählt, daß $f(x)$ und $f_n(x)$ für alle Polynome vom Grade kleiner oder gleich n zusammenfallen:

$$f(x) = f_n(x) , \qquad \text{wenn} \quad x = \sum_{l=0}^{n} a_l t^l .$$

Die f_n werden zur näherungsweisen Berechnung des Funktionals f gebraucht. Die Beziehung

$$f(x) \approx f_n(x) ,$$

die für alle Polynome vom Grade kleiner oder gleich n in die Gleichheit übergeht, wird *Quadraturformel* genannt.

Wir betrachten eine Folge von Quadraturformeln

$$f(x) \approx f_n(x) , \qquad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Es tritt jetzt die Frage auf, ob die Folge $f_n(x)$ für $n \to \infty$ gegen den Wert $f(x)$ für jedes $x(t) \in C\,[0, 1]$ konvergiert. Mit anderen Worten: Konvergiert die Folge der Funktionale f_n schwach gegen das Funktional f?

Satz 3. *Die Quadraturformeln konvergieren, d. h., für jede stetige Funktion $x(t)$ ist*

$$\lim_n \sum_{k=1}^{k_n} c_k^{(n)} x(t_k^{(n)}) = \int_0^1 x(t)\, d\sigma(t)$$

genau dann, wenn für jedes n

$$\sum_{k=1}^{k_n} |c_k^{(n)}| \leqq K = \text{const}$$

gilt.

In der Tat ist nach Definition der Funktionale f_n für alle Polynome n-ten Grades $p_n(t)$

$$f_m(p) = f(p_n) \qquad \text{für} \qquad m \geqq n\,.$$

Es ist ferner offensichtlich

$$||f_n|| = \sum_{k=1}^{k_n} |c_k^{(n)}| \leqq K\,.$$

Folglich konvergiert die Folge $\{f_n\}$ auf der Menge aller Polynome, die in $C\,[0, 1]$ überall dicht liegen, gegen das Funktional f, und die Normen sind beschränkt.

Jetzt folgt aber der zu beweisende Satz unmittelbar aus dem Satz 2 dieses Paragraphen.

Satz (W. A. Steklow). *Wenn alle Koeffizienten $c_k^{(n)}$ der Quadraturformeln positiv sind, so konvergiert die Folge der Quadraturformeln $f(x) \approx f_n(x)$ für jede stetige Funktion $x(t)$.*

Wir haben in der Tat für ein beliebiges n und für $x_0(t) \equiv 1$

$$f_n(x_0) = f(x_0)\,.$$

Daher ist

$$\sum_{k=1}^{k_n} |c_k^{(n)}| = \sum_{k=1}^{k_n} c_k^{(n)} = \int_0^1 d\sigma = \sigma(1) - \sigma(0)\,,$$

und es sind die Voraussetzungen des vorhergehenden Satzes erfüllt.

Schwache Konvergenz von Elementfolgen. Wir führen den Begriff der schwachen Konvergenz für Elementfolgen eines linearen normierten Raumes ein.

Es sei E ein linearer normierter Raum, $\{x_n\}$ eine Folge von Elementen aus E und $x_0 \in E$. Wenn für alle Funktionale $f \in E^*$ die Folge $f(x_n) \to f(x_0)$ für $n \to \infty$ geht, so sagt man, $\{x_n\}$ *konvergiert schwach* gegen x_0 und schreibt

$$x_n \rightharpoonup x_0\,.$$

x_0 ist ein *schwacher Limes* der Folge $\{x_n\}$.

Eine Folge kann nicht gegen zwei verschiedene Limites schwach konvergieren.

Wir nehmen an, daß $x_n \rightharpoonup x_0$ und $x_n \rightharpoonup \xi_0$ schwach konvergiert, d. h., für ein beliebiges lineares f strebe

$$f(x_n) \to f(x_0) \qquad \text{und} \qquad f(x_n) \to f(\xi_0)\,.$$

Es ist folglich $f(x_0) = f(\xi_0)$ oder

$$f(x_0 - \xi_0) = 0\,,$$

und daraus folgt $x_0 = \xi_0$.

Es ist auch leicht zu sehen: *Jede beliebige Teilfolge $\{x_n\}$ konvergiert schwach gegen x_0, wenn $x_n \rightharpoonup x_0$ geht.*

Wir werden die Normkonvergenz jetzt als starke Konvergenz bezeichnen. Weiter ist offensichtlich: Aus der starken Konvergenz von $\{x_n\}$ gegen x_0 folgt die schwache Konvergenz gegen denselben Limes.

Die Umkehrung ist nicht immer richtig. Eine Folge kann gegen ein gewisses Element schwach konvergieren, ohne daß sie auch gegen dasselbe Element stark konvergiert.

Wir betrachten z. B. in $L_2\,[0, 1]$ die Folge $x_n(t) = \sin n\,\pi\,t$. Für jedes lineare Funktional f ist

$$f(x_n) = \int_0^1 \sin n\,\pi\,t\,\alpha(t)\,dt$$

mit quadratisch integrablem $\alpha(t)$. $f(x_n)$ ist offenbar der n-te Fourier-Koeffizient von $\alpha(t)$ bezüglich $\sin n\,\pi\,t$. Folglich geht $f(x_n) \to 0$ für $n \to \infty$. Hieraus ergibt sich aber, daß $x_n \rightharpoonup 0$ konvergiert. Andererseits ist aber leicht zu sehen, daß $\{x_n\}$ nicht stark konvergieren kann; denn es ist

$$\|x_n - x_m\|^2 = \int_0^1 [\sin n\,\pi\,t - \sin m\,\pi\,t]^2\,dt = 1\,.$$

Es gilt jedoch der

Satz 4. *In einem endlichdimensionalen Raum stimmen schwache und starke Konvergenz überein.*

Es ist hinreichend zu beweisen, daß in einem endlichdimensionalen Raum aus der schwachen die starke Konvergenz gegen dasselbe Element folgt. Es sei E ein endlichdimensionaler Raum und $\{x_n\}$ eine Folge mit $x_n \rightharpoonup x_0$. Da E endlichdimensional ist, existiert ein endliches System linear unabhängiger Elemente $e_1, e_2, \ldots, e_k$. Jedes $x \in E$ kann in der Form $x = \xi_1\,x_1 + \xi_2\,e_2 + \cdots + \xi_k\,e_k$ mit reellen ξ_j, $j = 1, \ldots, k$, dargestellt werden. Also ist

$$x_n = \xi_1^{(n)}\,e_1 + \xi_2^{(n)}\,e_2 + \cdots + \xi_k^{(n)}\,e_k\,,$$

$$x_0 = \xi_1^{(0)}\,e_1 + \xi_2^{(0)}\,e_2 + \cdots + \xi_k^{(0)}\,e_k\,.$$

Wir betrachten nun diejenigen Funktionale $f_i \in E^*$, für die $f_i(e_i) = 1, f_i(e_j) = 0$ für $j \neq i$ ist. Es ist also

$$f_i(x_n) = \xi_i^{(n)} \qquad \text{und} \qquad f_i(x_0) = \xi_i^{(0)}\,.$$

Da aber für jedes lineare f die Folge $f(x_n) \to f(x_0)$ geht, konvergiert auch $f_i(x_n) \to f_i(x_0)$, d. h., es strebt

$$\xi_i^{(n)} \to \xi_i^{(0)} \qquad \text{für} \qquad i = 1, 2, \ldots, k\,.$$

In einem endlichdimensionalen Raum zieht aber die koordinatenweise Konvergenz die Normkonvergenz nach sich. Folglich konvergiert die Folge $\{x_n\}$ stark gegen x_0.

Es gibt auch unendlichdimensionale Räume, in denen die starke und die schwache Konvergenz übereinstimmen. Ein Beispiel dafür ist der Raum l der Folgen $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$, für die die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|$ konvergiert.

Von M. I. KADEZ stammt das folgende interessante Ergebnis:

Ist der Raum E separabel, so kann man in ihm eine äquivalente Norm einführen, für die gilt: Aus $x_n \rightharpoonup x_0$ und $||x_n|| \to ||x_0||$ folgt die starke Konvergenz von $\{x_n\}$ gegen x_0.

Satz 5. *Wenn $\{x_n\}$ schwach gegen x_0 konvergiert, so existiert eine Folge von Linearkombinationen*

$$\left\{\sum_{k=1}^{k_n} C_k^{(n)} x_n\right\},$$

die gegen x_0 stark konvergiert.

x_0 gehört zur abgeschlossenen linearen Mannigfaltigkeit $\overline{L}$, die von den $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ erzeugt wird.

Angenommen, x_0 gehöre nicht zu $\overline{L}$. Dann existiert nach der zweiten Folgerung aus dem BANACH-HAHNschen Satz (S. 122) ein lineares Funktional $f \in E^*$ mit $f(x_0) = 1$ und $f(x_n) = 0$ für $n \neq 0$. Das bedeutet aber, daß $f(x_n)$ nicht gegen $f(x_0)$ konvergiert, was jedoch der Voraussetzung $x_n \rightharpoonup x_0$ widerspricht.

Satz 6. *A sei ein auf einem linearen normierten Raum E_x definierter linearer beschränkter Operator. Sein Wertebereich liege in dem linearen normierten Raum E_y.*

Wenn die Folge $\{x_n\} \subseteq E_x$ gegen $x_0 \in E_x$ schwach konvergiert, so konvergiert $\{A\, x_n\} \subseteq E_y$ schwach gegen $A\, x_0 \in E_y$.

Wir wählen ein beliebiges Funktional $\varphi \in E_y^*$. Dann ist $\varphi(A\, x_n) = f(x_n)$ mit $f \in E_x^*$. Es ist ebenso $\varphi(A\, x_0) = f(x_0)$. Da $x_n \rightharpoonup x_0$ geht, konvergiert $f(x_n) \to f(x_0)$ oder $\varphi(A\, x_n) \to \varphi(A\, x_0)$. Weil φ nun ein beliebiges Funktional aus E^* ist, so konvergiert $A\, x_n \rightharpoonup A\, x_0$.

Satz 7. *Wenn eine Folge $\{x_n\}$ gegen x_0 schwach konvergiert, so sind die Normen der Elemente dieser Folge beschränkt.*

Wir fassen die x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ als Elemente des Raumes E^{**} auf. Dann bedeutet die schwache Konvergenz von $\{x_n\}$ gegen x_0, daß die Folge der Funktionale $\{x_n\} \subseteq E^{**}$ gegen $x_0 \in E^{**}$ für alle $f \in E^*$ konvergiert. Dann

ist aber nach dem Satz von BANACH-STEINHAUS die Folge $\{||x_n||\}$ beschränkt, was zu beweisen war.

Bemerkung. *Ist x_0 der schwache Limes der Folge $\{x_n\}$, so gilt $||x_0|| \leqq \underline{\lim}_n ||x_n||$.*

Die Existenz dieses unteren Limes ergibt sich aus dem bewiesenen Satz.

Nun nehmen wir an, daß $||x_0|| > \underline{\lim}_n ||x_n||$ ist. Dann existiert eine Zahl c mit $||x_0|| > c > \underline{\lim}_n ||x_n||$. Folglich gibt es eine Folge $\{x_n\}$ mit

$$||x_0|| > c > ||x_{n_i}|| .$$

Wir konstruieren nun ein lineares Funktional f_0 derart, daß $||f_0|| = 1$ und $f_0(x_0) = ||x_0|| > c$ ist. Dann ist für alle i

$$f_0(x_{n_i}) \leqq ||f_0||\,||x_{n_i}|| = ||x_{n_i}|| < c .$$

Also konvergiert $\{f_0(x_n)\}$ nicht gegen $f_0(x_0)$, und das widerspricht der Voraussetzung $x_n \rightharpoonup x_0$.

Es sind Fälle möglich, in denen $||x_0|| < \underline{\lim}_n ||x_n||$ realisiert werden kann, wie das folgende Beispiel zeigt.

Im Raum $L_2[0, 1]$ betrachten wir die Funktionen

$$x_n(t) = \sqrt{2} \sin n \pi t .$$

Es ist $||x_n|| = 1$ und damit auch $\lim_n ||x_n|| = 1$. Wir erhalten andererseits für ein beliebiges lineares Funktional f

$$f(x_n) = \sqrt{2} \int_0^1 \alpha(t) \sin n \pi t \, dt = \sqrt{2}\, c_n ,$$

wo die c_n die FOURIER-Koeffizienten von $\alpha(t) \in L_2[0, 1]$ sind. Folglich geht für jedes lineare f und für $n \to \infty$ die Folge $f(x_n) \to 0$, d. h., die x_n konvergieren schwach gegen 0. Es ist somit $x_0 = 0$ und $||x_0|| = 0 < 1 = \lim_n ||x_n||$.

Satz 8. *Die Folge $\{x_n\}$ konvergiert schwach gegen x_0 genau dann, wenn*

1. *die Folge $\{||x_n||\}$ beschränkt ist und*

2. *$f(x_n) \to f(x_0)$ geht für jedes f aus einer Menge Γ von linearen Funktionalen, deren Linearkombinationen in E^* überall dicht liegen.*

Dieser Satz ist ein Spezialfall des Satzes 2 dieses Paragraphen. Denn die schwache Konvergenz einer Folge $\{x_n\} \subseteq E$ gegen $x_0 \in E$ ist gleichbedeutend mit der schwachen Konvergenz derselben Folge, wenn man die x_n und x_0 als auf E^* definierte lineare Funktionale auffaßt.

Schwache Konvergenz in speziellen Räumen.

Schwache Konvergenz in l_p.

Satz 9. *Eine Folge $\{x_n\}$, $x_n = \{\xi_i^{(n)}\} \in l_p$, konvergiert schwach gegen $x_0 = \{\xi_i^{(0)}\} \in l_p$ dann und nur dann, wenn*

1. *die Folge* $\{\|x_n\|\}$ *beschränkt ist und*

2. $\xi_i^{(n)} \to \xi_i^{(0)}$ *für* $n \to \infty$ *und alle* i *(aber im allgemeinen nicht gleichmäßig) konvergiert.*

Zum Beweis ist zu bemerken, daß die Linearkombinationen der $f_i = \{0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots\}$ in $l_q = l_p^*$ überall dicht liegen. Nach dem allgemeinen Satz 8 ist zur schwachen Konvergenz von $x_n \rightharpoonup x_0$ notwendig und hinreichend, daß die erste Bedingung erfüllt wird, und daß für jedes i die Folge $f_i(x_n) = \xi_i^{(n)} \to \xi_i^{(0)} = f_i(x_0)$ geht.

In l_p ist also die schwache Konvergenz gleichbedeutend mit der koordinatenweisen Konvergenz, wenn die Normen der Folgenglieder beschränkt sind.

Schwache Konvergenz in L_p.

Satz 10. *Damit eine Folge* $\{x_n(t)\} \subseteq L_p[0, 1]$ *schwach gegen* $x_0(t) \in L_p[0, 1]$ *konvergiert, ist notwendig und hinreichend, daß*

1. *die Folge* $\{\|x_n\|\}$ *beschränkt ist und*

2. $\int_0^\tau x_n(t)\,dt \to \int_0^\tau x_0(t)\,dt$ *für beliebiges* $\tau \in [0, 1]$ *konvergiert.*

Bedingung 1. fällt mit der von Satz 8 zusammen. Wir untersuchen 2. Dazu setzen wir

$$\alpha_\tau(t) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad 0 \leqq t \leqq \tau\,, \\ 0 & \text{für} \quad \tau < t \leqq 1\,. \end{cases}$$

Dann liegen die Linearkombinationen der Funktionen $\alpha_\tau(t)$, d. h. die Summen

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\,[\alpha_{\tau_i}(t) - \alpha_{\tau_{i-1}}(t)]$$

mit $0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_{n-1} < \tau_n = 1$ in $L_q[0, 1] = L_p^*[0, 1]$ überall dicht. Damit $x_n(t) \rightharpoonup x_0(t)$ konvergiert, ist folglich notwendig und hinreichend, daß die erste Bedingung erfüllt wird und daß für $n \to \infty$ und jedes $\tau \in [0, 1]$

$$\int_0^1 x_n(t)\,\alpha_\tau(t)\,dt \to \int_0^1 x_0(t)\,\alpha_\tau(t)\,dt$$

oder

$$\int_0^\tau x_n(t)\,dt \to \int_0^\tau x_0(t)\,dt$$

geht.

Die schwache Konvergenz im Hilbert-Raum. Da im Hilbert-Raum jedes lineare Funktional $f(x)$ ein Skalarprodukt ist, bedeutet dort

$$x_n \rightharpoonup x_0\,,$$

daß für jedes $y \in H$ gilt

$$(x_n, y) \to (x, y)\,.$$

Früher sahen wir, daß für $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$ auch $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$ strebt, d. h., das Skalarprodukt ist stetig auf der Gesamtheit der beiden Argumente bezüglich der starken Konvergenz. Strebt $x_n \rightharpoonup x_0$, $y_n \rightharpoonup y_0$, so strebt im allgemeinen nicht $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$. Das beispielsweise ist der Fall, wenn

$$x_n = y_n = e_n$$

ist, wobei $\{e_n\}$ eine beliebige orthonormale Folge ist. Dabei gilt

$$e_n \rightharpoonup 0 ,$$

aber

$$(e_n, e_n) = \|e_n\|^2 = 1 \not\rightarrow 0 = (0, 0) .$$

Jedoch folgt aus $x_n \to x_0$ und $y_n \rightharpoonup y_0$ die Beziehung $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$. In diesem Falle sind die Normen $\|y_n\|$ in ihrer Gesamtheit beschränkt.

Es sei

$$M = \sup_n \|y_n\| .$$

Es gilt

$$\begin{aligned} |(x_n, y_n) - (x_0, y_0)| &\leqq |(x_n - x_0, y_0)| + |(x_0, y_n - y_0)| \\ &\leqq M \|x_n - x_0\| + |(x_0, y_n - y_0)| , \end{aligned}$$

und beide rechte Summanden streben gegen Null. Schließlich folgt aus $x_n \rightharpoonup x_0$, $\|x_n\| \to \|x_0\|$ die Beziehung $x_n \to x_0$, da

$$\begin{aligned} \|x_n - x_0\|^2 &= (x_n - x_0, x_n - x_0) \\ &= [(x_n, x_n) - (x_0, x_0)] + [(x_0, x_0) - (x_0, x_n)] + [(x_0, x_0) - (x_n, x_0)] \end{aligned}$$

gilt und alle rechten Summanden wiederum gegen Null streben.

KAPITEL V

KOMPAKTE MENGEN IN METRISCHEN UND NORMIERTEN RÄUMEN

Vor mehr als hundert Jahren hat der tschechische Mathematiker B. BOLZANO den Satz bewiesen, daß jede beschränkte unendliche Punktmenge der Zahlengeraden mindestens einen Häufungspunkt hat. Er machte auf die Wichtigkeit dieses Satzes für einen strengen Aufbau der Analysis aufmerksam. Der Gedanke, eine konvergente Folge aus irgendwelchen Mengen auszuwählen, die nicht aus Punkten bestehen, sondern aus Funktionen oder Kurven, wurde bei dem Existenzbeweis für Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen, in der Variationsrechnung usw. benutzt. Dies führte zur allgemeinen Definition der Kompaktheit einer in einem abstrakten Raum gelegenen Menge.

§ 1. Definitionen und allgemeine Sätze

Eine in einem metrischen Raum X gelegene Menge K heißt *kompakt,* wenn jede unendliche Teilmenge dieser Menge eine konvergente Folge enthält. Wenn die Grenzwerte zu K gehören, so heißt K *kompakt in sich.* Wenn sie aber dem Raum X und möglicherweise nicht der Menge K angehören, so heißt K *kompakt in* X oder *kompakt bezüglich* X. Notwendig und hinreichend für die Kompaktheit von K in sich ist, daß K abgeschlossen und kompakt in X ist.

Wenn speziell jede unendliche Teilmenge des Raumes X eine gegen ein Element aus X konvergierende Folge enthält, so heißt der Raum X *kompakt.* Ein kompakter metrischer Raum wird auch als *Kompaktum* bezeichnet. Offenbar ist jedes Kompaktum vollständig.

Beispiele. 1. Es sei $X = [0, 1]$. Offenbar ist nach dem Satz von B. BOLZANO X ein kompakter Raum.

2. $X = E_1$, der eindimensionale euklidische Raum (die Zahlengerade), ist nicht kompakt. Die Teilmenge $K = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ enthält keine konvergente Folge. Nach dem Satz von BOLZANO ist jedoch jede beschränkte Menge von Elementen dieses Raumes kompakt.

3. Analog wie eben finden wir, daß E_n, der n-dimensionale euklidische Raum, nicht kompakt ist. Aber jede beschränkte Menge von Elementen dieses Raumes ist kompakt.

4. $X = C[0, 1]$ ist nicht kompakt. Es gibt in $C[0, 1]$ beschränkte nicht kompakte Mengen (siehe Bemerkung auf S. 155).

5. Der Raum $X = l_2$ ist nicht kompakt. Es gibt in diesem Raum beschränkte nicht kompakte Mengen. Z. B. ist die abgeschlossene Einheitskugel $\bar{S}_1$, d. h. die Menge aller Elemente $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots\}$, für die

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2\right)^{1/2} \leqq 1$$

gilt, nicht kompakt. Betrachten wir die Punktfolge

$$e_1 = \{1, 0, 0, \ldots\}, \quad e_2 = \{0, 1, 0, \ldots\}, \quad e_3 = \{0, 0, 1, \ldots\}, \ldots$$

aus $\overline{S}_1$, so ist $\|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$ für $i \neq j$. Daher ist die Folge $\{e_i\}$ und jede ihrer Teilfolgen divergent, und die Nichtkompaktheit von $\overline{S}_1$ ist bewiesen. Aber in l_2 existiert eine kompakte Menge. Ein nichttriviales Beispiel einer solchen Menge ist das sogenannte „*Hauptparallelepiped* U des HILBERTschen Folgenraumes", das durch die Gesamtheit aller Punkte $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots\}$ festgelegt ist, deren Koordinaten der Bedingung $|\xi_n| \leqq 1/n$ genügen. Die Kompaktheit der Menge U ergibt sich aus den allgemeinen Kriterien der Kompaktheit, die auf S. 171 formuliert sind.

Für kompakte Mengen läßt sich ein Analogon des Satzes über ineinandergeschachtelte Kugeln im vollständigen metrischen Raum beweisen, wobei die Vollständigkeit von X nicht vorausgesetzt wird. Es gilt der folgende

Satz (CANTOR). *Gegeben ist eine Folge*

$$K_1 \supset K_2 \supset \cdots \supset K_n \supset \cdots$$

nichtleerer abgeschlossener kompakter Mengen des metrischen Raumes X. Dann ist der Durchschnitt $K = \bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$ nicht leer.

Zum Beweis wählen wir in jeder Menge K_i einen Punkt x_i. Wir erhalten so eine Folge $\{x_i\} \subset K_i$. Da K_i kompakt ist, kann aus $\{x_i\}$ eine konvergente Teilfolge $\{x_{i_k}\}$ ausgewählt werden. Dann sei

$$x_0 = \lim_k x_{i_k}.$$

Da bei beliebigem festem n, beginnend mit der Zahl $i_k > n$, alle Glieder dieser Folge zu K_n gehören und K_n abgeschlossen ist, so ist auch $x_0 \in K_n$. Dann aber ist $x_0 \in \bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$, und der Satz ist bewiesen.

Die Existenz eines Extremums. Die Beweise der Sätze über stetige, auf einem abgeschlossenen Intervall definierte Funktionen stützen sich auf die Kompaktheit. Einige dieser Sätze lassen sich auf stetige Funktionale erweitern, die auf kompakten Mengen eines beliebigen metrischen Raumes definiert sind. Es gilt die folgende Verallgemeinerung des bekannten Satzes von WEIERSTRASS.

Satz 1. *Ist K eine in sich kompakte Menge eines Raumes X und $f(x)$ ein auf dieser Menge definiertes stetiges Funktional, so gilt:*

1. *Das Funktional $f(x)$ ist beschränkt auf K.*

2. *Das Funktional $f(x)$ nimmt auf K die obere und untere Grenze an.*

Beweis. 1. Wir zeigen, daß das Funktional $f(x)$ nach oben beschränkt ist (analog zeigt man die Beschränktheit nach unten). Wir nehmen das Gegenteil an. Dann gibt es eine Punktfolge $\{x_n\}$ aus K, so daß $f(x_n) > n$ ist. Da die Menge K kompakt in sich ist, so enthält die Folge $\{x_n\}$ eine Teilfolge $\{x_{n_k}\}$, die gegen einen Punkt $x_0 \in K$ konvergiert. Dann ist einerseits $f(x_{n_k}) > n_k$ und folglich

konvergiert $f(x_{n_k}) \to \infty$ für $n_k \to \infty$. Andererseits geht aber

$$f(x_{n_k}) \to f(x_0) \quad \text{für} \quad n_k \to \infty,$$

da das Funktional überall auf K, also speziell auch im Punkt x_0 stetig ist. Daraus ergibt sich ein Widerspruch, und die Beschränktheit des Funktionals $f(x)$ ist bewiesen.

2. Es sei $\beta = \sup\limits_{x \in K} f(x)$. Dies besagt, daß $f(x) \leqq \beta$ ist für alle $x \in K$, und daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Punkt $x_\varepsilon \in M$ gibt, so daß

$$f(x_\varepsilon) > \beta - \varepsilon$$

gilt. Folglich kann man eine Folge $\{x_n\}$ wählen, für die

$$\beta - \frac{1}{n} < f(x_n) \leqq \beta \tag{1}$$

ist.

Da K kompakt in sich ist, enthält die Folge $\{x_n\}$ eine gegen einen Punkt $x_0 \in M$ konvergierende Teilfolge $\{x_{n_k}\}$. Dann ist wegen (1)

$$\beta - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \leqq \beta$$

und folglich

$$\lim_{n_k} f(x_{n_k}) = \beta\,.$$

Andererseits gilt

$$\lim_{n_k} f(x_{n_k}) = f(x_0)\,,$$

da $f(x)$ auf K und daher auch im Punkt x_0 stetig ist. Also ist $f(x_0) = \beta$, was zu zeigen war.

Analog beweist man: Wenn $\alpha = \inf\limits_{x \in K} f(x)$ ist, so gibt es einen Punkt $\xi_0 \in K$, für den $f(\xi_0) = \alpha$ wird.

Bemerkung. *Wenn ein Funktional auf einer nicht in sich kompakten Menge M definiert ist, brauchen* $\sup\limits_M f(x)$ *und* $\inf\limits_M f(x)$ *nicht angenommen zu werden.*

Betrachten wir beispielsweise in $C[0, 1]$ die Menge M aller Funktionen $x(t)$, für die $x(0) = 0$, $x(1) = 1$ und $\max\limits_{0 \leqq x \leqq 1} |x(t)| \leqq 1$ gilt. Das auf M definierte stetige Funktional

$$f(x) = \int_0^1 x^2(t)\, dt$$

nimmt auf M seine untere Grenze nicht an.

Ist nämlich $x(t) = t^n$, so ist $f(x) = \dfrac{1}{2n+1}$. Also ist $\inf\limits_M f(x) = 0$. Offenbar ist aber für jede stetige Kurve $x(t)$, die durch die Punkte $(0, 0)$ und $(1, 1)$ geht, $f(x) > 0$. (Daraus folgt speziell, daß die betrachtete Menge der Kurven nicht kompakt in sich ist, obgleich sie eine beschränkte und abgeschlossene Menge in $C[0, 1]$ ist.)

In Satz 1 ist also die Kompaktheit der Menge eine wesentliche Voraussetzung. Die Existenz von Maximum oder Minimum eines Funktionals auf einer nicht kompakten Menge kann zu einer falschen Folgerung führen, wie es das vorige Beispiel zeigt.

Als zweites Beispiel dieser Art geben wir einen „Pseudobeweis" für das fünfte Postulat von EUKLID. Bekanntlich ist dieses Postulat gleichbedeutend mit der Annahme, daß die Winkelsumme eines Dreiecks gleich π ist. Streng

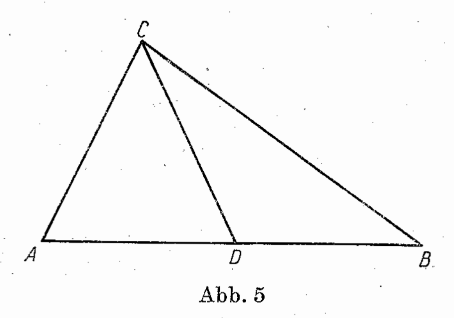


Abb. 5

beweisen kann man, daß sie nicht größer als π sein kann. Hier zeigen wir, daß die Winkelsumme eines beliebigen Dreiecks gleich π ist. $\varkappa$ sei die obere Grenze für die Winkelsumme im Dreieck, $\varkappa \leqq \pi$, und es existiere ein Dreieck ABC (s. Abb. 5), in dem die maximale Winkelsumme $\varkappa$ angenommen wird. Einen beliebigen, im Innern der Seite AB gelegenen Punkt D verbinden wir als Strecke CD mit C. CD teilt unser Dreieck in zwei Dreiecke, ADC und DCB, und die Winkelsumme jedes Dreiecks ist nicht größer als $\varkappa$. Andererseits ist die Winkelsumme in beiden Dreiecken gleich $\varkappa + \pi$. Folglich ist $\varkappa + \pi \leqq 2\varkappa$. Da aber $\varkappa$ nicht größer ist als π, folgt $\varkappa = \pi$. Also existiert ein Dreieck, dessen Winkelsumme gleich π ist, und das fünfte Postulat von EUKLID ist bewiesen.

Der Fehler lag in der Voraussetzung über die Existenz eines Dreiecks, dessen Winkelsumme die obere Grenze annimmt. In der Geometrie von N. I. LOBATSCHEWSKIJ ist die Differenz zwischen π und der Winkelsumme eines Dreiecks proportional der Fläche des Dreiecks, und wenn diese Differenz gegen Null konvergiert, so artet das Dreieck in einen Punkt aus.

Satz 1 läßt sich auf halbstetige Funktionale verallgemeinern. Ein Funktional $f(x)$ heißt *unten* (*oben*) *halbstetig*, wenn aus $x_n \to x$ folgt $\underline{\lim}_n f(x_n) \geqq f(x_n)$ $(\overline{\lim}_n f(x_n) \leqq f(x))$. Für solche Funktionale gilt:

Satz 2. *Ein unten* (*oben*) *halbstetiges Funktional* $f(x)$, *das auf einer in sich kompakten Menge definiert ist, ist dort unten* (*oben*) *beschränkt und nimmt auf ihr die untere* (*obere*) *Grenze an.*

Dieser Satz findet in der Variationsrechnung weite Anwendung, da die wichtigsten Klassen der dort betrachteten Funktionale halbstetig sind.

Kriterien für die Kompaktheit von Mengen in einem metrischen Raum. Wir beweisen jetzt ein allgemeines Kriterium für die Kompaktheit einer in einem metrischen Raum gelegenen Menge. Hierzu führen wir folgende Definition ein:

Eine Menge N eines metrischen Raumes X heißt ε-Netz *für die Menge* M desselben Raumes, wenn es zu jedem Punkt $x \in M$ einen Punkt $x_\varepsilon \in N$ gibt, so daß $\varrho(x, x_\varepsilon) < \varepsilon$ ist. (Speziell kann M mit dem ganzen Raum X zusammenfallen.)

Satz 3 (Hausdorff). *Für die Kompaktheit einer Menge K eines metrischen Raumes X ist notwendig, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein endliches ε-Netz für die Menge K gibt. Ist der Raum X vollständig, so ist diese Bedingung auch hinreichend.*

Notwendigkeit. Wir setzen voraus, daß K kompakt ist. Es sei x_1 ein beliebiger Punkt aus K. Ist $\varrho(x, x_1) < \varepsilon$ für alle $x \in K$, so ist ein endliches ε-Netz bereits konstruiert. Ist dies jedoch nicht der Fall, so existiert ein Punkt $x_2 \in K$, so daß $\varrho(x_1, x_2) \geqq \varepsilon$ ist. Wenn für jeden Punkt $x \in K$ entweder $\varrho(x_1, x) < \varepsilon$ oder $\varrho(x_2, x) < \varepsilon$ ist, so haben wir ein endliches ε-Netz gefunden. Gilt dies jedoch nicht, so gibt es einen Punkt x_3, für den

$$\varrho(x_1, x_3) \geqq \varepsilon\,, \qquad \varrho(x_2, x_3) \geqq \varepsilon$$

ist. Wenn wir so fortfahren, konstruieren wir Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_n$, für die

$$\varrho(x_i, x_j) \leqq \varepsilon$$

gilt für $i \neq j$. Es gibt zwei Möglichkeiten. Entweder bricht das Verfahren nach dem k-ten Schritt ab, d. h., für jedes $x \in K$ gilt eine der Ungleichungen

$$\varrho(x, x_i) < \varepsilon\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, k\,,$$

und die $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bilden ein endliches ε-Netz[1]) für K, oder man kann das angegebene Verfahren unbeschränkt fortsetzen. Dies kann aber nicht eintreten, da wir sonst eine unendliche Punktfolge $\{x_n\}$ erhielten, für die

$$\varrho(x_i, x_j) \geqq \varepsilon$$

für $i \neq j$ wäre, und weder diese Folge selbst, noch irgendeine ihrer Teilfolgen würde konvergieren. Dies widerspricht jedoch der Voraussetzung, daß K kompakt ist.

Hinlänglichkeit. Wir setzen voraus, daß der Raum X vollständig ist und daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein endliches ε-Netz für K gibt. Wir wählen eine Nullfolge $\{\varepsilon_n\}$. Zu jedem ε_n konstruieren wir ein endliches ε_n-Netz

$$[x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_{k_n}^{(n)}]$$

für die Menge K. Dann wählen wir eine beliebige unendliche Teilmenge $T \subseteq K$. Um jeden Punkt des Netzes $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_{k_1}^{(1)}$, das zu ε_1 gehört, legen wir eine abgeschlossene Kugel vom Radius ε_1. Dann ist jeder Punkt aus T in einer dieser Kugeln enthalten. Da die Anzahl der Kugeln endlich ist, so gibt es mindestens in einer dieser Kugeln eine unendliche Punktmenge aus T. Wir bezeichnen diese

[1]) Dieses ε-Netz besteht aus Punkten der Menge K.

Teilmenge der Menge T mit T_1. Um jeden Punkt $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_{k_2}^{(2)}$ des ε_2-Netzes legen wir eine abgeschlossene Kugel mit dem Radius ε_2. Durch dieselbe Überlegung wie oben gelangen wir zu einer unendlichen Menge $T_2 \subseteq T_1$, die in einer der konstruierten Kugeln vom Radius ε_2 gelegen ist. Wenn wir dieses Verfahren fortsetzen, erhalten wir eine Folge unendlicher Teilmengen von T: $T_1 \supseteq T_2 \supseteq \ldots \supseteq T_n \supseteq \ldots$, wobei die Teilmenge T_n in einer abgeschlossenen Kugel vom Radius ε_n gelegen ist. Folglich ist der Abstand zwischen zwei beliebigen Punkten aus T_n nicht größer als $2\,\varepsilon_n$.

Wir wählen jetzt einen Punkt $\xi_1 \in T_1$, einen Punkt $\xi_2 \in T_2$, der verschieden ist von ξ_1, einen Punkt $\xi_3 \in T_3$, der verschieden ist von ξ_1 und ξ_2, usw. und erhalten eine Punktfolge

$$T_\omega = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots\}\,.$$

Diese Folge konvergiert in sich. Es gilt nämlich $\xi_n \in T_n$ und $\xi_{n+p} \in T_{n+p}$ für jede natürliche Zahl p. Folglich geht

$$\varrho(\xi_{n+p}, \xi_n) < 2\,\varepsilon_n \to 0$$

für $n \to \infty$. Da nach Voraussetzung der Raum X vollständig ist, so konvergiert die Folge T_ω gegen ein $\xi \in X$. Somit ist die Kompaktheit der Menge K bewiesen.

Folgerung 1. *Eine Menge K eines vollständigen metrischen Raumes X ist kompakt genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein kompaktes ε-Netz für K gibt.*

Es sei N ein kompaktes $\varepsilon/2$-Netz für die Menge K. Wenn man auf N den vorherigen Satz anwendet, so findet man, daß es zu N ein endliches $\varepsilon/2$-Netz N_0 gibt. Dann ist N_0 ein endliches ε-Netz für K. Zu jedem Punkt $x \in K$ existiert nämlich ein Punkt $\xi \in N$, so daß

$$\varrho(x, \xi) < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Daraus wiederum folgt, daß es zu dem Punkt $\xi \in N$ einen Punkt $x_\varepsilon \in N_0$ gibt, so daß

$$\varrho(\xi, x_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$$

erfüllt ist. Folglich gibt es zu jedem Punkt $x \in K$ in N_0 einen Punkt x_ε, so daß

$$\varrho(x, x_\varepsilon) \leqq \varrho(x, \xi) + \varrho(\xi, x_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

gilt, d. h., N_0 ist ein endliches ε-Netz für K.

Da der Raum X vollständig ist, so schließen wir nach Satz 3, daß K kompakt ist.

Folgerung 2. *Ein kompakter Raum X ist separabel.*

Wir wählen eine beliebige Folge $\{\varepsilon_n\}$ mit $\lim\limits_n \varepsilon_n = 0$ und konstruieren zu jedem ε_n ein endliches ε_n-Netz. Es sei

$$N_n = [x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_{k_n}^{(n)}]$$

und $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$. Offenbar ist N eine abzählbare Menge, die überall dicht in X ist.

Folgerung 3. *Eine kompakte Menge K eines metrischen Raumes ist beschränkt.*

Es sei $N_1 = \{x_1, \ldots, x_n\}$ ein 1-Netz für K, a ein festes Element des Raumes X und

$$d = \max_i \varrho(a, x_i) .$$

Offenbar gilt für jeden Punkt $x \in K$

$$\varrho(x, a) < 1 + d ,$$

und somit ist alles bewiesen.

Wir geben noch zwei Besonderheiten von in sich kompakten Mengen an, die auch zur Definition des Begriffs Kompaktheit in sich verwandt werden können.

Ein System $\{G_\alpha\}$ offener Mengen des Raumes X heißt *Überdeckung der Menge* $M \subset X$, wenn jeder Punkt $x \in M$ zumindest einer der Mengen G_α dieses Systems angehört.

Satz 4. *Notwendig und hinreichend für die Kompaktheit in sich einer abgeschlossenen Menge F des metrischen Raumes X ist, daß aus einer beliebigen Überdeckung dieser Menge eine endliche Überdeckung herausgegriffen werden kann.*

Notwendigkeit. $\{G_\alpha\}$ sei ein System offener Mengen, die die in sich kompakte Menge F überdecken, aber derart, daß aus ihnen keine endliche Überdeckung herausgegriffen werden kann. Wir betrachten eine Nullfolge $\{\varepsilon_n\}$. $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_{k_1}^{(1)}$ sei ein ε_1-Netz für die Menge F. Dann ist

$$F = \bigcup_{i=1}^{k_1} F_i$$

mit

$$F_i = \overline{S}(x_i^{(1)}, \varepsilon_1) \cap F .$$

Es ist leicht erkennbar, daß F_i eine in sich kompakte Menge von einem Durchmesser kleiner oder gleich $2\,\varepsilon_1$ ist. Wenn die Menge F keine Überdeckung durch ein endliches Teilsystem aus $\{G_\alpha\}$ duldet, so gilt dasselbe für mindestens eine der Mengen F_i. F_{i_1} sei eine solche Menge.

Analog vorgehend wählen wir aus F_{i_1} einen in sich kompakten Teil $F_{i_1 i_2}$ von einem Durchmesser kleiner oder gleich $2\,\varepsilon_2$, der keine Überdeckung durch ein endliches Teilsystem aus $\{G_\alpha\}$ erlaubt, usw. Wir erhalten eine Folge einander enthaltender kompakter abgeschlossener Mengen

$$F_{i_1} \supset F_{i_1 i_2} \supset \cdots \supset F_{i_1 i_2 \ldots i_n} \supset \cdots ,$$

deren Durchmesser gegen Null streben.

x_0 sei ein allen diesen Mengen angehörender Punkt. Da das System $\{G_\alpha\}$ eine Überdeckung der Menge F bildet und $x_0 \in F$ ist, gibt es eine Menge G_{α_0}, die diesen Punkt enthält. Auf Grund der Offenheit der Menge G_{α_0} existiert eine Umgebung $S(x_0, \varepsilon)$ des Punktes x_0, die ganz in G_{α_0} liegt. Wir wählen nun n so groß, daß der Durchmesser von $F_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ kleiner als ε wird. Dann ist offenbar

$$F_{i_1 i_2 \ldots i_n} \subset S(x_0, \varepsilon) ,$$

und wir gelangen zu einem Widerspruch, da einerseits die Menge $F_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ laut Konstruktion nicht von einem endlichen Teilsystem aus $\{G_\alpha\}$ überdeckt werden kann, aber andererseits diese Menge von G_{α_0} überdeckt wird.

Folglich kann aus jeder Überdeckung der Menge F eine endliche Überdeckung herausgegriffen werden, und die Notwendigkeit ist bewiesen.

Hinlänglichkeit. Wir setzen voraus, daß aus jeder Überdeckung der Menge F eine endliche Überdeckung ausgewählt werden kann. M sei eine Teilmenge der Menge F, die keinen einzigen Häufungspunkt besitzt. Dann gibt es für jeden Punkt $x \in F$ eine Umgebung $S(x, \varepsilon_x)$, die außer höchstens x selbst keinen Punkt aus M enthält. Diese Umgebungen bilden eine Überdeckung der Menge M. Wir wählen aus ihr die endliche Überdeckung

$$S(x_1, \varepsilon_1), S(x_2, \varepsilon_2), \ldots, S(x_n, \varepsilon_n)$$

aus. Da die ganze Menge M in diesen Umgebungen liegt und da in jeder Umgebung nicht mehr als ein Punkt der Menge M liegen kann, muß die Menge M endlich sein. Folglich muß jede unendliche Teilmenge $M \subset F$ Grenzwerte besitzen, d. h., F ist kompakt.

Ein Mengensystem heißt *zentriert*, wenn ein beliebiges endliches Teilsystem einen nicht leeren Durchschnitt besitzt.

Satz 5. *Für die Kompaktheit einer abgeschlossenen Menge F eines metrischen Raumes X ist notwendig und hinreichend, daß ein beliebiges zentriertes System abgeschlossener Teilmengen der Menge F einen nichtleeren Durchschnitt besitzt.*

Notwendigkeit. F sei in sich kompakt und $\{F_\alpha\}$ ein zentriertes System abgeschlossener durchschnittsfremder Teilmengen der Menge F. Wir definieren $G_\alpha = C\,F_\alpha$ ($C\,A$ bezeichnet das Komplement der Menge A). Dann sind die G_α offene Mengen und es ist $\bigcup_\alpha G_\alpha = C \bigcap_\alpha F_\alpha = X$. Deshalb bildet das System $\{G_\alpha\}$ eine Überdeckung von F, und es kann ein endliches, F überdeckendes Teilsystem herausgegriffen werden, nämlich

$$G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \ldots, G_{\alpha_n}.$$

Da $\bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i} \supset F$ ist, so gilt

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} = C \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i} \subset C\,F. \tag{2}$$

Andererseits aber ist $F_{\alpha_i} \subset F$, und deshalb gilt

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} \subset F. \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt $\bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} = \Phi$. Das widerspricht aber der Voraussetzung, wonach $\{F_\alpha\}$ ein zentriertes System sein sollte. Die Notwendigkiet ist damit bewiesen.

Hinlänglichkeit. Es möge ein beliebiges zentriertes System abgeschlossener Teilmengen von F einen nichtleeren Durchschnitt besitzen. Wir betrachten eine beliebige Überdeckung $\{G_\alpha\}$ der Menge F mit offenen Mengen. Wir definieren

$$F_\alpha = F \setminus G_\alpha = F \cap C\, G_\alpha .$$

Die Mengen F_α sind abgeschlossen, daher gilt

$$\bigcap_\alpha F_\alpha = F \setminus \bigcup_\alpha G_\alpha = \Phi .$$

Deshalb ist das System $\{F_\alpha\}$ nicht zentriert, und folglich existiert ein Teilsystem $F_{\alpha_1}, F_{\alpha_2}, \ldots, F_{\alpha_n}$ mit einem leeren Durchschnitt. Dann ist für die entsprechenden Mengen $G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \ldots, G_{\alpha_n}$

$$\bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha i} \supset F \setminus \bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha i} = F .$$

Also kann aus einer beliebigen Überdeckung $\{G_\alpha\}$ der Menge F eine endliche Überdeckung ausgewählt werden.

Satz 6. *Jede in sich kompakte Menge eines metrischen Raumes ist ein stetiges Bild des* CANTOR*schen Diskontinuums.*

K sei eine in sich kompakte Menge des metrischen Raumes X. Wir betrachten die Nullfolge $\{\varepsilon_n\}$ und konstruieren für jedes $n = 1, 2, 3, \ldots$ ein endliches ε_n-Netz $\{x_i^{(n)}\}$, $i = 1, 2, \ldots, m_n$, für K. Durch Hinzufügen zusätzlicher Punkte können wir nötigenfalls immer erreichen, daß $m_n = 2^{k_n}$ ist. Wir betrachten die Kugeln $S_i^{(1)}$ vom Radius ε_1 und den Mittelpunkten $x_i^{(1)}$. Die Menge K liegt ganz in diesen Kugeln und erst recht in den abgeschlossenen Kugeln $\overline{S_i^{(1)}}$. Es sei $K_{i_1} = K \cap \overline{S_{i_1}^{(1)}}$, $i_1 = 1, 2, \ldots, m_1$. Die Menge K kann dargestellt werden als eine Summe von m_1 abgeschlossenen Mengen, deren Durchmesser nicht größer als $2\,\varepsilon_1$ sind. Als abgeschlossener Teil einer in sich kompakten Menge ist jedes K_{i_1} wiederum eine in sich kompakte Menge. Durch Wiederholung des vorangegangenen Schrittes stellen wir jedes K_{i_1} als Summe von m_2 abgeschlossenen Mengen $K_{i_1 i_2}$, $i_2 = 1, 2, \ldots, m_2$, dar, deren Durchmesser nicht größer als $2\,\varepsilon_2$ sind usw. Alle diese Mengen können als nicht leer angesehen werden.

Wir wenden uns nun dem CANTORschen Diskontinuum P_0 zu. Diese Menge liegt ganz auf den Abschnitten $\Delta_{j_1 j_2 \ldots j_k}$, $j_l = 0, 1$, k_1-ter Ordnung, aber auch ganz auf den Abschnitten $\Delta_{j_1 j_2 \ldots j_{k_1+k_2}}$ $(k_1 + k_2)$-ter Ordnung usw. Wir numerieren die Abschnitte k_1-ter Ordnung von links nach rechts um und bezeichnen sie mit $\tilde{\Delta}_{i_1}$, $i_1 = 1, 2, \ldots, m_1 = 2^{k_1}$. Auf jedem Abschnitt k_1-ter Ordnung $\tilde{\Delta}_{i_1}$ liegen $2^{k_2} = m_2$ Abschnitte $(k_1 + k_2)$-ter Ordnung. Wir numerieren sie wiederum von links nach rechts um und bezeichnen sie mit $\tilde{\Delta}_{i_1 i_2}$, $i_2 = 1, 2, \ldots, m_2$, usw. Wir erhalten eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den abgeschlossenen Mengen $F_{i_1 i_2 \ldots i_s}$ des Raumes X und den Abschnitten $\tilde{\Delta}_{i_1 i_2 \ldots i_s}$ des Intervalls $[0, 1]$.

Wir greifen einen beliebigen Punkt $t \in P_0$ heraus. Er bestimmt eindeutig ein System von Abschnitten $\tilde{\Delta}_{i_1}$, $\tilde{\Delta}_{i_1 i_2}$, $\tilde{\Delta}_{i_1 i_2 i_3}, \ldots$, in denen er enthalten ist und die ihn immer enger umfassen. Wir betrachten das entsprechende System abgeschlossener Mengen K_{i_1}, $K_{i_1 i_2}$, $K_{i_1 i_2 i_3}, \ldots$ (mit denselben Indizes wie bei den Abschnitten). Da jede folgende Menge in der vorhergehenden liegt und der Durchmesser der Mengen gegen Null strebt, existiert ein eindeutig bestimmter Punkt $x \in K$, der in allen diesen Mengen liegt. Wir ordnen ihn dem Punkt $t \in P_0$ zu.

Nun zeigen wir, daß jeder Punkt $x \in K$ das Bild eines Punktes $t \in P_0$ darstellt. Es ist $x \in K_{i_1}$ für einen Indexwert i_1 (dieser Index ist im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt, da die Mengen K_{i_1} sich überschneiden können), analog ist $x \in K_{i_1 i_2}$ usw. Den Mengen K_{i_1}, $K_{i_1 i_2}$ entsprechen die Abschnitte $\tilde{\Delta}_{i_1}$, $\tilde{\Delta}_{i_1 i_2}, \ldots$. Der allen diesen Abschnitten gemeinsame Punkt t besitzt als Bild den betrachteten Punkt x. So ist eindeutig eine Abbildung $x = \varphi(t)$ des Cantorschen Diskontinuums P_0 auf die in sich kompakte Menge K erklärt. Wie wir zeigen werden, ist diese Abbildung stetig.

Es sei $x_0 = \varphi(t_0)$ und $S(x_0, \varepsilon)$ eine Umgebung des Punktes x_0. Wir nehmen eine solche Menge $K_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ aus dem sich auf x_0 kontrahierenden System, deren Durchmesser kleiner als ε ist. Dann ist $K_{i_1 i_2 \ldots i_n} \subset S(x_0, \varepsilon)$. Mit δ bezeichnen wir den Abstand von t_0 zum nächsten Eckpunkt des der Menge $K_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ entsprechenden Abschnitts $\tilde{\Delta}_{i_1 i_2 \ldots i_n}$. Wenn $|t - t_0| < \delta$ ist, wird $t \in \tilde{\Delta}_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ und folglich

$$x = \varphi(t) \in K_{i_1 i_2 \ldots i_n} \subset S(x_0, \varepsilon) .$$

Deshalb ist $\varrho(x, x_0) < \varepsilon$, und der Satz ist vollständig bewiesen.

Wir betrachten nun eine Abbildung f eines Kompaktums X in einen metrischen Raum Y.

Satz 7. *Ein stetiges Bild eines Kompaktums ist ein Kompaktum.*

Es sei nämlich $\{y_n\}$ eine beliebige Folge aus $f(X) \subset Y$. Für jedes y_n nehmen wir eines seiner Urbilder x_n. Da $\{x_n\} \subset X$ und X ein Kompaktum ist, ist aus $\{x_n\}$ eine gegen $x_0 \in X$ konvergente Teilfolge herausgreifbar. Da nun $f(x)$ stetig ist, strebt

$$f(x_{n_k}) = y_{n_k} \to y_0 = f(x_0) \in f(X) .$$

Damit enthält eine beliebige Folge aus $f(X)$ eine konvergente Teilfolge, wobei der Grenzwert jener Teilfolge in $f(X)$ liegt. Folglich ist $f(X)$ ein Kompaktum.

Dieser Satz gibt in Verbindung mit Satz 6 eine vollständige Beschreibung aller Kompakta: *Ein metrischer Raum K ist genau dann ein Kompaktum, wenn er ein stetiges Bild des Cantorschen Diskontinuums ist.*

§ 2. Kriterien für die Kompaktheit von Mengen in speziellen Räumen

Kriterium für die Kompaktheit in $C[0, 1]$. Funktionen einer Menge M heißen *gleichmäßig beschränkt,* wenn es eine Konstante c gibt, so daß $|x(t)| \leq c$ ist für alle zu M gehörenden Funktionen $x(t)$. Sie heißen *gleichgradig stetig,* wenn

es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein für alle Funktionen $x(t)$ aus M universelles nur von ε abhängendes $\delta > 0$ gibt, so daß für $|t_1 - t_2| < \delta(\varepsilon)$ gilt: Es ist $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$ für jedes t_1 und t_2 aus $[0, 1]$.

Satz 1 (Arzelà). *Eine Menge $K \subset C[0, 1]$ ist kompakt genau dann, wenn die Funktionen $x(t) \in K$ gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig sind.*

Notwendigkeit. K sei kompakt. Die gleichmäßige Beschränktheit der Funktionen $x(t) \in K$ ergibt sich aus Folgerung 3 von Satz 3, § 1. Wir beweisen die gleichgradige Stetigkeit der Funktionen $x(t) \in K$. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ konstruieren wir ein endliches $\varepsilon/3$-Netz $[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_k(t)]$ für die Menge K. Da die Funktionen $x_i(t)$ auf $[0, 1]$ stetig sind, so sind sie auf diesem Intervall auch gleichmäßig stetig.

Zu jeder Funktion $x_i(t)$ wählen wir ein δ_i, so daß

$$|x_i(t_1) - x_i(t_2)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

gilt für $|t_1 - t_2| < \delta_i$ und jedes $t_1, t_2 \in [0, 1]$. Es sei δ die kleinste der Zahlen δ_i, $i = 1, 2, \ldots, k$. Ist jetzt $|t_1 - t_2| < \delta$, so gilt für jede Funktion $x(t) \in K$

$$|x(t_1) - x(t_2)| \leqq \max_{0 \leqq t_1 \leqq 1} |x(t_1) - x_i(t_1)| + |x_i(t_1) - x_i(t_2)| + \max_{0 \leqq t_2 \leqq 1} |x_i(t_2) - x(t_2)| < 2\,\varrho(x, x_i) + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Wenn wir aus dem Netz hierbei dasjenige $x_i(t)$ wählen, für das

$$\varrho(x_i, x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

gilt, so ist

$$|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war und die so erhaltene Abschätzung von der Lage der Punkte t_1 und t_2 aus $[0, 1]$ und von der Wahl der Funktion $x(t)$ aus K unabhängig ist, so ist die gleichgradige Stetigkeit aller zu K gehörenden Funktionen bewiesen.

Hinlänglichkeit. Auf Grund der Voraussetzungen des Satzes kann man zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ angeben, so daß

$$|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$$

ist für $|t_1 - t_2| < \delta$ für jedes $t_1 \in [0, 1]$, $t_2 \in [0, 1]$ und für jede Funktion $x(t) \in K$. Wir wählen eine natürliche Zahl n so, daß $1/n < \delta$ ist und teilen $[0, 1]$ in n gleiche Teile

$$\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right], \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Dann gilt

$$|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$$

für jede Funktion $x(t) \in K$ und für alle $t_1, t_2 \in [0, 1]$, für die $|t_1 - t_2| < \frac{1}{n} < \delta$ ist, speziell also für alle t_1, t_2 aus ein und demselben Teilintervall $\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$.

Jedem $x(t)$ ordnen wir eine stetige Funktion $x_n(t)$ zu, so daß

1. $x_n\left(\frac{i}{n}\right) = x\left(\frac{i}{n}\right)$ für $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ ist und
2. auf den Intervallen $\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$ die Funktionen $x_n(t)$ linear sind.

Also ist $x_n(t)$ ein der Kurve $x(t)$ einbeschriebener Polygonzug mit n Strecken.

Es sei

$$x\left(\frac{i}{n}\right) \leqq x\left(\frac{i+1}{n}\right).$$

Dann gilt wegen der Linearität von $x_n(t)$ auf $\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$

$$x\left(\frac{i}{n}\right) \leqq x_n(t) \leqq x\left(\frac{i+1}{n}\right),$$

daraus folgt

$$-\varepsilon < x(t) - x\left(\frac{i+1}{n}\right) \leqq x(t) - x_n(t) \leqq x(t) - x\left(\frac{i}{n}\right) < \varepsilon .$$

Ist

$$x\left(\frac{i+1}{n}\right) \leqq x\left(\frac{i}{n}\right),$$

so erhalten wir

$$-\varepsilon < x(t) - x\left(\frac{i}{n}\right) \leqq x(t) - x_n(t) \leqq x(t) - x\left(\frac{i+1}{n}\right) < \varepsilon .$$

Folglich gilt

$$|x(t) - x_n(t)| < \varepsilon$$

für alle $t \in [0, 1]$, d. h., es ist

$$\varrho(x, x_n) < \varepsilon .$$

Also bildet die Menge N der Funktionen $x_n(t)$ ein ε-Netz für K.

Ferner gilt wegen der gleichmäßigen Beschränktheit der Menge K

$$|x_n(t)| \leqq |x(t)| + |x(t) - x_n(t)| < \varepsilon + C = c_1 ,$$

d. h., N ist gleichmäßig beschränkt.

Wir ordnen jeder Funktion $x_n(t) \in N$ den Punkt des $(n+1)$-dimensionalen Raumes $\tilde{X}$ zu, der als Koordinaten die Ordinaten der Eckpunkte des Polygonzuges $x_n(t)$ besitzt. Diese Zuordnung ist, wie man leicht sieht, umkehrbar eindeutig und auch umkehrbar stetig in dem Sinne, daß die Punktfolge $\{\tilde{x}^{(k)}\}$ gegen den Punkt $\tilde{x}^{(0)}$ im Sinne der Metrik des Raumes E_{n+1} konvergiert, wenn die Folge der Funktionen $\{x_n^{(k)}(t)\}$ gegen $x_n^{(0)}(t)$ im Sinne der Metrik des Raumes $C\,[0, 1]$ konvergiert. Nun ist die Menge $\tilde{N} = \{\tilde{x}\}$ beschränkt und folglich kompakt in E_{n+1}. Darum ist die Menge $N = \{x_n(t)\}$ kompakt in $C\,[0, 1]$.

Somit kann für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ ein kompaktes ε-Netz für K konstruiert werden. Dann aber ist auf Grund der Vollständigkeit von $C\,[0, 1]$ und der Folgerung 1 des Satzes 3 im vorigen Paragraphen K kompakt.

Der bewiesene Satz erlaubt eine Verallgemeinerung auf den Fall der Abbildung kompakter Mengen in Kompakta.

Es mögen zwei metrische Räume X und Y und die Menge F der Abbildungen f des Raumes X in den Raum Y gegeben sein. Eine Abbildung $f \in F$ heißt *beschränkt*, wenn für ein beliebiges $x \in X$

$$\varrho(f(x), \theta) \leqq c_f$$

ist. Dabei bedeutet θ ein festes Element des Raumes Y und c_f eine im allgemeinen von der Abbildung f abhängende Konstante. Eine Abbildung $f \in F$ heißt *gleichmäßig stetig*, wenn es für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß

$$\varrho\big(f(x_1), f(x_2)\big) < \varepsilon$$

für zwei beliebige Punkte x_1 und x_2 des Raumes X mit $\varrho(x_1, x_2) < \delta$ wird.

$M(X, Y)$ sei die Menge aller beschränkten Abbildungen des Raumes X in den Raum Y. Wir machen $M(X, Y)$ zu einem metrischen Raum, indem wir

$$\varrho(f, \varphi) = \sup_{x \in X} \varrho\big(f(x), \varphi(x)\big)$$

setzen. Es folgt die Gültigkeit aller metrischen Axiome. Die Konvergenz im Raum $M(X, Y)$ ist die auf X gleichmäßige Konvergenz einer Folge von Abbildungen $\{f_n(x)\} \subset M(X, Y)$ gegen eine Abbildung $f(x) \in M(X, Y)$.

Ist Y ein vollständiger Raum, so ist auch $M(X, Y)$ ein vollständiger Raum.

Strebt $\varrho(f_n, f_m) \to 0$ für n und m gegen ∞, so gibt es für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ eine Zahl $n_0(\varepsilon)$ mit

$$\varrho\big(f_n(x), f_m(x)\big) < \varepsilon \tag{1}$$

für alle $x \in X$, sofern $n, m \geqq n_0(\varepsilon)$ ist. Wir halten $x \in X$ fest. Auf Grund der Vollständigkeit des Raumes Y konvergiert die in sich konvergente Folge $\{f_n(x)\}$ gegen ein Element $y \in Y$. Wir setzen

$$f(x) = y = \lim_n f_n(x)$$

und erhalten eine Abbildung des Raumes X in den Raum Y.

Durch Übergang zum Grenzwert in Ungleichung (1) für $m \to \infty$ erhalten wir

$$\varrho\big(f_n(x), f(x)\big) \leqq \varepsilon$$

für alle x bei $n \geqq n_0(\varepsilon)$. Daraus folgt $f \in M(X, Y)$ und die auf X gleichmäßige Konvergenz $f_n(x) \to f(x)$.

Wir bezeichnen mit $C(X, Y)$ die Menge aller gleichmäßig stetigen Abbildungen aus $M(X, Y)$. Man überzeugt sich leicht davon, daß der Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Folge gleichmäßig stetiger Abbildungen ebenfalls eine gleichmäßig stetige Abbildung ist. Folglich ist die Menge $C(X, Y)$ abgeschlossen im Raum $M(X, Y)$.

Zum Schluß führen wir noch eine Definition ein. Die Abbildungen f, die einer Mengenfamilie $Q \subset C(X, Y)$ angehören, heißen *gleichgradig stetig*, wenn für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ ein nur von ε abhängendes $\delta > 0$ existiert, so daß

$$\varrho\big(f(x_1), f(x_2)\big) < \varepsilon$$

wird, sofern $\varrho(x_1, x_2) < \delta$ ist, und zwar gleichzeitig für alle $f \in Q$ und unabhängig von der Auswahl der Punkte x_1 und $x_2 \in X$.

Satz 2. *Aus einer Mengenfamilie Q von stetigen Abbildungen einer kompakten Menge X in ein Kompaktum Y kann man genau dann eine gleichmäßig konvergente Folge herausgreifen, wenn die Abbildungen der Familie Q gleichgradig stetig sind.*

Wir zeigen nur die Hinlänglichkeit der formulierten Bedingung.

Zunächst ist Y als Kompaktum eine beschränkte Menge, und infolgedessen sind alle Abbildungen der Familie Q gleichmäßig beschränkt.

Deswegen ist $Q \subset C(X, Y)$. Da $C(X, Y)$ in $M(X, Y)$ abgeschlossen ist, genügt es für den Beweis der Kompaktheit von Q in $C(X, Y)$, die Kompaktheit in $M(X, Y)$ nachzuweisen.

Für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ nehmen wir ein $\delta > 0$ derart, daß für $\varrho(x_1, x_2) < \delta$

$$\varrho(f(x_1), f(x_2)) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

ist, und zwar gleichzeitig für alle $f \in Q$. Das ist auf Grund der gleichgradigen Stetigkeit der Abbildungen möglich. Wir wählen danach ein endliches $\delta/2$-Netz $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in der Menge X und definieren die Mengen

$$X_i = S\left(x_i, \frac{\delta}{2}\right) \setminus \bigcup_{j \neq i} S\left(x_j, \frac{\delta}{2}\right).$$

Sie überschneiden sich nicht, ergeben in der Summe X, und der Durchmesser jedes X_i ist nicht größer als δ. $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sei weiter ein $\varepsilon/2$-Netz für das Kompaktum Y. Wir betrachten alle möglichen Funktionen $g(x) \in M(X, Y)$, die auf den Mengen X_i die konstanten Werte y_j annehmen. Diese Funktionen bilden ein endliches ε-Netz für die Menge Q. Nehmen wir eine Abbildung $f \in Q$, so erhalten wir für beliebiges $x \in X$ und jedes $g(x)$

$$\varrho(f(x), g(x)) \leqq \varrho(f(x), f(x_i)) + \varrho(f(x_i), g(x_i)) + \varrho(g(x_i), g(x)),$$

wobei x_i so gewählt wurde, daß $x \in X_i$ ist. Deshalb ist auf Grund von (2), und da x und x_i ein und demselben X_i angehören,

$$\varrho(f(x), f(x_i)) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \varrho(g(x), g(x_i)) = 0$$

und daher

$$\varrho(f(x), g(x)) < \frac{\varepsilon}{2} + \varrho(f(x_i), g(x_i)).$$

Wir wählen nun $g(x)$ so, daß $g(x_i) = y_j$ der Ungleichung

$$\varrho(f(x_i), y_j) < \frac{\varepsilon}{2}$$

genügt. Dann wird für jedes $x \in X$

$$\varrho(f(x), g(x)) < \varepsilon$$

und folglich

$$\varrho(f, g) = \sup_x \varrho(f(x), g(x)) \leqq \varepsilon.$$

Als Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes $M(X, Y)$ mit endlichem ε-Netz ist die Menge Q kompakt, und der Satz ist bewiesen.

Kriterien der Kompaktheit in $L_p\,[0, 1]$. $x(t)$ sei aus $L_p\,[0, 1]$. Wir erweitern die Funktion $x(t)$ über die Grenzen des Intervalls $[0, 1]$ hinaus, indem wir $x(t) = 0$ setzen, wenn t außerhalb dieses Intervalls liegt. Dann sind für ein beliebiges Intervall $[a, b]$ der Zahlengeraden die Integrale

$$\int_a^b |x(t)|\, dt \qquad \text{und} \qquad \int_a^b |x(t)|^p\, dt$$

sinnvoll.

Kriterium für die Kompaktheit in $L_p\,[0, 1]$ (Satz von M. Riesz). *Eine Funktionenfamilie*

$$K = \{x(t)\} \subset L_p[0, 1]$$

ist genau dann kompakt, wenn die Funktionen der Familie der Norm nach gleichmäßig beschränkt und im Mittel gleichgradig stetig sind, d. h., wenn gilt

1. $\int_0^1 |x(t)|^p\, dt \leqq c^p$,

2. $\int_0^1 |x\,(t + h) - x(t)|^p\, dt < \varepsilon^p$

für $0 < h < \delta(\varepsilon)$ und zwar gleichzeitig für alle Funktionen der Familie.

Notwendigkeit. Die Notwendigkeit der Bedingung 1 ist offensichtlich. Wir zeigen, daß Bedingung 2 erfüllt ist. Da K eine kompakte Menge ist, muß bei beliebigem $\varepsilon > 0$ für diese Menge ein endliches $\varepsilon/3$-Netz $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ existieren. Da jede Funktion aus $L_p\,[0, 1]$ im Mittel stetig ist, gibt es zu jedem i ein δ_i mit

$$\int_0^1 |x_i\,(t + h) - x_i(t)|^p\, dt < \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p$$

für $0 < h < \delta_i$. Es sei $\delta = \min\limits_i \delta_i$. Dann ist bei $0 < h < \delta$ und für alle $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\int_0^1 |x_i\,(t + h) - x_i(t)|^p\, dt < \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p.$$

Wir nehmen eine beliebige Funktion $x(t) \in K$. Es gibt eine Funktion $x_i(t)$ derart, daß

$$\int_0^1 |x(t) - x_i(t)|^p\, dt < \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p$$

ist. Bei $0 < h < \delta$ wird

$$\left(\int_0^1 |x\,(t + h) - x(t)|^p\, dt\right)^{1/p} \leqq \left(\int_0^1 |x\,(t + h) - x_i\,(t + h)|^p\, dt\right)^{1/p}$$
$$+ \left(\int_0^1 |x_i\,(t + h) - x_i(t)|^p\, dt\right)^{1/p} + \left(\int_0^1 |x_i(t) - x(t)|^p\, dt\right)^{1/p}$$
$$< \left(\int_0^1 |x\,(t + h) - x_i\,(t + h)|^p\right)^{1/p} + \frac{2\,\varepsilon}{3}.$$

Es ist aber

$$\int_0^1 |x(t+h) - x_i(t+h)|^p \, dt = \int_h^1 |x(s) - x_i(s)|^p \, ds \leqq \int_0^1 |x(s) - x_i(s)|^p \, ds < \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p$$

(hier benutzen wir, daß $x(t)$ und $x_i(t)$ außerhalb $[0, 1]$ Null sind). Aus den letzten zwei Ungleichungen folgt

$$\left(\int_0^1 |x(t+h) - x(t)|^p \, dt\right)^{1/p} < \varepsilon$$

für $0 < h < \delta$, und da $x(t)$ eine beliebige Funktion aus K war, ist die Notwendigkeit der Bedingung 1 bewiesen.

Hinlänglichkeit. Wir betrachten die Steklowschen Mittelfunktionen

$$x_h(t) = \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} x(\tau) \, d\tau \, .$$

Es ist

$$|x_h(t)| = \frac{1}{2h} \left| \int_{t-h}^{t+h} x(\tau) \, d\tau \right| \leqq \frac{1}{2h} \left(\int_{t-h}^{t+h} d\tau\right)^{1/q} \left(\int_{t-h}^{t+h} |x(\tau)|^p \, d\tau\right)^{1/p}$$

$$\leqq \left(\frac{1}{2h}\right)^{1/p} \left(\int_0^1 |x(\tau)|^p \, d\tau\right)^{1/p} \tag{3}$$

und

$$|x_h(t+u) - x_h(t)| = \frac{1}{2h} \left| \int_{t+u-h}^{t+u+h} x(\tau) \, d\tau - \int_{t-h}^{t+h} x(\tau) \, d\tau \right|$$

$$= \frac{1}{2h} \left| \int_{t-h}^{t+h} x(\tau + u) \, d\tau - \int_{t-h}^{t+h} x(\tau) \, d\tau \right|$$

$$\leqq \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} |x(\tau+u) - x(\tau)| \, d\tau$$

$$\leqq \left(\frac{1}{2h}\right)^{1/p} \left(\int_{t-h}^{t+h} |x(\tau+u) - x(\tau)|^p \, d\tau\right)^{1/p}$$

$$\leqq \left(\frac{1}{2h}\right)^{1/p} \left(\int_0^1 |x(\tau+u) - x(\tau)|^p \, d\tau\right)^{1/p} . \tag{4}$$

Aus den Bedingungen 1 und 2 und den Ungleichungen (3) und (4) folgt, daß bei festem h die Funktionen der Familie $\{x_h(t)\}$ für $x(t) \in K$ gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig sind. Folglich ist die Familie $\{x_h(t)\}$ kompakt

im Sinne der gleichmäßigen Konvergenz und erst recht im Sinne der Konvergenz im Mittel von p-ter Potenz. Andererseits ist

$$|x(t) - x_h(t)| \leqq \frac{1}{2h} \int_{t+h}^{t+h} |x(t) - x(\tau)| \, d\tau = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} |x(t) - x(t+\tau)| \, d\tau$$
$$\leqq \left(\frac{1}{2h}\right)^{1/p} \left(\int_{-h}^{h} |x(t) - x(t+\tau)|^p \, d\tau \right)^{1/p}.$$

Daraus folgt

$$\int_0^1 |x(t) - x_h(t)|^p \, dt \leqq \frac{1}{2h} \int_0^1 \left\{ \int_{-h}^{h} |x(t) - x(t+\tau)|^p \, d\tau \right\} dt$$
$$= \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} \left\{ \int_0^1 |x(t) - x(t+\tau)|^p \, dt \right\} d\tau < \frac{1}{2h} \varepsilon^p \int_{-h}^{h} d\tau = \varepsilon^p ,$$

da (nach Bedingung 2) $\int_0^1 |x(t+\tau) - x(t)|^p \, dt < \varepsilon^p$ ist, wenn nur $|\tau| < \delta$ wird. Somit bildet die Familie $\{x_h(t)\}$ ein ε-Netz für die Familie K, und da dieses ε-Netz kompakt ist, so ist nach der Folgerung aus dem HAUSDORFFschen Satz auch die Menge K selbst kompakt.

Wir geben ohne Beweis noch zwei Kompaktheitskriterien für Mengen im Raum $L_p[0, 1]$ an.

Satz von A. N. KOLMOGOROW. *Eine Menge $K \subset L_p[0, 1]$ ist kompakt genau dann, wenn*

1. *die Normen der Funktionen $x(t) \in K$ eine gemeinsame Schranke besitzen,*

2. *für beliebiges $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß*

$$\|x - x_h\| < \varepsilon$$

bei $h < \delta$ simultan für alle Funktionen $x(t) \in K$ ist.

Wir werden sagen, die Funktionenfamilie $M = \{x(t)\}$ besitze *gleichgradig absolut stetige Normen*, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ angegeben werden kann mit

$$\|x(t) \, \chi_E(t)\| < \varepsilon$$

für mes $E < \delta$ (hier ist $\chi_E(t)$ die charakteristische Funktion der Menge E).

Satz von M. A. KRASNOSELSKI [18]. *Die Familie $K \subset L_p[0, 1]$ besitze gleichgradig absolut stetige Normen und sei kompakt im Sinne der Konvergenz dem Maße nach. Dann ist diese Familie kompakt im Sinne der Konvergenz im Mittel.*

Kriterium für die Kompaktheit im Raum Q. Wir betrachten die Menge aller Kurven q, die durch

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \qquad (0 \leqq t \leqq 1) \tag{5}$$

gegeben sind. $x(t)$, $y(t)$ und $z(t)$ seien stetige Funktionen des Parameters t. Sind q und p zwei in der Form (5) gegebene Kurven, so ordnen wir die denselben Parameterwerten entsprechenden Kurvenpunkte einander zu. Sei d das Maximum des Abstandes zwischen zwei einander entsprechenden Punkten der beiden Kurven. Die Zahl d hängt von der Wahl der Parameterdarstellung der beiden Kurven ab. Als Abstand $\varrho(q, p)$ betrachten wir die untere Grenze der Zahlen d bei allen möglichen Parameterdarstellungen.

Man bestätigt leicht, daß der so definierte Abstand zwischen den Kurven allen metrischen Axiomen genügt. Den so erhaltenen Raum bezeichnen wir mit Q. Q spielt in der Variationsrechnung eine große Rolle. Man kann zeigen, daß Q vollständig ist.

Satz (Hilbert). *Die Menge K aller rektifizierbaren Kurven ($K \subseteq Q$), die in einem endlichen Teil des Raumes liegen und gleichmäßig beschränkte Längen besitzen, ist kompakt.*

Beweis. Die Längen der Kurven $q \in K$ seien nicht größer als l. Wir teilen jedes $q \in K$ in n Bögen von gleicher Länge, verbinden die Teilpunkte durch Sehnen und erhalten einen Polygonzug q_n. Jeder der n Bögen der Kurve q und jede Strecke des Polygonzuges q_n ist nicht größer als l/n. Der Abstand zwischen den Punkten eines solchen Bogens und den Punkten der zugehörigen Sehne ist kleiner oder gleich $2\,l/n$. Für q und q_n führen wir eine Parameterdarstellung ein, so daß man, wenn t das Intervall $\left(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, durchläuft, einen Teilbogen der Kurve q bzw. die entsprechende Strecke des Polygonzuges q_n erhält. Der Abstand zwischen zwei denselben Parameterwerten entsprechenden Punkten von q und q_n ist nicht größer als $2\,l/n$, d. h., es ist

$$\varrho(q, q_n) \leqq \frac{2\,l}{n}.$$

Also bildet die Menge K_n der Polygonzüge q_n ein $2\,l/n$-Netz für K. Jeder Polygonzug ist durch die $3\,(n+1)$ Koordinaten seiner $n+1$ Ecken festgelegt. Nach Voraussetzung sind diese Koordinaten gleichmäßig beschränkt. Daher ist K_n kompakt. Dann ist aber nach Folgerung 1 von Satz 3, § 1, auch K kompakt.

Aus dem eben bewiesenen Satz folgt eine Reihe von Sätzen über die Existenz geodätischer Linien.

Ein Kompaktheitskriterium in einem Raum mit Basis.

Satz 3. *Die Menge K eines* Banach-*Raumes E mit Basis ist kompakt genau dann, wenn K beschränkt ist und wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein n_0 existiert, so daß $\|R_n x\| < \varepsilon$ ist für $n \geqq n_0$ und jedes x aus K*[1]).

Notwendigkeit. Die Beschränktheit von K ergibt sich aus Folgerung 3, Satz 3, § 1. Wir beweisen die Gültigkeit der zweiten Bedingung.

---

[1]) Siehe Fußnote S. 171.

Dazu nehmen wir ein $\varepsilon' > 0$ und konstruieren ein endliches ε'-Netz $[x_1, x_2, \ldots, x_k]$ für K. Für ein beliebiges $x \in K$ gibt es ein x_i, welches dem ε'-Netz angehört derart, daß $||x - x_i|| < \varepsilon'$ ist. Es wird[1])

$$||R_n x|| = ||x - S_n x|| \leqq ||x - x_i|| + ||x_i - S_n x||$$
$$\leqq ||x - x_i|| + ||S_n x_i - S_n x|| + ||R_n x_i|| \leqq (1 + ||A_0^{-1}||)\, ||x - x_i||$$
$$+ ||R_n x_i|| < (1 + ||A_0^{-1}||)\, \varepsilon' + ||R_n x_i||\,.$$

Für jedes feste x geht $R_n x$ für $n \to \infty$ gegen 0. Deshalb gibt es ein n_0 mit $||R_n x_i|| < \varepsilon'$ für $n \geqq n_0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Daher ist für $n \geqq n_0$

$$||R_n x|| < (2 + ||A_0^{-1}||)\, \varepsilon'\,.$$

Nimmt man jetzt $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2 + ||A_0^{-1}||}$, so erhält man die geforderte Ungleichung, denn n_0 hängt nicht von der Wahl der $x \in K$ ab.

Hinlänglichkeit. Wir zeigen, daß aus den Voraussetzungen die Existenz eines endlichen ε-Netzes für K folgt. Zu einem vorgegebenen ε wählt man ein n_0 derart, daß $||R_{n_0} x|| < \varepsilon/2$ für alle $x \in K$ ist. Wir untersuchen dann die Menge K_{n_0}, die aus den Elementen $S_{n_0} x$ mit $x \in K$ besteht. Man kann K_{n_0} als eine durch $e_1, e_2, \ldots, e_{n_0}$ definierte Menge auffassen, die in einem n_0-dimensionalen Raum $E_{n_0} \to E$ liegt. Wegen

$$||S_{n_0} x|| \leqq ||A_0^{-1}||\; ||x||$$

und der Beschränktheit von K ist auch K_{n_0} beschränkt und daher kompakt. Dann existiert in E_{n_0} für K_{n_0} ein endliches $\varepsilon/2$-Netz. Dieses Netz wird offensichtlich ein ε-Netz für K, und das Geforderte ist bewiesen.

Ein Kompaktheitskriterium in l_p. *Eine Menge $K \subset l_p$ ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt ist und für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ eine nur von ε abhängige Zahl n_0 existiert, mit der*

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} |\xi_i|^p < \varepsilon^p$$

für $n \geqq n_0$ und beliebiges

$$x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots\} \in K$$

wird.

Der Beweis folgt sofort aus dem vorhergehenden Satz durch die Bemerkung, daß in l_p

$$\left(\sum_{i=n+1}^{\infty} |\xi_i|^p\right)^{1/p} = ||R_n x||\,.$$

Beispiel. Wir betrachten in l_2 die Menge der Elemente $x = \{\xi_i\}$ mit $0 \leq \xi_n < 1/n$, d. h. das Hauptparallelepiped der Koordinaten im Hilbert-Raum. Das vorhergehende Kriterium läßt die Folgerung zu, daß dieses Parallelepiped kompakt ist. P. S. Uryson bewies, daß jeder separable metrische Raum homöomorph zu einer Teilmenge des Hauptparallelepipeds des Raumes l_2 ist [36].

[1]) Zu den Operatoren S und R siehe S. 117, zum Operator A_0^{-1} S. 116.

Endlichdimensionalität und Kompaktheit. Es ist bekannt, daß im n-dimensionalen euklidischen Raum jede beschränkte Menge kompakt ist. Wir zeigen, daß die Kompaktheit beschränkter Mengen eine charakteristische Eigenschaft endlichdimensionaler linearer normierter Räume ist.

Satz 4. *Ein Teilraum L eines linearen normierten Raumes E ist endlich dimensional genau dann, wenn jede beschränkte Menge von Elementen aus L kompakt ist.*

Notwendigkeit. L sei n-dimensional. Dann ist L homöomorph zu dem n-dimensionalen euklidischen Raum E_n. Eine beschränkte Menge $M \subset L$ ist umkehrbar eindeutig und umkehrbar stetig abbildbar in eine beschränkte Menge $N \subset E_n$, und da N in E_n kompakt ist, muß auch M in L kompakt sein.

Hinlänglichkeit. Wir setzen voraus: Jede beschränkte Menge von Elementen aus L ist kompakt. Wir nehmen in L ein beliebiges Element x_1 mit $\|x_1\| = 1$. Mit L_1 bezeichnen wir den Unterraum, der durch das Element x_1 erzeugt wird. Ist $L = L_1$, so ist der Satz bewiesen. Wenn L_1 nicht mit L zusammenfällt, so existiert nach dem Hilfssatz von § 3, Kapitel II, in L ein Element x_2 mit $\|x_2\| = 1$ und

$$\|x_2 - x_1\| \geqq \frac{1}{2}.$$

Wir bezeichnen mit L_2 den Unterraum, der von den Elementen x_1 und x_2 aufgespannt wird. Es gibt zwei Möglichkeiten: Entweder ist $L = L_2$, und der Satz ist bewiesen, oder L_2 fällt nicht mit L zusammen. Dann existiert laut Lemma ein Element x_3 mit

$$\|x_3\| = 1, \quad \|x_3 - x_1\| \geqq \frac{1}{2}, \quad \|x_3 - x_2\| \geqq \frac{1}{2}.$$

Diesen Prozeß setzen wir fort. Man kann zwei Annahmen machen. Entweder fällt für ein n L_n mit L zusammen, und der Satz ist bewiesen, oder wir konstruieren eine unendliche Folge $\{x_n\}$ derart, daß $\|x_n\| = 1$ und $\|x_n - x_m\| \geqq 1/2$ bei $n \neq m$ für beliebiges n und m ist. Die zweite Möglichkeit entfällt jedoch, da sie die Existenz einer beschränkten ($\|x_n\| = 1$) und nichtkompakten ($\|x_n - x_m\| \geqq 1/2$ bei $n \neq m$) Menge beinhaltet, was der Satzvoraussetzung widerspräche.

Das Problem der besten Approximation. P. L. Tschebyscheff untersuchte das Problem der besten Approximation von Funktionen durch Linearkombinationen gegebener Funktionen. Ausgedrückt in der hier eingeführten Terminologie sind das Approximationen in den Räumen C, $L_{2,\varrho}$ [1]), L usw.

Wir behandeln das Problem der besten Approximation eines beliebigen Elementes x eines normierten Raumes E durch Linearkombinationen eines gegebenen Systems linear unabhängiger Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$. Wir zeigen: Das Problem der besten Approximation ist lösbar [1].

[1]) Auf S. 56 haben wir den komplexen Raum $L_{2,\varrho}$ eingeführt. Hier handelt es sich um den analog definierten reellen Raum $L_{2,\varrho}$.

Hilfssatz. *Bei unbeschränkt wachsender Summe* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$ *strebt die Funktion*

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = ||x - \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 - \cdots - \lambda_n x_n|| \to \infty .$$

Uns steht die Ungleichung

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \geqq ||\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n|| - ||x||$$

zur Verfügung, und wir betrachten zusätzlich eine andere stetige Parameterfunktion

$$\psi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = ||\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n|| .$$

Auf der Kugel $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = 1$ des n-dimensionalen euklidischen Raumes (die eine in sich kompakte Menge darstellt) nimmt diese Funktion ihren kleinsten Wert μ an, der auf Grund der linearen Unabhängigkeit der Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_n$ größer als Null ist. Ein beliebiges $k > 0$ sei gegeben. Wenn

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2} > \frac{1}{\mu}(k + ||x||)$$

ist, so ist

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \geqq \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right\| - ||x|| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2} \left\| \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2}} x_i \right\| - ||x||$$

$$\geqq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2} \cdot \mu - ||x|| > k ,$$

und der Hilfssatz ist bewiesen.

Satz. *Es existieren reelle Zahlen* $\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots, \lambda_n^{(0)}$ *derart, daß die Größe*

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = ||x - \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 - \cdots - \lambda_n x_n||$$

ihr Minimum bei $\lambda_1 = \lambda_1^{(0)}, \lambda_2 = \lambda_2^{(0)}, \ldots, \lambda_n = \lambda_n^{(0)}$ *annimmt* [1]).

Die Behauptung des Satzes ist sofort einzusehen, wenn x linear von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ abhängt. Wir nehmen nun an, x liege nicht in dem von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aufgespannten Unterraum. Daß $\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ eine stetige Funktion ihrer Argumente ist, folgt aus der Ungleichung

$$|\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) - \varphi(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)|$$

$$= \left| ||x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i|| - ||x - \sum_{i=1}^{n} \mu_i x|| \right| \leqq || \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i) x_i||$$

$$\leqq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i - \mu_i| \, ||x_i|| \leqq \max_{1 \leqq i \leqq n} |\lambda_i - \mu_i| \sum_{i=1}^{n} ||x_i|| .$$

[1]) D. h., in einem von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ erzeugten endlichdimensionalen Raum gibt es ein Element, das x am nächsten liegt.

Auf Grund des Hilfssatzes ist $\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \geqq ||x||$ außerhalb einer Kugel

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \leqq r^2 .$$

Diese Kugel ist kompakt, und so nimmt $\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ als stetige Funktion auf ihr ihren kleinsten Wert ν in einem Punkt $(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots, \lambda_n^{(0)})$ an. Es gilt aber $\nu \leqq \varphi(0, 0, \ldots, 0) = ||x||$. Deshalb ist ν der kleinste Wert der Funktion $\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ auf dem gesamten Raum der Punkte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, wodurch der Satz bewiesen ist.

Die Linearkombination

$$\lambda_1^{(0)} x_1 + \lambda_2^{(0)} x_2 + \cdots + \lambda_n^{(0)} x_n ,$$

die die beste Approximation des Elementes x liefert, ist im allgemeinen Fall nicht eindeutig. Will man den approximierenden Ausdruck $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ eindeutig machen, so muß man zusätzliche Bedingungen stellen. So betrachtet man im Raum $C[0, 1]$ Systeme von Funktionen, die sogenannten TSCHEBYSCHEFF-Bedingungen genügen. Jedoch kann man Räume angeben, in denen die beste Approximation immer eindeutig bestimmt ist.

Ein Raum E heißt *streng normiert*, wenn bei $x \neq 0$, $y \neq 0$ die Gleichung $||x + y|| = ||x|| + ||y||$ nur bei $y = \alpha x$ mit $\alpha > 0$ möglich ist.

In einem streng normierten Raum ist die beste Approximation eindeutig bestimmt. Wenn nämlich zwei Linearkombinationen $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ und $\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i$ mit

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right\| = \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i \right\| = d$$

und $d = \min \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right\| > 0$ existieren, so ist

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i + \mu_i}{2} x_i \right\| \leqq \frac{1}{2} \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right\| + \frac{1}{2} \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i \right\| = \frac{1}{2} d + \frac{1}{2} d = d ,$$

und da

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i + \mu_i}{2} x_i \right\| \geqq d$$

ist, wird

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i + \mu_i}{2} x_i \right\| = d .$$

Folglich ist

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i + \mu_i}{2} x_i \right\| = \left\| \frac{1}{2} \left(x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right) \right\| + \left\| \frac{1}{2} \left(x - \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i \right) \right\| .$$

Hieraus folgt wegen der strengen Normiertheit des Raumes

$$x - \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i = \alpha \left\{ x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right\}.$$

Wäre $\alpha \neq 1$, so würde x eine Linearkombination der Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sein. Das ist nach Voraussetzung ausgeschlossen. Daher ist $\alpha = 1$ und damit

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i) x_i = 0 ,$$

woraus wegen der linearen Unabhängigkeit der Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\lambda_i = \mu_i , \qquad i = 1, 2, \ldots, n ,$$

folgt. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Beispiele streng normierter Räume sind $L_p[0, 1]$ und l_p für $p < 1$. Der Raum $C[0, 1]$ ist nicht streng normiert. Um sich davon zu überzeugen, genügt es, zwei nichtnegative linear unabhängige Funktionen $x(t)$ und $y(t) \in C[0, 1]$ zu betrachten, die ihre maximalen Werte in ein und demselben Punkt des Intervalles $[0, 1]$ annehmen. Für solche Funktionen ist offensichtlich

$$||x + y|| = ||x|| + ||y|| ,$$

obwohl $y \neq \alpha x$ ist. Der Leser kann sich leicht davon überzeugen, daß $L[0, 1]$ und l ebenfalls nicht streng normierte Räume sind.

Schwache Kompaktheit. Der folgende Satz ist wichtig für Anwendungen der Funktionalanalysis.

Satz 5. *Ist der Raum E separabel, so ist jede Kugel in dem konjugierten Raum E^* schwach kompakt, d. h., aus einer beliebigen Folge linearer Funktionale $\{f_n\}$ mit beschränkten Normen kann man eine Teilfolge auswählen, die gegen ein Funktional f_0 schwach konvergiert.*

Beweis. Bei der Betrachtung von Operatorenräumen wurde gezeigt, daß E^* im Sinne der punktweisen Konvergenz von Operatoren vollständig ist. Da für lineare Funktionale die punktweise und die schwache Konvergenz zusammenfallen, ist E^* im Sinne der schwachen Konvergenz vollständig. Es ist daher hinreichend zu zeigen, daß aus jeder Folge $\{f_n\}$ von linearen Funktionalen mit beschränkten Normen eine schwach konvergierende CAUCHY-Folge ausgewählt werden kann. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir $||f_n|| \leqq 1$ an. $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ sei eine in E abzählbare überall dichte Menge. Da

$$|f_n(x_1)| \leqq ||f_n|| \, ||x_1|| \leqq ||x_1||$$

ist, so ist $\{f_n(x_1)\}$ eine beschränkte Zahlenfolge. Man kann aus ihr eine konvergente Teilfolge

$$f_{n_1^{(1)}}(x_1), f_{n_2^{(1)}}(x_1), \ldots, f_{n_k^{(1)}}(x_1), \ldots$$

auswählen. Wir untersuchten nun die Folge $\left\{f_{n_k^{(1)}}\right\}$.

Da

$$\left|f_{n_k^{(1)}}(x_2)\right| \leqq \|x_2\|$$

ist, ist auch $\left\{f_{n_k^{(1)}}(x_2)\right\}$ eine beschränkte Zahlenfolge. Aus dieser läßt sich wiederum eine konvergente Teilfolge

$$f_{n_1^{(2)}}(x_2),\ f_{n_2^{(2)}}(x_2),\ \ldots,\ f_{n_k^{(2)}}(x_2),\ \ldots$$

auswählen. Indem man dieses Verfahren fortsetzt, konstruiert man Folgen $\left\{f_{n_k^{(3)}}(x_3)\right\}$, $\left\{f_{n_k^{(4)}}(x_4)\right\}, \ldots$. Es ist dabei wesentlich, daß jede folgende Teilfolge aus der vorhergehenden ausgewählt ist, und die Teilfolge $\left\{f_{n_k^{(m)}}\right\}$ konvergiert für alle x_i, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Wir konstruieren nun die „Diagonalfolge"

$$f_{n_1^{(1)}},\ f_{n_2^{(2)}},\ \ldots,\ f_{n_k^{(k)}},\ \ldots.$$

Es ist leicht zu sehen, daß diese Teilfolge für jedes x_m aus der betrachteten abzählbaren überall dichten Menge konvergiert. In der Tat ist es hinreichend zu bemerken, daß $f_{n_m^{(m)}}, f_{n_{m+1}^{(m+1)}}, \ldots$ eine Teilfolge von $\left\{f_{n_k^{(m)}}\right\}$ ist, die nach Konstruktion für x_m konvergiert. Daher konvergiert auch die ganze Folge $\left\{f_{n_k^{(k)}}\right\}$ für alle x_m.

Da die Normen der Funktionale der Folge $\left\{f_{n_k^{(k)}}\right\}$ gleichmäßig beschränkt sind und diese Folge auf der in E überall dichten Menge $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ konvergiert, ergibt sich nach Satz 2, § 4 von Kapitel IV, die schwache Konvergenz der Folge $\left\{f_{n_k^{(k)}}\right\}$.

Der Satz ist bewiesen.

Folgerung. *In den Räumen l_p und $L_p\,[0, 1]$ ist jede Kugel schwach kompakt.* Das folgt aus $l_p = l_q^*$, $L_p\,[0, 1] = L_q^*\,[0, 1]$ und der Separabilität von l_p und $L_p\,[0, 1]$.

Bemerkung. Man beweist leicht, daß *in E^* jede Kugel schwach abgeschlossen und folglich jede schwach kompakte Kugel schwach kompakt in sich ist.*

§ 3. Universalität des Raumes $C\,[0, 1]$

Der sowjetische Mathematiker P. S. Uryson bewies im Jahre 1923, daß es „*universelle*" Räume gibt. Ein separabler metrischer Raum E heißt *universell*, wenn sich zu jedem separablen metrischen Raum ein dazu isometrischer Teilraum von E angeben läßt. Später bewiesen die polnischen Mathematiker S. Banach und S. Mazur, daß $C\,[0, 1]$ universell ist.

Der Beweis des Satzes von Banach und Mazur beruht auf der schwachen Kompaktheit der konjugierten Räume.

Satz 1. *Jeder separable* Banach-*Raum E ist einem Teil des Raumes $C\,[0, 1]$ isometrisch und isomorph.*

Beweis. Wir bezeichnen die Kugel $||f|| \leqq 1$ in E^* mit S und benutzen in S die schwache Konvergenz. Dann ist S nach Satz 5, § 2, eine in sich kompakte Menge. Die Folge $\{a_n\}$ sei auf der Einheitskugel $||x|| \leqq 1$ des Raumes E eine abzählbare überall dichte Menge. Für ein beliebiges Funktional $f \in S$ setzen wir $f(a_k) = \xi_k$, $|\xi_k| \leqq 1$, $k = 1, 2, \ldots$. Wenn $f_n \rightharpoonup f_0 (f_n, f_0 \in S)$ konvergiert, so strebt $\xi_k^{(n)} = f_n(a_k) \to f_0(a_k) = \xi_k^{(0)}$. Jedem $f \in S$ entspricht also ein Element $y = \{\xi_k\}$ $(\xi_k = f(a_k))$ des Raumes S, und die Konvergenz $f_n \rightharpoonup f_0$ zieht die von $y_n \to y_0$ für die entsprechenden Elemente des Raumes S nach sich. Ist N die den Funktionalen $f \in S$ entsprechende Punktmenge von S, so ist N das stetige Abbild einer in sich kompakten Menge und folglich ebenfalls in sich kompakt. Ohne Mühe folgt, daß die inverse Abbildung von N auf S ebenfalls eindeutig und stetig ist. Es sei $f(a_k) = \varphi(a_k)$, $k = 1, 2, \ldots$. Für beliebiges $x \in E$, $||x|| \leqq 1$, wählen wir ein a_{k_0} so, daß $||x - a_{k_0}|| < \varepsilon$ ist. Dann wird

$$|f(x) - \varphi(x)| \leqq |f(x - a_{k_0})| + |f(a_{k_0}) - \varphi(a_{k_0})| + |\varphi(x - a_{k_0})| < 2\varepsilon ,$$

und daraus folgt wegen der Willkür von ε: $f(x) = \varphi(x)$, d. h. $f = \varphi$.

Wenn weiter $f_n(a_k)$ gegen $f_0(a_k)$ konvergiert, so zieht das infolge der Beschränktheit der Normen der Funktionale $(||f_n||, ||f_0|| \leqq 1)$ die schwache Konvergenz $f_n \rightharpoonup f_0$ nach sich, und die beiderseitige Eindeutigkeit und Stetigkeit der Zuordnung $S \leftrightarrow N$ ist bewiesen.

Nach Satz 6, § 1, ist N als in sich kompakte Menge eines metrischen Raumes ein stetiges Bild des Cantorschen Diskontinuums P_0. Damit entspricht jedem $t \in P_0$ ein Funktional $f_t \in S$, die Gesamtheit aller f_t fällt mit S zusammen, und f_{t_n} konvergiert schwach gegen f_t für $t_n \to t$.

Wir wählen ein $x \in E$. Nach Definition der schwachen Konvergenz für Funktionale geht

$$f_{t_n}(x) \to f_t(x) \qquad \text{für} \qquad t_n \to t .$$

Bei festem x ist somit $f_t(x)$ eine stetige Funktion von $t \in P_0$. Wir wollen sie mit $\varphi_x(t)$ bezeichnen:

$$f_t(x) = \varphi_x(t) . \tag{1}$$

Auf den an P_0 angrenzenden Intervallen setzt man die auf P_0 definierte Funktion $\varphi_x(t)$ linear und stetig fort. Dadurch ist $\varphi_x(t)$ auf dem abgeschlossenen Intervall $[0, 1]$ stetig, d. h., es gehört zu $C[0, 1]$. Nach Definition der Norm in $C[0, 1]$ gilt

$$||\varphi_x||_C = \max_{t \in [0,1]} |\varphi_x(t)| .$$

Aber wegen der Linearität von $\varphi_x(t)$ auf den an P_0 angrenzenden Intervallen fällt das Maximum von $\varphi_x(t)$ auf $[0, 1]$ mit dem Maximum von $\varphi_x(t)$ auf P_0 zusammen. Daher ist

$$||\varphi_x||_C = \max_{t \in P_0} |\varphi_x(t)| .$$

Wir haben aber andererseits für $t \in P_0$ nach (1)

$$|\varphi_x(t)| = |f_t(x)| \leqq ||f_t|| \, ||x|| \leqq ||x||_E$$

und folglich

$$\max_{t \in P_0} |\varphi_x(t)| \leqq ||x||_E . \tag{2}$$

Ferner kann man für ein gegebenes x ein f_0 mit der Norm 1 konstruieren, für welches gilt

$$|f_0(x)| = ||x||_E .$$

Da $f_0 \in S$ ist, existiert ein $t_0 \in P_0$ mit

$$f_{t_0} = f_0 .$$

Folglich ist

$$|f_{t_0}(x)| = ||x||_E ,$$

d. h.

$$|\varphi_x(t_0)| = ||x||_E$$

und daher

$$\max_{t \in P_0} |\varphi_x(t|) \geqq ||x||_E . \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt

$$||\varphi_x||_C = \max_{t \in P_0} |\varphi_x(t)| = ||x||_E . \tag{4}$$

$x_1 \in E$ sei $\varphi_{x_1}(t)$ und $x_2 \in E$ sei $\varphi_{x_2}(t)$ zugeordnet. Dann ist aus der Konstruktion der Funktionen ersichtlich, daß $x_1 + x_2$ bzw. λx den Funktionen $\varphi_{x_1}(t) + \varphi_{x_2}(t)$ bzw. $\lambda \varphi_x(t)$ entsprechen. Wir haben folglich eine isomorphe Abbildung von E auf einen Teil von $C[0, 1]$. Da aber wegen des Isomorphismus dem Element $x_1 - x_2$ die Funktion $\varphi_{x_1}(t) - \varphi_{x_2}(t)$ zugeordnet ist, erhalten wir nach (4) die Beziehung

$$||x_1 - x_2||_E = ||\varphi_{x_1} - \varphi_{x_2}||_C ,$$

d. h., die Zuordnung von E auf einen Teil von $C[0, 1]$ ist nicht nur isomorph sondern auch isometrisch. Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Satz 2 (Fréchet). *Jeder metrische separable Raum X ist einem Teil eines separablen* Banach-*Raumes isometrisch.*

Beweis. $M = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ sei eine abzählbare überall dichte Menge in X. Wir lassen jedem $x \in X$ den Punkt $y = \{\eta_i\}$ des Raumes m mit

$$\eta_i = \varrho(x, x_i) - \varrho(x_0, x_i) , \qquad i = 1, 2, 3, \ldots ,$$

entsprechen. Nach der Dreiecksungleichung ist

$$|\eta_i| = |\varrho(x, x_i) - \varrho(x_0, x_i)| \leqq \varrho(x, x_0) ,$$

und folglich bilden die $\{\eta_i\}$ eine beschränkte Folge, d. h., y ist ein Punkt des Raumes m. Den Elementen $x \in X$ und $x' \in X$ mögen in unserer Abbildung die Elemente $y = \{\eta_i\}$ und $y' = \{\eta_i'\}$ aus m entsprechen. Es ist

$$\begin{aligned} ||y - y'|| = \sup_i |\eta_i - \eta_i'| &= \sup_i |[\varrho(x, x_i) - \varrho(x_0, x_i)] - [\varrho(x', x_i) - \varrho(x_0, x_i)]| \\ &= \sup_i |\varrho(x, x_i) - \varrho(x', x_i)| \leqq \varrho(x, x') . \end{aligned} \tag{5}$$

ε sei jetzt eine beliebige positive Zahl, die kleiner als $\varrho(x, x')$ ist. Es existiert ein x_n unserer abzählbaren überall dichten Menge M derart, daß $\varrho(x, x_n) \leqq \varepsilon/2$

ist. Folglich ist

$$\varrho(x', x_n) \geqq \varrho(x', x) - \varrho(x_n, x) \geqq \varrho(x', x) - \frac{\varepsilon}{2} > 0$$

und daher auch

$$|\eta_n - \eta_n'| = |\varrho(x_n, x) - \varrho(x_n, x')| \geqq \varrho(x', x_n) - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\geqq \varrho(x', x) - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = \varrho(x, x') - \varepsilon\,.$$

Hieraus ergibt sich

$$||y - y'|| \geqq \varrho(x, x') - \varepsilon\,. \tag{6}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt aus (6)

$$||y - y'|| \geqq \varrho(x, x')\,, \tag{7}$$

und man erhält aus (5) und (7)

$$||y - y'|| = \varrho(x, x')\,. \tag{8}$$

Somit ist der Abstand zweier Punkte x und x' in X gleich dem Abstand der ihnen zugeordneten Punkte y und y' in m. Damit ist aber X einem gewissen $L \subseteq m$ isometrisch. E sei der Unterraum von m, der von den Elementen der Menge L erzeugt wird, und da m separabel ist, ist E ein separabler BANACH-Raum. X ist einem Teil dieses Raumes isometrisch, womit der Satz bewiesen ist.

Satz 3 (BANACH und MAZUR). *Jeder metrische separable Raum ist einem Teil von* C [0, 1] *isometrisch.*

Der Beweis dieses Satzes folgt unmittelbar aus den Sätzen 1 und 2.

Wir wollen zum Schluß noch eine Eigenschaft der Universalität von C [0, 1] angeben. M. G. KREIN stellte im Zusammenhang mit einigen Fragen zu Momentenproblemen und zur Theorie der linearen Integralgleichungen die Kegeltheorie in BANACH-Räumen auf [20].

In einem Raum E heißt eine abgeschlossene konvexe Menge $K \subseteq E$ ein *Kegel*, wenn

1. für $x \neq 0$ aus K und $\lambda \geqq 0$ folgt $\lambda x \in K$,

2. für $\lambda < 0$ folgt $\lambda x \notin K$ und

3. für $x, y \in K$ auch $x + y \in K$ ist. Diese Menge K wird *Normalkegel* genannt, wenn für je zwei Elemente $x, y \in K$ mit $||x|| = ||y|| = 1$ gilt $||x + y|| > \delta$, wo δ eine feste positive Zahl ist. So bildet z. B. die Gesamtheit der nichtnegativen Funktionen aus C [0, 1] einen Normalkegel. Es gilt der folgende

Satz (M. G. KREIN [19]). *K sei ein Normalkegel eines separablen Raumes E. Es existiert eine umkehrbar eindeutige lineare Abbildung von E in einen Unterraum von* C [0, 1], *bei der die Elemente aus K und nur sie in nichtnegative Funktionen übergehen.*

Wenn E nicht separabel ist, so gilt ein analoger Satz. Man ersetzt C [0, 1] durch den Raum C der auf einem gewissen Bikompaktum stetigen Funktionen.

KAPITEL VI

VOLLSTETIGE OPERATOREN

§ 1. Vollstetige Operatoren

Definition. Ein auf einem linearen normierten Raum E_x definierter Operator A, dessen Wertebereich in dem linearen normierten Raum E_y liegt, heißt *vollstetig*, wenn er jede beschränkte Menge aus E_x in eine kompakte Menge in E_y abbildet. Jeder vollstetige Operator ist offensichtlich beschränkt. Ferner bildet nach Satz 7, § 1, Kapitel V, jeder lineare beschränkte Operator A eine kompakte Menge wieder auf eine kompakte ab.

Im allgemeinen ist die Vollstetigkeit stärker als die einfache Stetigkeit. So ist der Einheitsoperator in einem unendlichdimensionalen Raum E nicht vollstetig, da er zwar die Einheitskugel in sich abbildet, aber diese ist nicht kompakt.

Beispiel. Es sei $E_x = E_y = C[0, 1]$ und

$$y(s) = \int_0^1 K(s, t)\, x(t)\, dt = A\, x\,,$$

wo $K(s, t)$ ein im Quadrat $0 \leqq s \leqq 1$, $0 \leqq t \leqq 1$ stetiger Kern ist. Wir beweisen, daß der Operator A vollstetig ist. $\{x(s)\}$ sei eine beschränkte Menge von Funktionen aus $C[0, 1]$, $\|x\| \leqq r$. Offensichtlich sind die Funktionen

$$y(s) = \int_0^1 K(s, t)\, x(t)\, dt$$

gleichmäßig beschränkt, wobei $x(t)$ aus der betrachteten Menge ist. Denn ist $K = \max_{s,\, t} |K(s, t)|$, so wird $|y(s)| \leqq K\, r$. Die Funktionen $y(s)$ sind auch gleichgradig stetig. Zu einem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ gibt es wegen der gleichmäßigen Stetigkeit des Kernes $K(s, t)$ ein δ, so daß

$$|K(s_1, t) - K(s_2\, t)| < \frac{\varepsilon}{r}$$

für $|s_1 - s_2| < \delta$ und jedes $t \in [0, 1]$ ist. Dann gilt

$$|y(s_1) - y(s_2)| \leqq \int_0^1 |K(s_1, t) - K(s_2, t)|\, |x(t)|\, dt < \varepsilon$$

für alle betrachteten Funktionen $y(s)$, wenn $|s_1 - s_2| < \delta$ ist, was zu zeigen war.

Wegen des Satzes von Arzelà ist die Menge $\{y(s)\}$ mit der Metrik des Raumes $C[0, 1]$ kompakt, und die Vollstetigkeit des Operators A ist bewiesen.

Hilfssatz. *Wenn die Folge $\{x_n\}$ schwach gegen x_0 konvergiert und kompakt ist, dann konvergiert sie stark gegen x_0.*

Ist das nicht der Fall, so gibt es eine Zahl $\varepsilon_0 > 0$ und eine unbeschränkt wachsende Folge von Indizes $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$, so daß

$$\|x_{n_k} - x_0\| \geqq \varepsilon_0$$

ist. Da die Folge $\{x_{n_i}\}$ kompakt ist, enthält sie eine stark gegen ein Element u_0 konvergierende Teilfolge $\{x_{n_{i_j}}\}$. Erst recht konvergiert schwach $\{x_{n_{i_j}}\} \rightharpoonup u_0$. Da gleichzeitig schwach $x_{n_{i_j}} \rightharpoonup x_0$ konvergiert, ist $u_0 = x_0$.

Wir erhalten einerseits

$$\|x_{n_{i_j}} - x_0\| \geqq \varepsilon_0 \,,$$

aber andererseits

$$\|x_{n_{i_j}} - x_0\| \to 0 \,.$$

Dieser Widerspruch beweist den Hilfssatz.

Satz 1. *Ein vollstetiger Operator A bildet eine schwach konvergente Folge in eine stark konvergente ab.*

Eine Folge $\{x_n\}$ konvergiere schwach gegen x_0. Dann sind die Normen der Elemente dieser Folge beschränkt, und $\{x_n\}$ wird als beschränkte Folge vom Operator A in eine kompakte Folge $\{y_n\}$, $y_n = A\,x_n$, abgebildet.

Andersereits ist nach Satz 6, § 4, Kapitel IV,

$$y_n = A\,x_n \rightharpoonup A\,x_0 = y_0 \,.$$

Der Hilfssatz besagt dann $y_n \to y_0$, und der Satz ist bewiesen.

A sei ein vollstetiger Operator, der den unendlichdimensionalen BANACH-Raum E in sich abbildet und B ein beliebiger, im selben Raum wirkender linearer Operator. Dann sind AB und BA vollstetige Operatoren.

Der Operator B bildet nämlich jede beschränkte Menge $M \subset E$ in eine beschränkte Menge $B(M)$ ab, und diese Menge wird vom Operator A in eine kompakte Menge $A(B(M))$ abgebildet. Folglich führt der Operator AB jede beschränkte Menge in eine kompakte über und ist deshalb vollstetig.

Analog wird die Vollstetigkeit von BA bewiesen.

Der Einheitsoperator I ist nicht vollstetig, deshalb folgt daraus insbesondere, daß ein vollstetiger Operator A keinen beschränkten inversen Operator A^{-1} besitzen kann.

Schließlich sieht man ohne weiteres die Vollstetigkeit von $\alpha\,A + \beta\,B$, falls A und B vollstetig sind.

Satz 2. *Wenn eine Folge vollstetiger Operatoren $\{A_n\}$, die einen Raum E_x in einen vollständigen Raum E_y abbilden, gleichmäßig gegen einen Operator A konvergiert, d. h. $\|A_n - A\| \to 0$, so ist auch A ein vollstetiger Operator.*

Es muß gezeigt werden, daß A jede beschränkte Menge des Raumes E_x in eine kompakte Menge des Raumes E_y abbildet.

Es sei M eine beschränkte Menge des Raumes E_x und r eine solche Konstante, daß $\|x\| \leqq r$ für jedes $x \in M$ ist. Zu einem gegebenen $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_0 mit

$$\|A_{n_0} - A\| < \frac{\varepsilon}{r} \,.$$

Es sei $A(M) = K$ und $A_{n_0}(M) = N$. Die Menge N ist ein ε-Netz für K. Nimmt man nämlich für ein beliebiges $y \in K$ eines der Urbilder $x \in M$ und setzt $y_0 = A_{n_0}, x \in N$, so erhält man

$$||y - y_0|| = ||A\,x - A_{n_0}\,x|| \leqq ||A - A_{n_0}||\,||x|| < \frac{\varepsilon}{r} \cdot r = \varepsilon\,.$$

Da andererseits wegen der Vollstetigkeit von A_{n_0} und der Beschränktheit von M die Menge N kompakt ist, besitzt K zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein kompaktes ε-Netz und ist deshalb selbst kompakt. Somit überführt der Operator A jede beschränkte Menge in eine kompakte und ist damit vollstetig, der Satz demzufolge bewiesen.

Beispiel. Wenn $E_x = E_y = L_2\,[0, 1]$ ist, so ist der Operator

$$A\,x = y(s) = \int_0^1 K(s, t)\,x(t)\,dt \qquad \text{mit} \qquad \int_0^1\int_0^1 K^2(s, t)\,ds\,dt < \infty$$

vollstetig.

Wir setzen zuerst voraus, daß $K(s, t)$ ein stetiger Kern ist. M sei eine beschränkte Menge aus $L_2\,[0, 1]$ und, für alle $x(t) \in M$ sei

$$\int_0^1 x^2(t)\,dt \leqq r^2\,.$$

Nun betrachten wir die Menge der Funktionen

$$y(s) = \int_0^1 K(s, t)\,x(t)\,dt\,, \qquad x(t) \in M\,,$$

und beweisen, daß die $y(s)$ gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig sind. Hieraus folgt dann die Kompaktheit der Menge $\{y(s)\}$ im Sinne der gleichmäßigen Konvergenz und erst recht im Sinne der Konvergenz im Mittel.

Wir haben

$$|y(s)| = \left|\int_0^1 K(s, t)\,x(t)\,dt\right| \leqq \left(\int_0^1 |K(s, t)|^2\,dt\right)^{1/2} \left(\int_0^1 x^2(t)\,dt\right)^{1/2} \leqq K\,r\,,$$

wo $K = \max\limits_{s,\,t} |K(s, t)|$ gesetzt ist. Folglich sind die Funktionen $y(s)$ gleichmäßig beschränkt. Ferner ist

$$|y(s_1) - y(s_2)| \leqq \left(\int_0^1 [K(s_1, t) - K(s_2, t)]^2\,dt)\right)^{1/2} \left(\int_0^1 x^2(t)\,dt\right) < \varepsilon$$

für $|s_1 - s_2| < \delta$, wo δ so gewählt ist, daß

$$|K(s_1, t) - K(s_2, t)| < \frac{\varepsilon}{r}$$

für $|s_1 - s_2| < \delta$ ist. Die Abschätzung $|y(s_1) - y(s_2)| < \varepsilon$ hängt weder von der Lage von s_1, s_2 auf $[0, 1]$ noch von der Wahl von $y(s)$ ab. Folglich sind die $y(s)$ gleichgradig stetig.

Im Falle eines stetigen Kernes ist somit der Operator A vollstetig. Es sei jetzt $K(s, t)$ ein beliebiger quadratisch integrierbarer Kern. Wir wählen eine Folge stetiger Kerne $\{K_n(s, t)\}$, die im Mittel gegen $K(s, t)$ konvergiert, d. h. eine Folge, so daß

$$\int_0^1\int_0^1 [K(s, t) - K_n(s, t)]^2\,ds\,dt \to 0 \qquad \text{für} \qquad n \to \infty\,.$$

Man setzt

$$\int_0^1 K_n(s, t)\,x(t)\,dt = A_n\,x\,.$$

Es ist nun

$$||A\,x - A_n\,x|| = \left(\int\limits_0^1 \left[\int\limits_0^1 K(s,t)\,x(t)\,dt - \int\limits_0^1 K_n(s,t)\,x(t)\,dt\right]^2 ds\right)^{1/2}$$

$$= \left(\int\limits_0^1 \left[\int\limits_0^1 (K(s,t) - K_n(s,t))\,x(t)\,dt\right]^2 ds\right)^{1/2}$$

$$\leqq \left(\int\limits_0^1 \left[\int\limits_0^1 (K(s,t) - K_n(s,t))^2\,dt \int\limits_0^1 x^2(t)\,dt\right] ds\right)^{1/2}$$

$$= \left(\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 (K(s,t) - K_n(s,t))^2\,ds\,dt\right)^{1/2} ||x||.$$

Folglich gilt

$$||A - A_n|| \leqq \left(\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 (K(s,t) - K_n(s,t))^2\,ds\,dt\right)^{1/2},$$

woraus sich ergibt, daß $||A - A_n|| \to 0$ für $n \to \infty$. Da alle A_n vollstetig sind, ist nach Satz 2 auch A vollstetig.

Bemerkung. *Der Grenzwert einer punktweise konvergenten Folge* $\{A_n\}$ *vollstetiger Operatoren braucht nicht vollstetig zu sein.* In einem unendlichdimensionalen BANACH-Raum E mit der Basis $\{e_i\}$ betrachten wir die durch die Gleichung

$$S_n\,x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\,e_i$$

für

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i\,e_i$$

gegebenen Operatoren S_n. Der Operator S_n überführt E in den endlichdimensionalen Raum E_n und ist damit vollstetig. Bei $n \to \infty$ konvergiert die Folge der Operatoren S_n punktweise gegen den Einheitsoperator I, der nicht vollstetig ist.

Satz 3. *Der Wertebereich eines vollstetigen Operators ist separabel.*

Beweis. Es sei K_n das Bild der Kugel $||x|| \leqq n$. Da A vollstetig ist, ist K_n kompakt und folglich auch eine separable Menge (siehe S. 158). T_n sei eine in K_n liegende abzählbare überall dichte Menge. Da $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ der Wertebereich von A ist, so wird $\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$ eine in K abzählbare überall dichte Menge, was zu beweisen war.

Satz 4. *Wenn A ein vollstetiger Operator ist, der E_x in E_y abbildet, so ist der adjungierte Operator A^* aus $(E_y^* \to E_x^*)$ ebenfalls vollstetig.*

Es genügt zu zeigen, daß das Bild $A^*(S_y^*)$ der Einheitskugel S_y^* des Raumes E_y^* kompakt ist.

Wir untersuchen das Bild $A(\overline{S_x})$ der abgeschlossenen Einheitskugel des Raumes E_x. Da A vollstetig ist, ist $A(\overline{S_x})$ eine kompakte Menge. Auf dieser

Menge betrachten wir die zu S_y^* gehörigen linearen Funktionale genauer. Wenn $f \in S_y^*$, $y \in A(\overline{S_x})$ ist, so gilt

$$|f(y)| \leqq ||f|| \, ||y|| = ||f|| \, ||A x|| \leqq ||f|| \, ||A|| \, ||x|| \leqq ||A||$$

wegen $||f|| \leqq 1$, $||x|| \leqq 1$. Daher sind die Funktionale aus S_y^* auf $A(\overline{S_x})$ gleichmäßig beschränkt. Ferner ist für $y_1, y_2 \in A(\overline{S_x})$, $f \in S_y^*$

$$|f(y_1) - f(y_2)| = |f(y_1 - y_2)| \leqq ||f|| \, ||y_1 - y_2|| \leqq ||y_1 - y_2|| ,$$

und folglich sind auf $A(\overline{S_x})$ die Funktionale aus S_y^* gleichgradig stetig. Die Verallgemeinerung des Satzes von ARZELÀ (Kapitel V, S. 166) bestätigt die Kompaktheit der Menge S_y^* im Sinne der gleichmäßigen Konvergenz auf $A(\overline{S_x})$.

Wir untersuchen nun eine beliebige Folge $\{A^* f_n\} \subset A^*(S_y^*)$. Da die Menge S_y^* kompakt ist, kann man aus der Folge $\{f_n\}$ eine gleichmäßig auf $A(\overline{S_x})$ konvergente Teilfolge $\{f_{n_i}\}$ herausgreifen:

$$\sup_{x \in S_x} |f_{n_i}(A x) - f_{n_j}(A x)| \to 0$$

für $n_i, n_j \to \infty$.

Es ist jedoch

$$\sup_{x \in \overline{S}_x} |f_{n_i}(A x) - f_{n_j}(A x)| = \sup_{x \in \overline{S}_x} |A^*(f_{n_i} - f_{n_j}) x| = ||A^* f_{n_i} - A^* f_{n_j}|| .$$

Daher konvergiert die Folge $\{A^* f_{n_i}\}$ im Raum E_x^* stark, und die Kompaktheit von $A^*(S_y^*)$ ist gezeigt.

Die Approximation eines vollstetigen Operators im BANACH-Raum mit Basis durch endlichdimensionale Operatoren. Wir untersuchen einen vollstetigen Operator A, der einen BANACH-Raum E mit Basis in sich abbildet. S sei die Einheitskugel dieses Raumes und K die Gesamtheit der Elemente der Form $y = A x$ mit $x \in S$. Wegen der Vollstetigkeit von A ist K eine kompakte Menge. Dann gibt es nach Satz 3, § 2, Kapitel V, zu einem beliebigen $\varepsilon > 0$ ein $n = n(\varepsilon)$ mit $||R_n y|| < \varepsilon$ für alle $y \in K$.

Für dieses feste n erhalten wir

$$A x = y = S_n y + R_n y = S_n(A x) + R_n(A x) = A_1 x + A_2 x .$$

A_1 und A_2 sind lineare Operatoren. Setzen wir

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i e_i ,$$

so wird

$$A_1 x = S_n y = \sum_{i=1}^{n} \eta_i e_i ,$$

woraus hervorgeht, daß der Operator A_1 endlichdimensional in dem Sinne ist, daß für jedes x das Element $A_1 x$ dem durch die Elemente $e_1, e_2, \ldots, e_n$ bestimmten endlichdimensionalen Unterraum angehört. Ferner ist

$$\sup_{x \in S} ||A_2 x|| = \sup_{y \in K} ||R_n y|| < \varepsilon$$

mit der Folgerung

$$\|A_2\| < \varepsilon .$$

Der vollstetige Operator A ist also die Summe zweier Operatoren, von denen einer endlichdimensional, die Norm des anderen jedoch nicht größer als eine beliebig klein vorgebbare Zahl ist. Bisweilen sagt man deshalb auch, die vollstetigen Operatoren in einem Raum mit Basis seien fast endlichdimensional.

§ 2. Lineare Operatorgleichungen mit vollstetigen Operatoren

In diesem Paragraphen betrachten wir lineare Operatorgleichungen mit vollstetigen Operatoren. Wie F. Riesz gezeigt hat, lassen sich die grundlegenden Ergebnisse der Theorie der Fredholmschen Integralgleichungen auf solche Gleichungen übertragen.

Zwei Hilfssätze. A sei ein den Banach-Raum E in sich überführender vollstetiger Operator. Wir untersuchen die Gleichung

$$A x - x = y \tag{1}$$

oder

$$T x = y \tag{1'}$$

mit $T = A - I$. Zusammen mit Gleichung (1) betrachten wir die Gleichung

$$A^* f - f = g \tag{2}$$

oder

$$T^* f = g , \tag{2'}$$

wobei A^* der zu A adjungierte und im Raum E^* wirkende Operator ist. Wie gezeigt, ist auch A^* ein vollstetiger Operator.

Hilfssatz 1. *N sei das Radikal des Operators T, d. h. der Raum der Elemente x mit $T x = 0$. Dann ist N ein endlichdimensionaler Unterraum des Raumes E.*

M sei eine beschränkte Menge aus N. Für beliebiges $x \in N$ hat man $A x = x$, d. h., der Operator A läßt die Elemente des Teilraumes N invariant, und insbesondere geht die Menge M in sich über. Andererseits führt A als vollstetiger Operator M in eine kompakte Menge über. Folglich ist jede beschränkte Menge $M \subset N$ kompakt. Nach Satz 4, § 2, Kapitel V, folgt daraus, daß der Unterraum N endlichdimensional ist.

Bemerkung. Die Elemente des Unterraumes N sind Eigenelemente des Operators A, sie entsprechen dem Eigenwert $\lambda_0 = 1$. Die Formulierung und der Beweis des Satzes bleiben gültig, wenn 1 durch einen beliebigen anderen Eigenwert $\lambda \neq 0$ ersetzt wird. Damit haben wir bewiesen, *daß ein vollstetiger Operator A nur endlich viele linear unabhängige Eigenvektoren besitzen kann, die ein und demselben Eigenwert entsprechen.*

Hilfssatz 2. *Es sei $L = T(E)$, d. h., L sei die Gesamtheit der Elemente $y \in E$, die in der Form $y = A\,x - x$ dargestellt werden können. Dann ist L ein Unterraum.*

Offensichtlich ist L eine lineare Mannigfaltigkeit. Man braucht nur die Abgeschlossenheit von L zu zeigen.

Wir zeigen zuerst, daß eine nur von A abhängige Konstante α existiert, so daß, wenn die Gleichung

$$T\,x = y \tag{1'}$$

lösbar ist, mindestens eine ihrer Lösungen die Ungleichung

$$||x|| \leqq \alpha\,||y|| \tag{3}$$

erfüllt.

x_0 sei eine der Lösungen von Gleichung (1′). Dann hat jede andere Lösung dieser Gleichung die Form

$$x = x_0 + z\,,$$

hierbei ist z Lösung der homogenen Gleichung

$$T(x) = 0\,. \tag{1*}$$

Wir untersuchen das Funktional

$$\varphi(z) = ||x_0 + z||\,.$$

Das ist ein nach unten beschränktes stetiges Funktional. Es sei

$$d = \inf \varphi(z)$$

und $\{z_n\} \subset N$ eine Minimalfolge, d. h.

$$\varphi(z_n) = ||x_0 + z_n|| \to d\,. \tag{4}$$

Die Folge $\{||x_0 + z_n||\}$ ist als konvergente Folge beschränkt. Dann ist aber auch die Folge $\{||z_n||\}$ beschränkt wegen

$$||z_n|| = ||(z_n + x_0) - x_0|| \leqq ||z_n + x_0|| + ||x_0||\,.$$

Also ist $\{z_n\}$ eine beschränkte Folge eines endlichdimensionalen Raumes, und man kann aus ihr eine konvergente Teilfolge auswählen. Lassen wir, falls nötig, überflüssige Glieder der Folge $\{z_n\}$ weg, so können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit schreiben: $z_n \to z_0$. Dann gilt

$$\varphi(z_n) \to \varphi(z_0)\,. \tag{5}$$

Aus (4) und (5) folgt

$$\varphi(z_0) = ||x_0 + z_0|| = d\,.$$

Folglich gibt es im Falle der Lösbarkeit der Gleichung (1′) immer eine Lösung

$$\tilde{x} = x_0 + z_0$$

mit minimaler Norm.

Für dieses Element gilt, wie wir zeigen werden, die Ungleichung (3). Das Verhältnis

$$\frac{||\tilde{x}||}{||y||}$$

möge nicht beschränkt sein. Dann existieren Folgen y_n und $\tilde{x}_n$ mit

$$\frac{\|\tilde{x}_n\|}{\|y_n\|} \to \infty .$$

Da zu λy_n offenbar die minimale Lösung $\lambda \tilde{x}_n$ gehört, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\|\tilde{x}_n\| = 1$ schreiben, d. h. $\|y_n\| \to 0$. Wegen der Beschränktheit der Folge $\{\tilde{x}_n\}$ und der Vollstetigkeit des Operators A ist die Folge $\{A \tilde{x}_n\}$ kompakt und enthält folglich eine konvergente Teilfolge. Wiederum ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man

$$A \tilde{x}_n \to \tilde{x}_0 \tag{6}$$

schreiben. Wegen

$$\tilde{x}_n = A \tilde{x}_n - y_n$$

wird nun

$$\tilde{x}_n \to \tilde{x}_0$$

und folglich

$$A \tilde{x}_n \to A \tilde{x}_0 . \tag{7}$$

Aus (6) und (7) folgt

$$A \tilde{x}_0 = \tilde{x}_0 ,$$

d. h. $\tilde{x}_0 \in N$. Da nun die Norm der Lösung $\tilde{x}_n$ minimal war, ist im Widerspruch zur Konvergenz von $\{\tilde{x}_n\}$ gegen $\tilde{x}_0$

$$\|\tilde{x}_n - \tilde{x}_0\| \geqq \|\tilde{x}_n\| = 1 .$$

Somit ist $\frac{\|\tilde{x}\|}{\|y\|}$ beschränkt, und bei $\alpha = \sup \frac{\|\tilde{x}\|}{\|y\|}$ ist die behauptete Ungleichung bewiesen.

Es sei nun eine gegen y_0 konvergente Folge $\{y_n\} \subset L$ gegeben. Nötigenfalls durch Übergang zu einer Teilfolge kann man

$$\|y_n - y_0\| < \frac{1}{2^{n+1}}$$

bewirken, woraus sich

$$\|y_{n+1} - y_n\| < \frac{1}{2^n}$$

ergibt. x_0 sei eine minimale Lösung der Gleichung $T x = y_1$ und x_n, $n = 1, 2, \ldots$, eine minimale Lösung der Gleichung

$$T x = y_{n+1} - y_n .$$

Dann gilt

$$\|x_n\| \leqq \alpha \|y_{n+1} - y_n\| < \frac{\alpha}{2^n} .$$

Aus dieser Abschätzung ist die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ zu entnehmen. Ist $\tilde{x}$ die Summe dieser Reihe, so wird

$$T \tilde{x} = T\left(\lim_n \sum_{k=0}^{n} x_k\right) = \lim_n \sum_{k=0}^{n} T x_k$$

$$= \lim_n \left[y_1 + \sum_{k=1}^{n} (y_{k+1} - y_k)\right] = \lim_n y_{n+1} = y_0 ,$$

und wir erhalten $y_0 \in L$.

Der Hilfssatz ist damit vollständig bewiesen.

Satz 1. *Die Gleichung* (1′) *ist bei gegebenem* $y \in E$ *genau dann lösbar, wenn* $f(y) = 0$ *ist für jedes lineare Funktional* f *mit* $A^* f - f = 0$.

Notwendigkeit. Die Gleichung

$$A x - x = y$$

sei lösbar, d. h., y habe die Form

$$y = A x_0 - x_0$$

mit $x_0 \in E$. Wir nehmen ein lineares Funktional f mit $A^* f - f = 0$. Dann ist

$$f(y) = f(A x_0 - x_0) = f(A x_0) - f(x_0) = A^* f(x_0) - f(x_0) = (A^* f - f) x_0 = 0 .$$

Damit ist die Notwendigkeit bewiesen.

Hinlänglichkeit. Wir zeigen, daß unter den Voraussetzungen des Satzes $y \in L = T(E)$ ist. Das Gegenteil sei vorausgesetzt, d. h. $y \notin L$. Wegen der Abgeschlossenheit von L hat y von L einen Abstand $d > 0$, und als Folge des Satzes von Banach-Hahn existiert ein lineares Funktional f_0 mit $f_0(y) = 1$ und $f_0(z) = 0$ bei beliebigem $z \in L$. Die letzte Gleichung bedeutet

$$f_0(A x - x) = (A^* f_0 - f_0) x = 0$$

für alle $x \in E$, d. h.

$$A^* f_0 - f_0 = 0 .$$

Wir gelangen zu einem Widerspruch, da einerseits nach Konstruktion $f_0(y) = 1$, jedoch andererseits nach Voraussetzung $f_0(y) = 0$ ist. Folglich muß $y \in L$ sein, und damit ist die Hinlänglichkeit bewiesen.

Bemerkung. Hat die Gleichung $T x = y$ die Eigenschaft, lösbar zu sein, wenn $f(y) = 0$ ist für jedes f mit $T^* f = 0$, so heißt sie *normal lösbar*. Mit dem vorigen Satz wurde im Grunde genommen bewiesen, daß *für die normale Lösbarkeit der Gleichung* $T x = y$ *die Abgeschlossenheit von* $L = T(E)$ *hinreichend ist.* Diese Bedingung ist auch notwendig (s. [10]).

Folgerung. *Wenn die konjugierte homogene Gleichung*

$$A^* f - f = 0$$

nur die Nullösung $f = 0$ *besitzt, so ist die Gleichung*

$$A x - x = y$$

bei beliebiger rechter Seite lösbar.

Satz 2. *Gleichung* (2) *ist bei gegebenem* $g \in E^*$ *genau dann lösbar, wenn für ein beliebiges Element* $x \in E$ *mit*

$$A x - x = 0 \tag{1**}$$

$g(x) = 0$ *ist.*

Die Notwendigkeit folgt in offensichtlicher Weise aus der Gleichung

$$g(x) = (A^* f - f) x = f(A x - x) = 0 .$$

Wir zeigen die Hinlänglichkeit.

Auf dem Unterraum L definieren wir das Funktional $f_0(y)$ vermittels der Gleichung

$$f_0(y) = g(x) .$$

x ist eines der Urbilder des Elementes y bei der Abbildung T (d. h. $A\,x - x = y$). Unter den Voraussetzungen des Satzes ist die Definition des Funktionals eindeutig; denn ist u ein anderes Urbild desselben Elementes y, so gilt

$$A\,x - x = A\,u - u ,$$
$$A\,(x - u) - (x - u) = 0 ,$$
$$g\,(x - u) = 0 ,$$
$$g(x) = g(u) .$$

Die Additivität und Homogenität des Funktionals f läßt sich ohne Schwierigkeit nachweisen, seine Beschränktheit wird im folgenden bewiesen. Wie beim Beweis von Hilfssatz 2 hergeleitet wurde, gilt für mindestens eines der Urbilder x des Elementes y die Ungleichung

$$||x|| \leqq \alpha\, ||y|| .$$

Dann ist

$$|f_0(y)| = |g(x)| \leqq ||g||\, ||x|| \leqq ||g||\, \alpha\, ||y|| ,$$

und f_0 ist beschränkt. f_0 wird nach dem Satz von Banach-Hahn auf den ganzen Raum fortgesetzt. Wir erhalten ein lineares Funktional f mit

$$f\,(A\,x - x) = f(y) = f_0(y) = g(x)$$

oder

$$(A^* f - f)\, x = g(x) ,$$

d. h. eine Lösung der Gleichung (2).

Folgerung. *Wenn die Gleichung* $A\,x - x = 0$ *nur die Nullösung* $x = 0$ *besitzt, ist die Gleichung* $A^* f - f = g$ *bei beliebiger rechter Seite* g *lösbar.*

Bisher untersuchten wir den Zusammenhang zwischen den gegebenen und den konjugierten Gleichungen. Wir zeigen jetzt, daß zwischen der Lösbarkeit der homogenen und inhomogenen Gleichungen in ein und demselben Raum auch ein enger Zusammenhang besteht.

Satz 3. *Die Gleichung*

$$A\,x - x = y , \tag{1}$$

worin A *ein vollstetiger Operator ist, der den* Banach-*Raum* E *in sich abbildet, ist genau dann bei beliebigem* y *lösbar, wenn die zugehörige homogene Gleichung*

$$A\,x - x = 0 \tag{1**}$$

nur die triviale Lösung $x = 0$ *hat. In diesem Falle ist die Lösung von* (1) *eindeutig definiert, und der Operator*

$$T = A - I$$

besitzt eine beschränkte Inverse.

Notwendigkeit. Wir bezeichnen mit N_k das Radikal des Operators T^k. Aus $T^k x = 0$ folgt $T^{k+1} x = 0$, d. h. $N_k \subset N_{k+1}$.

Die Gleichung

$$A x - x = y$$

sei bei beliebigem y lösbar, und wir nehmen an, die homogene Gleichung

$$A x - x = 0$$

besitze eine von Null verschiedene Lösung x_1. x_2 sei eine Lösung der Gleichung $A x - x = x_1$ und allgemein x_{k+1} eine Lösung von

$$A x - x = x_k\,, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots .$$

Es ergibt sich

$$T x_k = x_{k-1}\,, \qquad T^2 x_k = x_{k-2}, \ldots, T^{k-1} x_k = x_1 \neq 0$$

und gleichzeitig

$$T^k x_k = T x_1 = 0\,.$$

Infolgedessen ist $x_k \in N_k$, aber $x_k \notin N_{k-1}$, d. h., jeder Unterraum N_{k-1} ist echt im folgenden N_k enthalten. Dann gibt es nach dem Hilfssatz von § 2, Kapitel II, im Unterraum N_k ein Element y_k mit der Norm Eins und

$$||y_k - x|| \geqq \frac{1}{2}$$

für beliebiges $x \in N_{k-1}$. Wir untersuchen $\{A y_k\}$. Diese Folge ist kompakt, da $||y_k|| = 1$ und A ein vollständiger Operator ist. Andererseits mögen y_p und y_q zwei solche Elemente mit $p > q$ sein. Wegen

$$T^{p-1}(y_q + T y_p - T y_q) = T^{p-1} y_q + T^p y_p - T^p y_q = 0$$

ist

$$y_q + T y_p - T y_q \in N_{p-1}$$

und deshalb

$$||A y_p - A y_q|| = ||y_p - (y_q + T y_p - T y_q)|| \geqq \frac{1}{2}\,.$$

Dieser Widerspruch rührt von der Annahme her, daß die Lösbarkeit der Gleichung (1) mit der Existenz einer nichttrivialen Lösung von (1′) verträglich ist.

Hinlänglichkeit. Die Gleichung (1*) besitze nur die triviale Lösung. Nach der Folgerung aus Satz 2 ist dann die Gleichung

$$A^* f - f = g \tag{2}$$

bei beliebiger rechter Seite lösbar. Da auch A^* vollstetig ist und E^* ein Banach-Raum, kann man auf Gleichung (2) den soeben bewiesenen notwendigen Teil dieses Satzes anwenden, und die Gleichung

$$A^* f - f = 0 \tag{2*}$$

besitzt nur die Nullösung. Dann ist aber Gleichung (1) nach der Folgerung aus Satz 1 bei beliebigem y lösbar. Damit ist die Hinlänglichkeit bewiesen.

Wegen der eindeutigen Lösbarkeit der Gleichung (1) unter den Voraussetzungen des Satzes existiert der zum Operator $A - I$ inverse Operator

$$T^{-1} = (A - I)^{-1}.$$

Wegen der Eindeutigkeit ist die einzige Lösung gleichzeitig auch die minimale und daher

$$||(A - I)^{-1} y|| \leqq \alpha \, ||y|| .$$

Der Satz ist damit vollständig bewiesen.

Satz 4. *Die Gleichungen*

$$A x - x = 0 \tag{1*}$$

und

$$A^* f - f = 0 \tag{2*}$$

mit den vollstetigen Operatoren A und A^*, die den BANACH-*Raum E (bzw. E^*) in sich abbilden, haben die gleiche Anzahl linear unabhängiger Lösungen.*

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ sei eine Basis des Lösungsraumes N von (1*) und $f_1, f_2, \ldots, f_m$ eine des Lösungsraumes von (2*).

Wir konstruieren ein System von zu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ biorthogonalen Funktionalen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, d. h., es gilt

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij} , \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n ,$$

und ein System zu $f_1, f_2, \ldots, f_m$ biorthogonaler Elemente $z_1, z_2, \ldots, z_m$. n sei kleiner als m. Wir untersuchen den Operator

$$U x = A x + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) \, z_i .$$

Er ist als Summe eines vollstetigen und eines endlichdimensionalen Operators vollstetig. Wir behaupten, die Gleichung

$$U x - x = 0$$

besitze nur die Nullösung. x_0 sei eine Lösung der Gleichung. Dann ist

$$f_k (U x_0 - x_0) = 0 , \qquad k = 1, 2, \ldots, m ,$$

oder

$$f_k\left(A x_0 - x_0 + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_0) \, z_i\right) = 0$$

und daher

$$(A^* f_k - f_k) \, x_0 + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_0) \, f_k(z_i) = 0 .$$

Folglich ist unter Berücksichtigung der Biorthogonalität von $\{f_i\}$ und $\{z_i\}$

$$\varphi_k(x_0) = 0 , \qquad k = 1, 2, \ldots, n \quad (n < m) .$$

Deshalb wird $U x_0 = A x_0$, und x_0 genügt der Gleichung

$$A x_0 - x_0 = 0 .$$

Da $x_0 \in N$ und $\{x_i\}$ eine Basis in N ist, wird

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \, x_i .$$

Nun ist $\xi_i = \varphi_i(x_0) = 0$. Daher wird $x_0 = 0$, was zu beweisen war.

Da die Gleichung

$$U\,x - x = 0$$

nur die Nullösung besitzt, ist die Gleichung

$$U\,x - x = y$$

bei beliebiger rechter Seite lösbar, insbesondere bei $y = z_{n+1}$.

Mit x' als Lösung dieser Gleichung ist einerseits wie oben

$$f_{n+1}(z_{n+1}) = f_{n+1}\left(A\,x' - x' + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x')\,z_i\right)$$
$$= (A^*f_{n+1} - f_{n+1})\,x' + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x')\,f_{n+1}(z_i) = 0\,,$$

andererseits nach Konstruktion $f_{n+1}(z_{n+1}) = 1$. Der erhaltene Widerspruch beweist die Unmöglichkeit der Ungleichung $n < m$.

Wir nehmen umgekehrt $m < n$ an und untersuchen im Raum E^* den Operator

$$U^*f = A^*f + \sum_{i=1}^{m} f(z_i)\,\varphi_i\,.$$

Dieser Operator ($m < n$ berücksichtigt) ist adjungiert zum Operator U, in dem n durch m ersetzt ist.

Auch für den Operator U^* hat die Gleichung

$$U^*f - f = 0$$

nur die triviale Lösung. Für alle $k = 1, 2, \ldots, n$ ergibt sich

$$(U^*f - f)\,x_k = (A^*f - f)\,x_k + \sum_{i=1}^{m} f(z_i)\,\varphi_i(x_k)$$
$$= f\,(A\,x_k - x_k) + f(z_k) = f(z_k)\,. \tag{8}$$

Wenn f_0 eine Lösung der Gleichung $U^*f - f = 0$ ist, ergibt (8) $f_0(z_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Folglich ist $U^*f_0 = A^*f_0$, und f_0 ist Lösung der Gleichung $A^*f - f = 0$, wonach dann

$$f_0 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\,f_i = \sum_{i=1}^{m} f_0(z_i)\,f_i = 0$$

wird. Wegen der Vollstetigkeit des Operators U^* ist die Gleichung

$$U^*f - f = g$$

nach Satz 3 bei beliebigem g, insbesondere bei $g = \varphi_{m+1}$, lösbar. Es wird einerseits mit f' als Lösung jener Gleichung

$$\varphi_{m+1}(x_{m+1}) = (U^*f' - f')\,x_{m+1} = (A^*f' - f')\,x_{m+1} + \sum_{i=1}^{m} f'(z_i)\,\varphi_i(x_{m+1})$$
$$= f'\,(A\,x_{m+1} - x_{m+1}) = 0\,,$$

andererseits ist $\varphi_{m+1}(x_{m+1}) = 1$.

Der entstandene Widerspruch beweist die Unhaltbarkeit der Ungleichung $m < n$. Folglich ist $m = n$, und damit ist der Satz bewiesen.

Die Zusammenfassung der Resultate der Sätze 1—4 erlaubt die folgende Aussage, die die bekannten FREDHOLMschen Sätze aus der Theorie der linearen Integralgleichungen auf Gleichungen mit vollstetigen Operatoren erweitert.

Gegeben sind die Gleichungen

$$A x - x = y \tag{1}$$

und

$$A^* f - f = g \,. \tag{2}$$

A ist hierbei ein auf dem BANACH-Raum E wirkender vollstetiger linearer Operator, A^* der auf dem konjugierten Raum E^* wirkende adjungierte Operator. Dann haben entweder die Gleichungen (1) und (2) bei beliebigen rechten Seiten Lösungen, und die homogenen Gleichungen

$$A x - x = 0 \,, \tag{1*}$$

$$A^* f - f = 0 \tag{2*}$$

besitzen nur die Nullösungen, oder die homogenen Gleichungen haben die gleiche endliche Anzahl von linear unabhängigen Lösungen

$$x_1, x_2, \ldots, x_n; \qquad f_1, f_2, \ldots, f_n \,.$$

In diesem Falle ist für die Lösbarkeit von Gleichung (1) (bzw. (2)) notwendig und hinreichend

$$f_i(y) = 0 \,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \,,$$

(bzw. $g(x_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$).

Die allgemeine Lösung von (1) hat dann die Form

$$x = x_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \,.$$

x_0 ist eine Partikulärlösung von (1), $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sind beliebige Konstanten. Entsprechend hat die allgemeine Lösung von (2) das Aussehen

$$f = f_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i \,.$$

f_0 ist Partikulärlösung von (2), $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sind wiederum beliebige Konstanten.

Ein genaueres Studium der Gleichung (1) führt uns zu folgenden Resultaten. L_k bezeichne den Wertebereich des Operators

$$T^k = (A - I)^k = A^k - \binom{k}{1} A^{k-1} + \cdots + (-1)^k I = \pm (A_k - I) \,,$$

A_k ist wiederum ein vollstetiger Operator.

Nach Hilfssatz 2 ist jedes L_k ein Unterraum. Ist $y \in L_k$, so folgt

$$y = T^k x = T^{k-1}(T x) = T^{k-1} z \,,$$

d. h. $y \in L_{k-1}$, und folglich bilden die Unterräume L_k eine fallende Folge. N_k bezeichnet das Radikal des Operators T^k.

Satz 5. *Unter den Unterräumen L_k und genauso unter den N_k befinden sich nur endlich viel verschiedene.*

Wir beweisen vorbereitend, daß aus $L_m = L_{m+1}$ folgt $L_m = L_k$ für alle $k > m$. Mit einem beliebigen Element $y \in L_{m+1}$ erhalten wir

$$y = T^{m+1} x = T (T^m x) .$$

Wegen $L_m = L_{m+1}$ läßt sich ein Element x' finden, so daß gilt

$$T^m x = T^{m+1} x' .$$

Das ergibt

$$y = T (T^m x) = T (T^{m+1} x') = T^{m+2} x' ,$$

d. h. $y \in L_{m+2}$. Danach wird

$$L_{m+2} = L_{m+1}$$

und analog

$$L_{m+3} = L_{m+2}, \ldots .$$

Wir nehmen nun an, es wäre für jedes n entgegen der Behauptung $L_n \neq L_{n+1}$. Wegen $L_{n+1} \subset L_n$ gibt es nach dem Hilfssatz von § 2, Kapitel II, in L_n ein x_n, dessen Norm Eins ist und das für alle $y \in L_{n+1}$

$$\|x_n - y\| \geqq \frac{1}{2}$$

befriedigt.

Die Folge $\{x_n\}$ gehört der Einheitskugel des Raumes E an, und deshalb muß die Folge $\{A\, x_n\}$ kompakt sein. Andererseits gelangen wir zu

$$A\, x_n - A\, x_{n+p} = x_n - T\, x_n - x_{n+p} + T\, x_{n+p} = x_n - (T\, x_n + x_{n+p} - T\, x_{n+p}) .$$

Es gilt

$$y = T\, x_n + x_{n+p} - T\, x_{n+p} \in L_{n+1}$$

wegen

$$T\, x_n = T (T^n x) = T^{n+1} x \in L_{n+1} , \qquad x_{n+p} \in L_{n+p} \subset L_{n+1}$$

und

$$T\, x_{n+p} \in L_{n+p+1} \subset L_{n+1} .$$

Die Konstruktion der Folge $\{x_n\}$ hat dann zur Folge

$$\|A\, x_n - A\, x_{n+p}\| = \|x_n - y\| \geqq \frac{1}{2} ,$$

und damit wäre die Folge $\{A\, x_n\}$ nicht kompakt. Der sich ergebende Widerspruch beweist den ersten Teil des Satzes. Analog wird der zweite Teil bewiesen (was im wesentlichen schon beim Beweis von Satz 3 getan wurde).

Satz 6. *Zu einem beliebigen vollstetigen Operator A existiert eine Zerlegung des Raumes E in eine direkte Summe von Unterräumen U und V*

$$E = U \oplus V , \tag{9}$$

wobei

1. *der Teilraum V endlichdimensional ist;*
2. *der Operator $A - I$ umkehrbar eindeutig U auf sich und V in sich abbildet;*
3. *der Operator A eine Darstellung in Form einer Summe zweier Operatoren A_u und A_v,*

$$A = A_u + A_v , \tag{10}$$

erlaubt, wobei A_u und A_v vollstetige lineare Operatoren sind; sie bilden E in U bzw. E in V ab; der Operator $A_u - I$ ist invertierbar, und es gilt

$$A_u\, A_v = A_v\, A_u = 0 .$$

ν sei die kleinste natürliche Zahl n mit $L_n = L_{n+1}$. Es sei $U = L_\nu$, $V = N_\nu$. Früher wurde gezeigt: U und V sind Unterräume. Wegen $T^\nu = \pm (A_\nu - I)$, wobei A_ν vollstetig ist, ist auf Grund des Hilfssatzes 1 das Radikal N_ν des Operators $A_\nu - I$, d. h. V, endlichdimensional.

Es seien $x \in U$ und $y = T\,x$. Wegen $x \in L_\nu$ existiert ein Element $x' \in E$ mit $x = T^\nu x'$. Dann wird

$$y = T\,x = T^{\nu+1} x' \in L_{\nu+1} = L_\nu = U\,,$$

und damit gehören die Bilder der Elemente des Unterraumes U demselben Unterraum an.

Es sei nun y ein beliebiges Element aus U:

$$y \in U = L_\nu = L_{\nu+1}\,.$$

Es gibt ein Element $x' \in E$ mit

$$y = T^{\nu+1} x' = T\,(T^\nu x') = T\,x\,,$$

wobei

$$x = T^\nu x' \in L_\nu = U$$

ist. Folglich ist jedes Element $y \in U$ das Bild eines Elementes $x \in U$, und der Operator T bildet U auf U ab.

Hieraus folgen nach Satz 3 die Eineindeutigkeit der Abbildung $T\,x = y$, $x \in U$, und die Existenz eines beschränkten Operators, der invers zum nur auf den Elementen des Teilraumes U betrachteten Operator T ist.

$x \in V = N_\nu$ bedeutet $T^\nu x = 0$ oder $T^{\nu-1}(T\,x) = 0$. Also ist $T\,x \in N_{\nu-1} \subset N_\nu$, und demzufolge bildet der Operator T V in sich ab.

Nun läßt sich unschwer Gleichung (9) herleiten. T_u sei der auf U eingeschränkte Operator T. Er besitzt eine Inverse. Für beliebiges $x \in E$ setzen wir $u = T_u^{-\nu} T^\nu x$ und $v = x - u$. Offenbar ist $u \in U$. Ferner ist wegen

$$T^\nu v = T^\nu x - T^\nu u = 0$$

$v \in V$.

Wenn jetzt

$$x = \tilde{u} + \tilde{v}$$

eine andere Darstellung des Elementes $x \in E$ mit $\tilde{u} \in U$ und $\tilde{v} \in V$ ist, erhalten wir

$$T^\nu x = T^\nu \tilde{u} + T^\nu \tilde{v} = T^\nu \tilde{u} \tag{11}$$

und damit $T^\nu \tilde{v} = 0$. Wegen $\tilde{u} \in U$ kommen wir mit Gleichung (11) zu

$$\tilde{u} = T_u^{-\nu} T^\nu \tilde{u} = T_u^{-\nu} T^\nu x\,,$$

und die Eindeutigkeit der Darstellung ist gezeigt.

Die Linearität der Operatoren T und T_u^{-1} ergibt

$$||u|| = ||T_u^{-\nu} T^\nu x|| \leqq c_1\,||x||$$

und

$$||v|| \leqq c_2\,||x||\,.$$

Die Operatoren A_u und A_v werden für beliebiges $x \in E$ folgendermaßen definiert:

$$A_u\,x = A\,u\,, \qquad A_v\,x = A\,v\,.$$

Speziell ist $A_u\,v = A_v\,u = 0$. Wegen

$$A_u\,x = T\,u + u \quad \text{und} \quad A_v\,x = T\,v + v$$

folgt aus den früher bewiesenen Beziehungen $T(U) = U$ und $T(V) \subset V$, $A\,u \in U$ und $A\,v \in V$. Die Operatoren A_u und A_v bilden E in U bzw. V ab. Es gilt

a) A_u und A_v sind lineare beschränkte Operatoren,

b) $A = A_u + A_v$,

c) $A_u(A_v x) = A_v(A_u x) = 0$,

d) A_v ist ein vollstetiger Operator, da er den Raum E in einen endlichdimensionalen Teilraum V abbildet, dann ist aber auch A_u ein vollstetiger Operator.

Wir betrachten schließlich die Gleichung

$$A_u x - x = y = u + v. \tag{12}$$

Auf Grund der Umkehrbarkeit auf U von $T = A - I$ existiert eine Lösung x' der Gleichung

$$A x - x = u.$$

Mit $x_0 = x_0' - v$ erhalten wir

$$A_u x_0 - x_0 = A_u(x_0' - v) - x_0' + v = A_u x_0' - x_0' + v = u + v = y,$$

und demnach ist Gleichung (12) immer lösbar. Deswegen besitzt der Operator $A_u - I$ nach Satz 3 eine beschränkte Inverse. Der Beweis des Satzes ist damit abgeschlossen.

Zum Abschluß dieses Paragraphen betrachten wir parameterabhängige Gleichungen. Da die Gleichung

$$A x - \lambda x = y, \qquad \lambda \neq 0, \tag{1_λ}$$

in der Form

$$\frac{1}{\lambda} A x - x = \frac{1}{\lambda} y$$

geschrieben werden kann und $\frac{1}{\lambda} A$ zusammen mit A vollstetig ist, bleibt der für Gleichung (1) bewiesene Satz für Gleichung (1_λ) gültig.

Satz 3 ergibt, daß bei gegebenem $\lambda \neq 0$ entweder die Gleichung

$$A x - \lambda x = y$$

bei beliebiger rechter Seite lösbar ist, oder aber die homogene Gleichung

$$A x - \lambda x = 0$$

eine nichttriviale Lösung besitzt. Deshalb ist jeder Wert des Parameters $\lambda \neq 0$ entweder regulär oder ein Eigenwert, und andere von Null verschiedene Punkte des Spektrums, außer Eigenwerten, besitzt der Operator A nicht[1]).

Satz 7. *Wenn A ein vollstetiger Operator ist, so enthält sein Spektrum eine endliche oder abzählbare Menge von Punkten. Alle Eigenwerte liegen im Intervall* $[-\|A\|, \|A\|]$, *und im Falle eines abzählbaren Spektrums haben sie $\lambda = 0$ als einzigen Häufungspunkt.*

Wir betrachten den Operator

$$T_\lambda = A - \lambda I.$$

Durch Umschreiben des Operators in die Form

$$T_\lambda = -\lambda\left(I - \frac{1}{\lambda} A\right)$$

---

[1]) Die Dimension des Radikals des Operators $A - \lambda I$ heißt *Vielfachheit* des Eigenwertes λ. Aus Hilfssatz 1 folgt, daß alle von Null verschiedenen Eigenwerte eines vollstetigen Operators eine endliche Vielfachheit besitzen.

wird ersichtlich, daß wegen der Resultate von § 5, Kap. III, für

$$\frac{1}{|\lambda|}\,||A|| < 1$$

der Operator

$$I - \frac{1}{\lambda} A$$

und folglich auch der Operator T_λ eine Inverse besitzt, d. h., das Spektrum des Operators A liegt auf $[-\,||A||, ||A||]$. Es gelte $0 < \alpha < ||A||$. Zum Abschluß des Beweises genügt es zu zeigen, daß nur eine endliche Anzahl von Eigenwerten λ mit $|\lambda| \geqq \alpha$ existieren kann.

Wir nehmen das Gegenteil an. Dann können wir eine Folge $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ verschiedener Eigenwerte mit $|\lambda_i| \geqq \alpha$ herausgreifen. $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ sei die diesen Eigenwerten entsprechende Folge von Eigenelementen

$$A\, x_n = \lambda_n\, x_n\,.$$

Bei beliebigem k sind die Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_k$ linear unabhängig. Das ist für $k = 1$ trivial. $x_1, x_2, \ldots, x_k$ seien linear unabhängig.

Aus der Annahme

$$x_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} c_i\, x_i \tag{13}$$

erhalten wir durch Anwendung von A auf beiden Seiten

$$\lambda_{k+1}\, x_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, c_i\, x_i\,. \tag{14}$$

(13) und (14) ergeben (wegen $\lambda_{k+1} \neq 0$)

$$\sum_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_{k+1}}\right) c_i\, x_i = 0\,.$$

Das ist aber auf Grund der Ungleichung

$$1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_{k+1}} \neq 0$$

und der linearen Unabhängigkeit von $x_1, x_2, \ldots, x_k$ nicht möglich.

L_k sei der von den $x_1, x_2, \ldots, x_k$ erzeugte Teilraum. L_k ist ein echter Teilraum des Raumes L_{k+1}. Daher existiert ein Element

$$y_{k+1} \in L_{k+1}\,, \qquad ||y_{k+1}|| = 1$$

mit

$$||y_{k+1} - x|| \geqq \frac{1}{2}$$

für beliebiges $x \in L_k$. Wir schätzen $||A\, y_m - A\, y_n||$ ab, wobei wir etwa $m > n$ voraussetzen. Es ist

$$A\, y_m - A\, y_n = \lambda_m\, y_m + T_{\lambda_m}\, y_m - \lambda_n\, y_n - T_{\lambda_n}\, y_n = \lambda_m\, y_m - \tilde{x}$$

mit

$$\tilde{x} = \lambda_n\, y_n + T_{\lambda_n}\, y_n - T_{\lambda_m}\, y_m\,.$$

Wir bemerken, daß

$$T_{\lambda_m} y_m = A\, y_m - \lambda_m\, y_m = A\left(\sum_{i=1}^{m} c_i\, x_i\right) - \lambda_m \sum_{i=1}^{m} c_i\, x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i\, \lambda_i\, x_i - \sum_{i=1}^{m} c_i\, \lambda_m\, x_i = \sum_{i=1}^{m-1} (\lambda_i - \lambda_m)\, c_i\, x_i$$

ist. Deshalb ist $T_{\lambda_m} y_m \in L_{m-1}$. Wegen $y_n \in L_n \subset L_m \subset L_{m-1}$ und $T_{\lambda_n} y_n \in L_{n-1} \subset L_{m-1}$ wird $\tilde{x} \in L_{m-1}$. Wir setzen $\tilde{x} = \lambda_m \tilde{y}$, $\tilde{y} \in L_{m-1}$. Dadurch erhalten wir

$$\|A\, y_m - A\, y_n\| = \|\lambda_m\, y_m - \lambda_m\, \tilde{y}\| = |\lambda_m|\, \|y_m - \tilde{y}\| \geqq \alpha \frac{1}{2}.$$

Infolgedessen kann weder $\{A\, y_n\}$ noch irgendeine Teilfolge konvergieren. Andererseits ist wegen der Beschränktheit der Menge $\{y_n\}$ die Folge $\{A\, y_n\}$ kompakt und enthält somit eine konvergente Teilfolge. Der erhaltene Widerspruch stellt den Beweis des Satzes dar.

Satz 7 charakterisiert die sogenannte „Diskretheit" des Spektrums eines vollstetigen Operators.

§ 3. Das Schaudersche Prinzip und seine Anwendungen

M sei eine Menge des Banach-Raumes E und A ein im allgemeinen nichtlinearer, auf M definierter und diese Menge in sich abbildender Operator.

Der Operator A heißt *kompakt* auf der Menge M, wenn er jede beschränkte Teilmenge dieser Menge in eine kompakte überführt. Wenn der Operator A außerdem stetig auf M ist, werden wir ihn *vollstetig* auf dieser Menge nennen (ist A linear, so fällt diese Definition mit der früheren zusammen). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann die Menge M im weiteren als beschränkt angesehen werden.

Für vollstetige Operatoren, die konvexe Bereiche eines Banach-Raumes in sich abbilden, stellte J. Schauder einen Satz auf, der den bekannten Satz von Brouwer über die Existenz eines Fixpunktes bei einer stetigen Abbildung eines konvexen Bereiches des n-dimensionalen euklidischen Raumes in sich verallgemeinert. Dieser Satz von Schauder besitzt eine Vielzahl von Anwendungen beim Beweis der Existenz von Lösungen der verschiedensten Gleichungen.

Drei Hilfssätze. Zum Beweis des Satzes von Schauder benötigen wir drei Hilfssätze.

Es sei M eine Menge von Elementen des Banach-Raumes und $\{A_n\}$ eine Folge von im allgemeinen nichtlinearen, auf M definierten Operatoren. Wir sagen, diese Folge konvergiere gleichmäßig auf M gegen einen Operator A_0, wenn für eine beliebige Zahl $\varepsilon > 0$ ein nur von ε abhängendes n_0 existiert mit

$$\|A_n\, x - A_0\, x\| < \varepsilon$$

für $n \geqq n_0$ und beliebiges $x \in M$.

Hilfssatz 1. *Wenn die Folge* $\{A_n\}$ *von auf* M *vollstetigen Operatoren auf dieser Menge gleichmäßig gegen den Operator* A_0 *konvergiert, dann ist auch* A_0 *vollstetig auf* M.

Zunächst werde die Stetigkeit des Operators A_0 auf M gezeigt. $\{x_n\} \subset M$ möge gegen $x_0 \in M$ konvergieren. Wir erhalten

$$||A_0 x_m - A_0 x_0|| \leqq ||A_0 x_m - A_n x_m|| + ||A_n x_m - A_n x_0|| + ||A_n x_0 - A_0 x_0||\,.$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Operatorenfolge $\{A_n\}$ auf M gegen den Operator A_0 muß für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ eine ganze Zahl n_0 existieren, so daß bei $n \geqq n_0$

$$||A_n x_m - A_0 x_m|| < \frac{\varepsilon}{3}\,, \qquad ||A_n x_0 - A_0 x_0|| < \frac{\varepsilon}{3}$$

wird. Wir fixieren n.

Wegen der Stetigkeit des Operators A_n gibt es ein m_0, so daß bei $m \geqq m_0$

$$||A_n x_m - A_n x_0|| < \frac{\varepsilon}{3}$$

ist. Dann wird bei $m \geqq m_0$

$$||A_0 x_m - A_0 x_0|| < \varepsilon\,,$$

d. h., der Operator A_0 ist stetig.

Zum Beweis der Kompaktheit des Operators A_0 müssen wir zeigen, daß die Menge $A_0(M)$ kompakt ist.

Für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ wählen wir n_0 so aus, daß

$$||A_n x - A_0 x|| < \varepsilon$$

für alle $x \in M$ ist. Das kann auf Grund der gleichmäßigen Konvergenz der Folge $\{A_n\}$ gegen A_0 getan werden. Es sei $N = A_{n_0}(M)$. Die Menge N ist kompakt und stellt ein ε-Netz für die Menge $A_0(M)$ dar (siehe den Beweis des Satzes 2 von § 1). Hieraus folgt, daß $A_0(M)$ kompakt ist.

Somit ist A_0 ein stetiger und kompakter Operator, und der Hilfssatz ist bewiesen.

Hilfssatz 2 (J. SCHAUDER). *Jeder auf einer Menge* M *vollstetige Operator* A *ist auf dieser Menge der Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Folge* $\{A_k\}$ *von stetigen endlichdimensionalen Operatoren (die* M *in einen endlichdimensionalen Teilraum des Raumes* E *abbilden).*

Wegen der Vollstetigkeit des Operators A ist $A(M)$ eine kompakte Menge. Wir nehmen eine gegen Null konvergierende Folge positiver Zahlen $\{\varepsilon_k\}$ und konstruieren für jedes k ein ε_k-Netz

$$N_k = \{y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \ldots, y_{m_k}^{(k)}\}$$

für die Menge $A(M)$, das aus Punkten dieser Menge besteht. Wir definieren auf $A(M)$ den Operator P_k durch

$$P_k(y) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m_k} \mu_i^{(k)}(y)\, y_i^{(k)}}{\sum\limits_{i=1}^{m_k} \mu_i^{(k)}(y)} \tag{1}$$

für $y \in A(M)$ und

$$\mu_i^{(k)}(y) = \begin{cases} \varepsilon_k - \|y - y_i^{(k)}\|, & \text{wenn} \quad \|y - y_i^{(k)}\| < \varepsilon_k, \\ 0, & \text{wenn} \quad \|y - y_i^{(k)}\| \geqq \varepsilon_k. \end{cases}$$

Gleichung (1) hat für beliebige $y \in A(M)$ einen Sinn, denn es sind alle $\mu_i^{(k)}(y) \geqq 0$, und es ist $\mu_i^{(k)}(y) > 0$ für mindestens ein i.

Der Operator $P_k(y)$ ist stetig auf $A(M)$. Das folgt aus der Stetigkeit der Funktionen $\mu_i^{(k)}(y)$. Folglich ist auch

$$\sum_{i=1}^{m_k} \mu_i^{(k)}(y)$$

eine stetige Funktion von y. Außerdem ist für jedes $y \in A(M)$ $\sum_{i=1}^{m_k} \mu_i^{(k)}(y) > 0$. Das ergibt die Stetigkeit des Quotienten

$$\frac{\mu_i^{(k)}(y)}{\sum_{j=1}^{m_k} \mu_j^{(k)}(y)}$$

und folglich auch die des Ausdruckes

$$\frac{\sum_{i=1}^{m_k} \mu_i^{(k)}(y)\, y_i^{(k)}}{\sum_{i=1}^{m_k} \mu_i^{(k)}(y)},$$

d. h. des Operators $P_k(y)$. Ferner ist

$$\|y - P(y)\| = \left\| y - \frac{\sum_{i=1}^{m_k} \mu_i^{(k)}(y)\, y_i^{(k)}}{\sum_{i=1}^{m_k} \mu_i^{(k)}(y)} \right\| = \left\| \frac{\sum_{i=1}^{m_k} \mu_i^{(k)}(y)\, (y - y_i^{(k)})}{\sum_{i=1}^{m_k} \mu_i^{(k)}(y)} \right\|$$

$$\leqq \frac{\sum_{i=1}^{m_k} \mu_i^{(k)}(y)\, \|y - y_i^{(k)}\|}{\sum_{i=1}^{k} \mu_i^{(k)}(y)} < \varepsilon_k \frac{\sum_{i=1}^{m_k} \mu_i^{(k)}(y)}{\sum_{i=1}^{m_k} \mu_i^{(k)}(y)} = \varepsilon_k,$$

denn ist für ein i

$$\|y - y_i^{(k)}\| \geqq \varepsilon_k,$$

so wird der entsprechende Koeffizient $\mu_i^{(k)}(y)$ gleich Null.

Wir setzen nun für $x \in M$

$$A_k x = P_k(A x)$$

und erhalten eine Folge endlichdimensionaler Operatoren $\{A_k\}$ mit

$$\|A x - A_k x\| = \|A x - P_k(A x)\| < \varepsilon_k$$

für jedes $x \in M$. Der Hilfssatz ist damit bewiesen.

Bemerkung. *Da die Elemente $y_i^{(k)}$ der Menge $A(M)$ angehören, so gehören die Werte des im Hilfssatz 2 konstruierten Operators der konvexen Hülle der Menge $A(M)$ an.*

Hilfssatz 3. *Es sei eine Folge $\{A_n\}$ von auf M vollstetigen Operatoren auf M gleichmäßig konvergent gegen einen Operator A_0. Weiter sei*

$$K_n = A_n(M), \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Dann ist die Menge

$$K = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$$

kompakt.

Nach Hilfssatz 1 ist der Operator A_0 vollstetig. Da die Folge $\{A_n\}$ gleichmäßig gegen den Operator A_0 konvergiert, gibt es für beliebiges $\varepsilon > 0$ und $y \in K_n$ für $n \geqq n_0(\varepsilon)$ ein $u \in K_0$ mit

$$\|y - u\| < \varepsilon .$$

Ist nämlich y ein beliebiges Element aus K_n und x eines der Urbilder von y bei der Abbildung A_n, so kann man $u = A_0(x)$ wählen.

Wir bilden die Menge $N = \bigcup_{n=0}^{n_0} K_n$. Sie ist kompakt. Diese Menge ist, wie wir zeigen werden, ein ε-Netz für K.

Es sei $y \in K$. Bei

$$y \in \bigcup_{n=0}^{n_0} K_n$$

braucht nichts bewiesen zu werden.

Wenn jedoch $y \in K_n$ für $n > n_0$ ist, so existiert, wie oben gezeigt wurde, ein $u \in K_0$ mit

$$\|y - u\| < \varepsilon .$$

Folglich ist N ein kompaktes ε-Netz für die Menge K, und deshalb ist die Menge K kompakt.

Das Fixpunktprinzip von J. SCHAUDER. Satz 1. *Wenn ein vollstetiger Operator A eine beschränkte abgeschlossene konvexe Menge S des* BANACH-*Raumes E in sich abbildet, so existiert ein Fixpunkt dieser Abbildung, d. h. ein solcher Punkt $x \in S$, für den $A\,x = x$ ist.*

Wir wählen eine Folge $\{\varepsilon_n\}$ von gegen Null konvergierenden positiven Zahlen und konstruieren gemäß Hilfssatz 2 eine Folge stetiger endlichdimensionaler Operatoren A_n, die auf der Menge S gleichmäßig gegen den Operator A konvergieren.

Auf Grund der Bemerkung zum Hilfssatz 2 und wegen der Konvexität von S ist $A_n\,x \in S$ für beliebiges $x \in S$. E_n sei ein endlichdimensionaler Teilraum, in dem die Menge $A_n(S)$ liegt. Wir untersuchen den Operator A_n auf der Menge

$$S_n = S \cap E_n$$

des Teilraumes E_n. S_n ist ebenfalls eine konvexe abgeschlossene Menge.

Wegen

$$A_n(S) \subset S \quad \text{und} \quad A_n(S) \subset E_n$$

ist

$$A_n(S) \subset S_n$$

und erst recht

$$A_n(S_n) \subset S_n\,.$$

Also bildet der auf dem endlichdimensionalen Raum E_n betrachtete Operator A_n die abgeschlossene konvexe Menge S_n dieses Raumes in sich ab, und deshalb existiert nach dem Satz von BOLYAI-BROUWER (s. Ergänzung III) ein Fixpunkt dieser Abbildung, d. h. ein Punkt $x_n \in S_n$ mit

$$A_n\, x_n = x_n\,.$$

Da nun $S_n \subset S$ ist, ist x_n ein Fixpunkt des Operators A_n auch bei der Abbildung der Menge S durch diesen Operator.

Wegen der Relation

$$x_n \in A_n(S)$$

gehört die Folge $\{x_n\}$ der Menge

$$\tilde{S} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n(S) \subset S$$

an. Nach Hilfssatz 3 ist die Menge $\tilde{S}$ kompakt. Daher kann aus der Folge $\{x_n\}$ eine konvergente Teilfolge $\{x_{n_i}\}$ herausgegriffen werden, und der Grenzwert x_0 dieser Teilfolge gehört wegen der Abgeschlossenheit von S zu S.

Wir zeigen, daß x_0 ein Fixpunkt des Operators A ist.

Es ist

$$\begin{aligned} ||A\,x_0 - x_0|| &\leqq ||A\,x_0 - A\,x_{n_i}|| + ||A\,x_{n_i} - A_{n_i}\,x_{n_i}|| + ||\,A_{n_i}\,x_{n_i} - x_0|| \\ &= ||A\,x_0 - A\,x_{n_i}|| + ||A\,x_{n_i} - A_{n_i}\,x_{n_i}|| + ||x_{n_i} - x_0||\,. \end{aligned}$$

Für gegebenes $\varepsilon > 0$ wählen wir als erstes n' so groß, daß bei $n_i \geqq n'$

$$||x_{n_i} - x_0|| \leqq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{und} \quad ||A\,x_0 - A\,x_{n_i}|| < \frac{\varepsilon}{3}$$

gilt. Danach nehmen wir n'' so groß, daß bei $n_i \geqq n''$ gleichmäßig auf S

$$||A\,x - A_{n_i}\,x|| < \frac{\varepsilon}{3}$$

gilt, insbesondere für alle x_{n_i}. Dann ist für $n_i \geqq n_0 = \max(n', n'')$

$$||A\,x_0 - x_0|| < \varepsilon\,.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist dies nur für $A\,x_0 = x_0$ möglich, d. h., x_0 ist ein Fixpunkt des Operators A. Das SCHAUDERsche Prinzip ist damit bewiesen.

Als Anwendungsbeispiel für das SCHAUDERsche Prinzip beweisen wir den bekannten Satz von PEANO über die Existenz einer Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung.

Satz 2. *Die Funktion $f(t, x)$ sei stetig auf der Gesamtheit der Veränderlichen im Bereich $|t - t_0| \leqq a$, $|x - x_0| \leqq b$. β sei das Maximum von $|f(t, x)|$ in diesem Gebiet. Wenn*

$$h = \min\left(a, \frac{b}{\beta}\right)$$

ist, so existiert in dem Intervall $[t_0 - h,\ t_0 + h]$ *mindestens eine Lösung der Gleichung*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)\,, \tag{2}$$

die der Bedingung

$$x(t_0) = x_0 \tag{3}$$

genügt.

Die Gleichung (2) ist zusammen mit der Anfangsbedingung (3) äquivalent zur Integralgleichung

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau\,. \tag{4}$$

Wir untersuchen den durch die Gleichung

$$A\,x = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau$$

auf der Kugel $||x - x_0|| \leqq b$ des Raumes $C\,[t_0 - h,\ t_0 + h]$ definierten Operator A. Wir zeigen, daß der Operator A auf dieser Kugel vollstetig ist.

Konvergiert eine Folge $\{x_n(t)\}$, deren Funktionen der Kugel $||x - x_0|| \leqq b$ angehören, gegen eine Funktion $x(t)$ (die dann derselben Kugel angehört), so gilt auf Grund der Stetigkeit der Funktion $f(t, x)$

$$f(t, x_n(t)) \to f(t, x(t))$$

gleichmäßig auf $[t_0 - h,\ t_0 + h]$. Hieraus folgt auf Grund der Möglichkeit, den Grenzübergang bei der gleichmäßigen Konvergenz unter dem Integralzeichen zu vollziehen,

$$A\,x_n \to A\,x\,,$$

d. h., der Operator A ist stetig auf der Kugel $||x - x_0|| \leqq b$.

Ferner gilt für jedes Element $x(t)$ der Kugel $||x - x_0|| \leqq b$

$$|A\,x(t)| \leqq |x_0| + \left|\int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau\right| \leqq |x_0| + \beta|h|\,. \tag{5}$$

Sind t_1 und t_2 zwei Punkte des Intervalls $[t_0 - h,\ t_0 + h]$, so erhalten wir

$$|A\,x(t_1) - A\,x(t_2)| \leqq \left|\int_{t_1}^{t_2} f(\tau, x(\tau))\, d\tau\right| \leqq \beta\,|t_2 - t_1|\,. \tag{6}$$

Die Ungleichungen (5) und (6) zeigen wegen des Satzes von ARZELÀ, daß der Operator A die Kugel $||x - x_0|| \leqq b$ in eine kompakte Menge abbildet.

Wir beweisen schließlich, daß der Operator A diese Kugel in sich abbildet. In der Tat ist

$$|A\,x(t) - x_0| = \left|\int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau\right| \leqq \beta\,h \leqq \beta\,\frac{b}{\beta} = b\,.$$

Der Operator A also genügt allen Bedingnugen des SCHAUDERschen Satzes. Deshalb existiert ein Fixpunkt dieses Operators, d. h. eine Funktion $x(t)$ mit

$$x(t) \equiv x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau\,.$$

Diese Gleichung ist gleichwertig mit den beiden Gleichungen

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t))\,, \qquad x(t_0) = x_0\,.$$

Damit ist der Satz von PEANO bewiesen.

Beim Beweis des Satzes von PEANO haben wir das SCHAUDERsche Prinzip angewandt, um die Existenz einer Lösung der Integralgleichung (4) nachzuweisen. Dieses Prinzip ermöglicht den Nachweis der Existenz von Lösungen bei weitaus schwierigeren nichtlinearen Integral- und Integrodifferentialgleichungen.

§ 4. Die Vollstetigkeit des Einbettungsoperators von S. L. SOBOLEW

Es wurde bereits gezeigt (S. 80), daß die Zugehörigkeit einer Funktion $\varphi(x, y)$ zur Klasse $W_p^{(l)}$ die Zugehörigkeit zur Klasse $W_p^{(k)}$ bei $k < l$ zur Folge hat.

Wir führen einen Operator A ein, der für alle Funktionen $\varphi(x, y) \in W_p^{(l)}$ definiert ist und $\varphi(x, y)$ in sich überführt. $\varphi(x, y)$ sehen wir im Ergebnis als Element des Raumes $W_p^{(k)}$ an. Zu verschiedenen k gehören verschiedene Operatoren. Der Operator A heißt *Einbettungsoperator*. Er ist offensichtlich linear, und die Ungleichung auf S. 80 zeigt seine Beschränktheit.

A ist sogar ein vollstetiger Operator. Zur Vollstetigkeit führt uns der folgende Satz.

Satz (W. I. KONDRASCHOW). *$\mathfrak{M}$ sei eine beschränkte Menge im Raum $W_p^{(l)}$. Ist $p > 2$, so ist die Menge $A(\mathfrak{M})$ im Sinne der gleichmäßigen Konvergenz kompakt; ist $p \leqq 2$, so ist $A(\mathfrak{M})$ kompakt im Sinne der Metrik des Raumes $L_p(G)$.*

Nach der Gleichung von S. L. SOBOLEW ist

$$A\,\varphi = \varphi(x, y) = \sum_{k=0}^{l-1} \sum_{k_1+k_2=k} C_{k_1 k_2}^{(k)}(P) \iint\limits_G \varphi(Q) \frac{\partial^k \omega_k}{\partial x^{k_1}\, \partial y^{k_2}}\, dQ$$

$$+ \sum_{l_1+l_2=l} \iint\limits_G A_{l_1 l_2}^{(l)}(P, Q) \frac{\partial^l \varphi}{\partial x^{l_1}\, \partial y^{l_2}}\, dQ\,. \qquad (1)$$

Auf Grund der Stetigkeit von $\frac{\partial^k \omega_k}{\partial x^{k_1}\, \partial y^{k_2}}$ sind die Summanden des ersten Gliedes der Gleichung (1) Integraloperatoren mit stetigen Kernen, folglich sind es vollstetige Operatoren sowohl in der Metrik von $C(G)$ als auch in der Metrik von $L_p(G)$. Man braucht deshalb nur die Summanden des letzten Gliedes von Gleichung (1) zu untersuchen. Die Kerne $A_{l_1 l_2}^{(l)}(P, Q)$ der Integraloperatoren, die den Summanden des zweiten Gliedes entsprechen, haben die Form

$$A(P, Q) = \frac{B(P, Q)}{r}$$

oder

$$A(P, Q) = B\,P, Q)\,(\alpha \ln r + \beta)\,,$$

worin $B(P, Q)$ eine beschränkte Funktion ist:

$$|B(P, Q)| \leqq C\,.$$

Zu zeigen ist die Vollstetigkeit eines Integraloperators mit solch einem Kern.

Wir untersuchen den Fall $p > 2$ und beschränken uns auf den ersten Ausdruck für $A(P, Q)$. Wir erhalten

$$\left|\iint\limits_G A^{(l)}_{l_1 l_2}(P, Q) \frac{\partial^l \varphi}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2}} dQ\right| \leqq C \iint\limits_G \frac{\left|\frac{\partial^l \varphi}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2}}\right|}{r} dQ$$

$$\leqq C \left(\iint\limits_G \left|\frac{\partial^l \varphi}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2}}\right|^p dQ\right)^{1/p} \left(\iint\limits_G r^{-q} dQ\right)^{1/q}$$

$$\leqq C \|\varphi\|_{W_p^{(l)}} \left(\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\varrho} r^{-q+1} dr\, d\theta\right)^{1/q} \leqq C K (2\pi)^{1/q} (B)^{1/q}. \tag{2}$$

Hier ist K eine Schranke für die Normen der Funktionen $\varphi(x, y)$ im Raum $W_p^{(l)}$ und B das Integral $\int\limits_0^{\varrho} r^{-q+1} dr$, das bei $q < 2$, d. h. $p > 2$, konvergiert.

Weiter führen wir abkürzend

$$\psi(P) = \iint\limits_G A^{(l)}_{l_1 l_2}(P, Q) \frac{\partial^l \varphi}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2}} dQ$$

ein und erhalten

$$|\psi(P + \Delta P) - \psi(P)| \leqq C \left\{\iint\limits_{G-G_\delta} \left|\frac{1}{r_{P+\Delta P, Q}} - \frac{1}{r_{P, Q}}\right| \left|\frac{\partial^l \varphi}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2}}\right| dQ\right.$$

$$\left. + \iint\limits_{G_\delta} \frac{1}{r_{P+\Delta P, Q}} \left|\frac{\partial^l \varphi}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2}}\right| dQ + \iint\limits_{G_\delta} \frac{1}{r_{P, Q}} \left|\frac{\partial^l \varphi}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2}}\right| dQ\right\}, \tag{3}$$

wobei G_δ aus den vom Punkt P weniger als $2\,\delta$ entfernten Punkten des Gebietes G besteht. Wir verlangen außerdem, daß der Abstand vom Punkt P zum Punkt $P + \Delta P$ nicht größer als δ ist.

Infolgedessen wird das in den geschwungenen Klammern unter dem ersten Integralzeichen stehende $\frac{1}{r_{P, Q}}$ zu einer stetigen Funktion und der erste Summand bei genügend kleinem ΔP beliebig klein. Was den zweiten Summanden betrifft, so erhalten wir für ihn durch Einführen von Polarkoordinaten mit dem Zentrum in $P + \Delta P$

$$\iint\limits_{G_\delta} \frac{1}{r_{P+\Delta P, Q}} \left|\frac{\partial^l \varphi}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2}}\right| dQ \leqq \left(\iint\limits_{G_\delta} \left|\frac{\partial^l \varphi}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2}}\right|^p dQ\right)^{1/p} \left(\iint\limits_{G_\delta} \left|\frac{1}{r_{P+\Delta P, Q}}\right|^q dQ\right)^{1/q}$$

$$\leqq K (2\pi)^{1/q} \left(\int\limits_0^{3\delta} \frac{1}{r^q} r\, dr\right)^{1/q} \leqq K (2\pi)^{1/q} \frac{1}{2-q} (3\,\delta)^{2-q}.$$

Die rechte Seite der Ungleichung kann bei hinreichend kleinem δ beliebig klein gemacht werden, wenn nur $q < 2$, d. h. $p > 2$, ist. Analog schätzen wir das dritte

Integral ab und beweisen so die gleichgradige Stetigkeit der Funktionen $\psi(P)$. Damit ist der erste Teil des Satzes bewiesen.

Wir gehen zum Fall $p \leqq 2$ über. Wieder gilt

$$|\psi(P + \varDelta P) - \psi(P)| \leqq C \left\{ \iint\limits_{G-G\delta} \left| \frac{1}{r_{P+\varDelta P,\,Q}} - \frac{1}{r_{P,\,Q}} \right| \left| \frac{\partial^l \varphi}{\partial x^{l_1}\,\partial y^{l_2}} \right| dQ \right.$$
$$\left. + \iint\limits_{G\delta} \frac{1}{r_{P+\varDelta P,\,Q}} \left| \frac{\partial^l \varphi}{\partial x^{l_1}\,\partial y^{l_2}} \right| dQ + \iint\limits_{G\delta} \frac{1}{r_{P,\,Q}} \left| \frac{\partial^l \varphi}{\partial x^{l_1}\,\partial y^{l_2}} \right| dQ \right\}, \tag{3}$$

und das erste Integral in den geschwungenen Klammern kann wegen der Stetigkeit von $\frac{1}{r_{P,\,Q}}$ bezüglich der Norm in L_p bei hinreichend kleinem $\varDelta P$ beliebig klein gemacht werden. Für den zweiten Summanden ergibt sich in gleicher Weise

$$\left\| \iint\limits_{G\delta} \frac{1}{r_{P+\varDelta P,\,Q}} \left| \frac{\partial^l \varphi}{\partial x^{l_1}\,\partial y^{l_2}} \right| dQ \right\|_{L_p}^p = \iint\limits_{G} \left[\iint\limits_{G\delta} \frac{1}{r_{P+\varDelta P,\,Q}} \left| \frac{\partial^l \varphi}{\partial x^{l_1}\,\partial y^{l_2}} \right| dQ \right]^p dP$$
$$\leqq \iint\limits_{G} \left\{ \iint\limits_{G\delta} \frac{1}{r_{P+\varDelta P,\,Q}} \left| \frac{\partial^l \varphi}{\partial x^{l_1}\,\partial y^{l_2}} \right|^p dQ \right\} \left\{ \iint\limits_{G\delta} \frac{1}{r_{P+\varDelta P,\,Q}}\, dQ \right\}^{p/q} dp$$
$$\leqq (2\,\pi)^{p/q}\,(3\,\delta)^{p/q} \iint\limits_{G} \left\{ \iint\limits_{G} \frac{1}{r_{P+\varDelta P,\,Q}} \left| \frac{\partial^l \varphi}{\partial x^{l_1}\,\partial y^{l_2}} \right|^p dQ \right\} dP$$
$$= (6\,\pi\,\delta)^{p/q} \iint\limits_{G} \left\{ \left| \frac{\partial^l \varphi}{\partial x^{l_1}\,\partial y^{l_2}} \right|^p \iint\limits_{G} \frac{1}{r_{P+\varDelta P,\,Q}}\, dP \right\} dQ \leqq (6\,\pi\,\delta)^{p/q}\, 2\,\pi\, D\, K^p ,$$

wobei D der Durchmesser des Gebietes G ist. Die erhaltene Ungleichung läßt erkennen, daß

$$\left\| \iint\limits_{G\delta} \frac{1}{r_{P+\varDelta P,\,Q}} \left| \frac{\partial^l \varphi}{\partial x^{l_1}\,\partial y^{l_2}} \right| dQ \right\|$$

beliebig klein wird, wenn δ hinreichend klein ist.

Ebenso wird die Norm des dritten Summanden der Ungleichung (3) abgeschätzt. Also gilt

$$\|\psi(P + \varDelta P) - \psi(P)\|_{L_p} \to 0 \qquad \text{für} \qquad \varDelta P \to 0\,.$$

Ähnliche Rechnungen zeigen die gleichmäßige Beschränktheit im Mittel der Funktionen $\psi(P)$. Nach dem Satz von Riesz bilden die Funktionen $\psi(P)$ daher eine kompakte Menge.

Der Satz ist hiermit bewiesen.

Zum Beweis der Vollstetigkeit des Einbettungsoperators genügt es nun, den bewiesenen Satz auf die Gleichung von S. L. Sobolew, die die k-te verallgemeinerte Ableitung durch die l-te bei $k < l$ ausdrückt, anzuwenden.

Wir haben uns auf Funktionen zweier unabhängiger Veränderlicher beschränkt. Der Fall einer größeren Anzahl unabhängiger Veränderlicher und auch komplizierterer Gebiete ist im Buch von S. L. Sobolew behandelt [34].

Wir geben ein Anwendungsbeispiel des Einbettungssatzes auf Gleichungen der mathematischen Physik an.

G sei ein Gebiet der Ebene von der betrachteten Form. Wir zeigen, daß Zahlen λ existieren, für die die Gleichung

$$\Delta\varphi + \lambda\,\varphi = 0$$

innerhalb G eine nichttriviale Lösung besitzt, die der Bedingung

$$\varphi|_\Gamma = 0\,, \qquad \Gamma - \text{Grenze von } G\,,$$

genügt (die Eigenfunktionen des Dirichletschen Problems).

Wir schwächen die zweite Bedingung ab: Anstelle der Gleichung $\varphi|_\Gamma = 0$ fordern wir $\varphi \in \dot{W}_2^{(1)}$. $\dot{W}_2^{(1)}$ ist der Unterraum des Raumes $W_2^{(1)}$, der aus den Funktionen besteht, die im Sinne der Metrik dieses Raumes Grenzwerte von Funktionenfolgen sind, deren Funktionen in einem (i. a. von der Funktion abhängenden) Randstreifen des Gebietes G verschwinden.

Wir untersuchen in $\dot{W}_2^{(1)}(G)$ das Funktional

$$J(\varphi) = \iint\limits_G \left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right\} dx\,dy\,.$$

Dieses Funktional ist nach unten beschränkt, also besitzt es auf den Funktionen $\varphi(x, y) \in \dot{W}_2^{(1)}$ mit

$$\iint\limits_G \varphi^2(x, y)\,dx\,dy = 1$$

eine untere Grenze λ_0. Offenbar ist $\lambda_0 > 0$.

Wir beweisen, daß die untere Grenze des Funktionals J auf einer Funktion $\varphi_0(x, y) \in \dot{W}^{(1)}$ angenommen wird. Es sei $\{\varphi_n(x, y)\} \subset \dot{W}_2^{(1)}$ eine Minimalfolge, d. h., es gelte

$$J(\varphi_n) = \lambda_n \to \lambda_0\,, \qquad \|\varphi_n\|_{L_2} = 1\,. \tag{4}$$

Wegen

$$\|\varphi_n\|^2_{W_2^{(1)}} = \|\varphi_n\|^2_{L_2} + J(\varphi_n) \tag{5}$$

und da $\{J(\varphi_n)\}$ als konvergente Folge beschränkt ist, ist $\{\varphi_n\}$ eine beschränkte Folge des Raumes $W_2^{(1)}$. Auf Grund der Vollstetigkeit des Einbettungsoperators ist $\{\varphi_n\}$ kompakt im Raum L_2. Wir können, indem wir notfalls einige Glieder der Folge weglassen, annehmen, daß die Minimalfolge $\{\varphi_n\}$ im Raum L_2 konvergiert. Deshalb gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl n_0 derart, daß für $n \geqq n_0$

$$\|\varphi_n - \varphi_m\|_{L_2} < \varepsilon$$

ist. Weiter wird

$$\left\|\frac{\varphi_n + \varphi_m}{2}\right\|^2_{L_2} + \left\|\frac{\varphi_n - \varphi_m}{2}\right\|^2_{L_2} = \frac{1}{2}\,\|\varphi_n\|^2_{L_2} + \frac{1}{2}\,\|\varphi_m\|^2_{L_2} = 1\,.$$

Hieraus ergibt sich

$$\left\|\frac{\varphi_n + \varphi_m}{2}\right\|^2_{L_2} = 1 - \left\|\frac{\varphi_n - \varphi_m}{2}\right\|^2_{L_2} > 1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\,, \qquad n \geqq n_0\,.$$

Da

$$\lambda_0 = \inf_{\varphi \in W_2^{(1)},\ \|\varphi\|_{L_2} = 1} J(\varphi)$$

ist, gilt wegen der quadratischen Homogenität von $J(\varphi)$

$$\inf_{\varphi \in W_2^{(1)}} \frac{J(\varphi)}{\|\varphi\|^2_{L_2}} = \inf_{\varphi \in W_2^{(1)},\ \|\varphi\|_{L_2} = 1} J(\varphi) = \lambda_0\,.$$

Also ist

$$J(\varphi) \geqq \lambda_0 ||\varphi||_{L_2}^2$$

und insbesondere

$$J\left(\frac{\varphi_n + \varphi_m}{2}\right) \geqq \lambda_0 \left\|\frac{\varphi_n + \varphi_m}{2}\right\|_{L_2}^2 > \lambda_0 \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right).$$

Wir wählen n und m so groß, daß

$$J(\varphi_n) < \lambda_0 + \varepsilon \quad \text{und} \quad J(\varphi_m) < \lambda_0 + \varepsilon$$

ist. Dann wird

$$J\left(\frac{\varphi_n - \varphi_m}{2}\right) = \frac{1}{2} J(\varphi_n) + \frac{1}{2} J(\varphi_m) - J\left(\frac{\varphi_n + \varphi_m}{2}\right) < \lambda_0 + \varepsilon - \lambda_0 \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right) = \varepsilon \left(1 - \lambda_0 \frac{\varepsilon}{4}\right),$$

d. h. für $n, m \to \infty$ gilt

$$J\left(\frac{\varphi_n - \varphi_m}{2}\right) \to 0 .$$

Danach zeigt Gleichung (5), daß für $n, m \to \infty$ nicht nur

$$||\varphi_n - \varphi_m||_{L_2} \to 0 ,$$

sondern auch

$$||\varphi_n - \varphi_m||_{W_2^{(1)}} \to 0$$

strebt. Auf Grund der Vollständigkeit des Raumes $W_2^{(1)}$ existiert ein $\varphi_0(x, y) \in \dot{W}_2^{(1)}$, das in diesem Raum Grenzwert der Folge $\{\varphi_n\}$ ist.

Offensichtlich ist dann

$$||\varphi_0||_{L_2} = 1 , \qquad \varphi_0(x, y) \in \dot{W}_2^{(1)} .$$

Aus der für alle $\varphi, \psi \in W_2^{(1)}$ gültigen Ungleichung

$$|J(\varphi)^{1/2} - J(\psi)^{1/2}| \leqq [J(\varphi - \psi)]^{1/2}$$

ergibt sich

$$|J(\varphi_n)^{1/2} - J(\varphi_0)^{1/2}| \leqq [J(\varphi_n - \varphi_0)]^{1/2} \leqq ||\varphi_n - \varphi_0||_{W_2^{(1)}} ,$$

d. h.

$$J(\varphi_n) \to J(\varphi_0)$$

für $n \to \infty$. Da andererseits

$$J(\varphi_n) \to \lambda_0$$

gilt, ist

$$J(\varphi_0) = \lambda_0 ,$$

und damit ist die Existenz einer Funktion aus $W_2^{(1)}$ bewiesen, die das Minimum von $J(\varphi)$ unter der Nebenbedingung $||\varphi||_{L_2} = 1$ realisiert.

Wir zeigen nun, daß die Grenzfunktion $\varphi_0(x, y)$ der LAPLACEschen Gleichung genügt.

Dazu sei $\zeta(x, y)$ eine beliebige Funktion aus $W_2^{(1)}$, die in einem Randstreifen des Gebietes G verschwindet. Für alle reellen Werte t erhalten wir

$$\frac{J(\varphi_0 + t\,\zeta)}{||\varphi_0 + t\,\zeta||_{L_2}^2} \geqq \lambda_0$$

und daraus

$$J(\varphi_0) + 2\,t \iint\limits_G \left\{\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right\} d\xi\, d\eta + t^2 J(\zeta)$$

$$\geqq \lambda_0 \left[||\varphi_0||_{L_2}^2 + 2\,t \iint\limits_G \varphi_0(\xi, \eta)\, \zeta(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + t^2\, ||\zeta||_{L_2}^2\right].$$

Unter Berücksichtigung von $J(\varphi_0) = \lambda_0$ und $||\varphi_0||_{L_2} = 1$ ergibt sich

$$2t\left\{\iint\limits_G \left[\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right] d\xi\, d\eta - \lambda_0 \iint\limits_G \varphi_0(\xi,\eta)\,\zeta(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta\right\} + t^2\{J(\zeta) - \lambda_0\, ||\zeta||^2_{L_2}\} \geqq 0 .$$

Hieraus folgt nach den üblichen Überlegungen

$$\iint\limits_G \left[\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right] d\xi\, d\eta - \lambda_0 \iint\limits_G \varphi_0(\xi,\eta)\,\zeta(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta = 0 . \tag{6}$$

Es sei $\psi(t)$ eine den folgenden Bedingungen genügende Funktion:

1. $\psi(t) = 1$ für $0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}$;
2. $\psi(t) = 0$ für $t \geqq 1$;
3. $\psi(t)$ ist monoton fallend auf dem Intervall $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$;
4. $\psi(t)$ besitzt stetige Ableitungen von beliebiger Ordnung auf $[0, \infty)$.

Offenbar existieren solche Funktionen.

Es sei weiter $Y_0(\sqrt{\lambda_0}\, r) = X(r)$ die nullte Bessel-Funktion zweiter Art. Bekanntlich [37] ist

$$\Delta X(r) + \lambda_0 X(r) = 0,$$

und $X(r)$ hat eine logarithmische Singularität bei $r = 0$. Wir setzen

$$\zeta(x, y) = \left[\psi\left(\frac{r}{h_1}\right) - \psi\left(\frac{r}{h_2}\right)\right] X(r) .$$

Für $r \leqq \varrho_1 = \frac{1}{2}\min(h_1, h_2)$ wird

$$\psi\left(\frac{r}{h_1}\right) - \psi\left(\frac{r}{h_2}\right) = 1 - 1 = 0$$

und für $r \geqq \varrho_2 = \max(h_1, h_2)$

$$\psi\left(\frac{r}{h_1}\right) = \psi\left(\frac{r}{h_2}\right) = 0 .$$

Folglich ist $\zeta(x, y)$ innerhalb des Kreises $r = \varrho_1$ und außerhalb des Kreises $r = \varrho_2$ gleich Null. Deshalb ist, wenn ϱ_2 kleiner als der Abstand des Punktes $P(x, y)$ zur Grenze des Gebietes G ist, $\zeta(x, y)$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion, die in einem Randstreifen des Gebietes G verschwindet.

Indem wir diese Funktion in Gleichung (6) einsetzen und die zweite Definition der verallgemeinerten Ableitung benutzen, erhalten wir

$$\iint\limits_G \varphi_0\,(\Delta\zeta + \lambda_0\,\zeta)\, d\xi\, d\eta = 0 . \tag{7}$$

Es sei

$$\Omega_h(r) = \frac{1}{C(h)}\left\{\Delta\left[\psi\left(\frac{r}{h}\right) X(r)\right] + \lambda_0\,\psi\left(\frac{r}{h}\right) X(r)\right\}$$

mit

$$C(h) = \iint\limits_G \left\{\Delta\left[\psi\left(\frac{r}{h}\right) X(r)\right] + \lambda_0\,\psi\left(\frac{r}{h}\right) X(r)\right\} d\xi\, d\eta .$$

Man kann zeigen, daß $C(h)$ für $h \to 0$ gegen einen endlichen Grenzwert C_0 strebt. Aus den Eigenschaften der Funktion $\psi(t)$ folgt

a) $\Omega_h(r) \equiv 0$ für $r \geqq h$ und für $r \leqq \frac{h}{2}$ (da in diesem letzten Fall $\psi\left(\frac{r}{h}\right) \equiv 1$ und

$$\Delta\left[\psi\left(\frac{r}{h}\right) X(r)\right] + \lambda_0 \psi\left(\frac{r}{h}\right) X(r) = \Delta X(r) + \lambda_0 X(r) = 0$$

ist);

b) $\Omega_h(r)$ besitzt stetige Ableitungen sämtlicher Ordnungen.

Wir nehmen $\Omega_h(r)$ als mittelnden Kern. Gleichung (7) kann dann in der Form

$$C(h_1) \iint_G \varphi_0(\xi, \eta)\, \Omega_{h_1}(r)\, d\xi\, d\eta = C(h_2) \iint_G \varphi_0(\xi, \eta)\, \Omega_{h_2}(r)\, d\xi\, d\eta$$

geschrieben werden, und sie führt uns zu der zwischen den gemittelten Funktionen bestehenden Gleichung

$$C(h_1)_{h_1}(\varphi_0) = C(h_2)\,(\varphi_0)_{h_2}$$

oder

$$(\varphi_0)_{h_2} = \frac{C(h_1)}{C(h_2)} (\varphi_0)_{h_1}.$$

Diese zeigt, daß sich zwei verschiedene gemittelte Funktionen nur um einen Zahlenfaktor unterscheiden. Dann unterscheidet sich aber auch der Grenzwert $\varphi_0(x, y)$ der gemittelten Funktionen von diesen nur um einen Zahlenfaktor:

$$\varphi_0(x, y) = \frac{C(h)}{C_0} (\varphi_0(x, y))_h \,.$$

Da die gemittelten Funktionen stetige Ableitungen aller Ordnungen besitzen, hat auch $\varphi_0(x, y)$ stetige Ableitungen aller Ordnungen. Deshalb kann Gleichung (6) in die Form

$$\iint_G (\Delta\varphi_0 + \lambda\, \varphi_0)\, \zeta(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = 0$$

umgeschrieben werden.

Da $\zeta(\xi, \eta)$ eine beliebige, unendlich oft differenzierbare, in einem Grenzstreifen verschwindende Funktion ist, folgt aus einem grundlegenden Hilfssatz der Variationsrechnung, daß innerhalb von G gilt

$$\Delta\varphi_0 + \lambda_0\, \varphi_0 = 0\,.$$

Die Funktion φ_0 gehört der oben definierten Klasse $\dot{W}_2^{(1)}$ an. Man kann zeigen, daß für den Fall zweier unabhängiger Veränderlicher hieraus

$$\varphi_0|_\Gamma = 0$$

folgt.

KAPITEL VII

ELEMENTE DER SPEKTRALTHEORIE SELBSTADJUNGIERTER OPERATOREN IN HILBERT-RÄUMEN

§ 1. Selbstadjungierte Operatoren

Wenn wir lineare Operatoren betrachten, die in einem HILBERT-Raum definiert sind, so kann man wegen der Selbstkonjugiertheit dieses Raumes und der Existenz des Skalarproduktes eine Klasse von Operatoren, die hermiteschen oder selbstadjungierten untersuchen. Diese Operatoren sind für viele Untersuchungen zugänglicher als beliebige lineare Operatoren in BANACH-Räumen. Sie spielen in der Analysis und in der theoretischen Physik eine wichtige Rolle, und über sie existiert eine umfangreiche Literatur.

Der adjungierte Operator. H sei ein HILBERT-Raum und A ein auf H definierter linearer Operator, dessen Wertebereich in H liegt. Wir betrachten ein lineares Funktional

$$f_y(x) = (A\,x, y)\,. \tag{1}$$

$f_y(x)$ hat als lineares Funktional andererseits die Form

$$f_y(x) = (x, y^*)\,,$$

wo $y^* \in H$ durch f_y eindeutig definiert wird. Mit einer Veränderung von y ändert sich offensichtlich auch f_y und dadurch auch y^*, und wir erhalten den Operator

$$y^* = A^*\,y\,,$$

der auf H definiert ist und dort seinen Wertebereich hat. Dieses A^* ist mit A durch

$$(A\,x, y) = (x, A^*\,y) \tag{2}$$

verknüpft und wird als der zu A *adjungierte* Operator bezeichnet. A^* ist, wie leicht ersichtlich, durch (2) eindeutig definiert. Wenn für alle x und y

$$(A\,x, y) = (x, A^*\,y) \quad \text{und} \quad (A\,x, y) = (x, A_1^*\,y)$$

gilt, so muß

$$A^*\,y = A_1^*\,y$$

für alle y sein. Das bedeutet aber, daß

$$A^* = A_1^*$$

ist.

Es ist leicht zu erkennen, daß die hier eingeführte Definition eines adjungierten Operators formal mit der in Kapitel IV für den Fall eines BANACH-Raumes gegebenen Definition übereinstimmt, jedoch haben wir dort einen reellen

BANACH-Raum, während der HILBERT-Raum komplex ist. In den komplexen Räumen bleiben aber alle in Kapitel IV bewiesenen Sätze über adjungierte Operatoren gültig. Insbesondere ist A^* ein beschränkter Operator mit

$$\|A^*\| = \|A\| . \tag{3}$$

Wir bezeichnen den zu A^* adjungierten Operator mit A^{**}.
Nach (2) ist für alle $x, y \in H$

$$(A^* x, y) = \overline{(y, A^* x)} = \overline{(A\, y, x)} = (x, A\, y) .$$

Hieraus folgt $A^{**} = A$ und analog ist $(A^{**})^* = A^{***} = A^*$, $A^{****} = A$ usw. Es ergibt sich leicht

$$(A + B)^* = A^* + B^* ,$$
$$(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^* ,$$
$$(A B)^* = B^* A^* .$$

Selbstadjungierte Operatoren. Ein linearer beschränkter Operator A wird *selbstadjungiert* (oder *hermitesch*) genannt, wenn $A^* = A$ ist.

Beispiele. 1. In einem n-dimensionalen komplexen Raum, den man als endlichdimensionales Analogon des HILBERT-Raumes betrachten kann, lassen sich die linearen Operatoren als Matrizen (a_{ik}) mit komplexen Zahlen a_{ik} auffassen. Der zu (a_{ik}) adjungierte Operator ist $(\bar{a}_{ki})$. Ein selbstadjungierter Operator ist eine hermitesche Matrix, d. h. eine Matrix mit $a_{ik} = \bar{a}_{ki}$.
Ist (a_{ik}) reell, so bedeutet Selbstadjungiertheit Symmetrie.

2. Bei einem FREDHOLMschen Operator in L_2 mit dem Kern $K(s, t)$ hat der adjungierte Operator den Kern $\overline{K(t, s)}$. Die Selbstadjungiertheit ist identisch mit

$$K(s, t) = \overline{K(t, s)} .$$

Im Falle eines reellen Kernes haben wir die Symmetrie.

3. Wir betrachten in $L_2[0, 1]$ den Operator A, der jeder Funktion $x(t) \in L_2[0, 1]$ die Funktion $A\, x = t\, x(t) \in L_2[0, 1]$ zuordnet. Dieser Operator ist selbstadjungiert.

Im weiteren werden wir das Wort „beschränkt" fortlassen. Aus dem vorhergehenden folgt: Ist A selbstadjungiert und λ eine reelle Zahl, so ist auch λA selbstadjungiert, und wenn A und B selbstadjungierte Operatoren sind, so ist $A + B$ auch selbstadjungiert, wogegen AB dann und nur dann ein selbstadjungierter Operator ist, wenn die Operatoren A und B vertauschbar sind. Schließlich verifiziert man leicht, daß A ein selbstadjungierter Operator ist, wenn $A_n \to A$ im Sinne der Normkonvergenz im Raum der Operatoren oder im Sinne der punktweisen Konvergenz gilt und alle A_n selbstadjungierte Operatoren sind.

Wir betrachten $(A\, x, y)$ mit selbstadjungiertem A als Funktional von x und y und schreiben dafür $A(x, y)$. Dann ist

$$A\,(\lambda\, x_1 + \mu\, x_2, y) = \lambda\, A(x_1, y) + \mu\, A(x_2, y) ,$$
$$A(x, y) = \overline{A(y, x)} ,$$

wie leicht zu sehen ist. Ein solches Funktional bezeichnen wir als eine *bilineare hermitesche Form.* Diese Form ist beschränkt, d. h., es ist

$$|A(x, y)| \leqq C_A ||x|| \, ||y|| ,$$

wobei C_A eine Konstante ist ($C_A = ||A||$).

Also erzeugt jeder selbstadjungierte Operator A eine beschränkte bilineare hermitesche Form

$$A(x, y) = A(x, y) = (x, A\, y) .$$

Wenn umgekehrt eine beschränkte bilineare hermitesche Form $A(x, y)$ gegeben ist, so definiert sie einen selbstadjungierten Operator A, der die Gleichung

$$(A\, x, y) = A(x, y) .$$

erfüllt.

Denn halten wir in $A(x, y)$ das y fest, dann bekommen wir ein lineares Funktional von x. Es folgt

$$A(x, y) = (x, y^*) ,$$

wobei y^* eindeutig bestimmt ist. So kommen wir zu einem Operator A, der durch die Gleichung

$$A\, y = y^*$$

derart definiert wird, daß

$$A(x, y) = (x, A\, y)$$

ist.

A ist offenbar ein linearer Operator. Man überzeugt sich sofort von der Beschränktheit von A, denn es ist

$$|(x, A\, y)| = |A(x, y)| \leq C_A ||x|| \, ||y|| .$$

Setzt man $y = A\, x$ und dividiert durch $||A\, x||$, so ist

$$||A\, y|| \leq C_A \, ||y|| .$$

Wir zeigen, daß A ein selbstadjungierter Operator ist. Für alle x und $y \in H$ gilt

$$(x, A\, y) = \overline{A(y, x)} = \overline{(y, A\, x)} = (A\, x, y) .$$

Daraus folgt $A = A^*$ und $A(x, y) = (A\, x, y)$.

Quadratische Formen. In einer bilinearen hermiteschen Form $A(x, y)$ setzen wir $x = y$. Man erhält eine quadratische Form $A(x, x)$, die für alle x reelle Werte annimmt. Es ist

$$A\,(\alpha\, x + \beta\, y, \alpha\, x + \beta\, y) = \alpha\, \bar{\alpha}\, A(x, y) + \alpha\, \bar{\beta}\, A(x, y) = \bar{\alpha}\, \beta\, A(y, x) + \beta\, \bar{\beta}\, A(y, y) .$$

$A(x, x)$ heißt *quadratische hermitesche Form.* Zu jeder bilinearen hermiteschen Form $A(x, y)$ kann man die entsprechende quadratische hermitesche Form $A(x, x)$ bilden. Es gilt auch die Umkehrung. Durch eine quadratische hermite-

sche Form $A(x, x)$ wird die bilineare hermitesche Form $A(x, y)$ eindeutig bestimmt. Sie ist definiert durch die Gleichung

$$A(x, y) = \frac{1}{4}\{[A(x_1, x_1) - A(x_2, x_2)] + i\,[A(x_3, x_3) - A(x_4, x_4)]\}$$

mit

$$x_1 = x + y\,, \quad x_2 = x - y$$

und

$$x_3 = x + i\,y\,, \quad x_4 = x - i\,y\,.$$

Wenn $A(x, x)$ eine beschränkte quadratische hermitesche Form ist, d. h., wenn

$$|A(x, x)| \leqq C_A\,||x||^2$$

gilt, so ist die entsprechende bilineare hermitesche Form ebenfalls beschränkt, wie man leicht sieht. Die Umkehrung ist evident.

Es sei $m = \inf\limits_{||x||=1} (A\,x, x)$ und $M = \sup\limits_{||x||=1} (A\,x, x)$. m und M werden *untere* und *obere Grenze des selbstadjungierten Operators* A genannt.

Wir zeigen: *Es ist*

$$||A|| = \max\{|m|, |M|\} = \sup_{||x||=1} |(A\,x, x)|\,.$$

Denn ist $||x|| = 1$, so gilt

$$|(A\,x, x)| \leqq ||A\,x||\;||x|| \leqq ||A||\;||x||^2 = ||A||$$

und folglich

$$C_A = \sup_{||x||=1} |(A\,x, x)| \leqq ||A||\,. \tag{4}$$

Andererseits haben wir für ein beliebiges $y \in H$

$$(A\,y, y) \leqq C_A\,||y||^2\,.$$

Wenn $z \in H$ und ungleich dem Nullelement ist, so setzen wir

$$\lambda = \left(\frac{||A\,z||}{||z||}\right)^{1/2} \quad \text{und} \quad u = \frac{1}{\lambda}A\,z\,.$$

Wir finden

$$\begin{aligned}||A\,z||^2 &= (A\,(\lambda\,z), u) = \frac{1}{4}\{(A\,(\lambda\,z + u), \lambda\,z + u) - (A\,(\lambda\,z - u), \lambda\,z - u)\}\\ &\leqq \frac{1}{4}\,C_A\,\{||\lambda\,z + u||^2 + ||\lambda\,z - u||^2\} = \frac{1}{2}\,C_A\,\{||\lambda\,z||^2 + ||u||^2\}\\ &= \frac{1}{2}\,C_A\left\{\lambda^2\,||z||^2 + \frac{1}{\lambda^2}\,||A\,z||^2\right\} = C_A\,||z||\;||A\,z||\,.\end{aligned}$$

Also ist

$$||A\,z|| \leqq C_A\,||z||$$

und folglich

$$||A|| \leqq C_A = \sup_{||x||=1} |(A\,x, x)|\,. \tag{5}$$

Aus den Ungleichungen (4) und (5) erhält man die behauptete Gleichung.

Aus dem Bewiesenen folgt insbesondere, daß $A = B$ ist, wenn die selbstadjungierten Operatoren A und B für alle $x \in H$ die Gleichung

$$(A\,x, x) = (B\,x, x)$$

erfüllen.

§ 2. Unitäre Operatoren, Projektionsoperatoren

Wir untersuchen hier zwei spezielle Klassen von Operatoren im Hilbert-Raum.

Ein linearer Operator U heißt *unitär*, wenn er den Raum H auf ganz H unter Erhaltung der Norm abbildet, d. h. wenn

$$||U\,x|| = ||x|| \tag{1}$$

ist.

Diese Abbildung ist umkehrbar eindeutig, denn aus

$$U\,x_1 = U\,x_2\,,$$

d. h.

$$U\,(x_1 - x_2) = 0\,,$$

folgt

$$||x_1 - x_2|| = ||U\,(x_1 - x_2)|| = 0$$

und $x_1 = x_2$. Deshalb existiert der inverse Operator U^{-1}, der offensichtlich auch unitär ist.

Weiter führt Gleichung (1) auf

$$(U\,x, U\,x) = ||U\,x||^2 = ||x||^2 = (x, x)$$

und

$$(U^*\,U\,x, x) = (x, x) = (E\,x, x)\,,$$

wobei mit E hier und im weiteren in diesem Kapitel der Einheitsoperator gemeint ist. Da die quadratischen Formen der Operatoren $U^*\,U$ und E gleich sind, stimmen diese Operatoren überein[1]):

$$U^*\,U = E\,. \tag{2}$$

Durch Multiplikation von links mit U und von rechts mit U^{-1} entsteht

$$U\,U^* = E\,. \tag{3}$$

Hieraus erhalten wir $U^* = U^{-1}$. Aus (2) folgt

$$(U\,x, U\,y) = (x, y)\,.$$

Umgekehrt ergeben die Bedingungen (2) und (3), daß U ein unitärer Operator ist, da aus ihnen die Existenz von $U^{-1} = U^*$ und damit die umkehrbare Ein-

[1]) Für jeden linearen Operator A ist der Operator $A^*\,A$ selbstadjungiert.

deutigkeit der Abbildung von H auf H sowie

$$||U x||^2 = (U x, U x) = (U^* U x, x) = (x, x) = ||x||^2$$

folgt, d. h., U verändert die Norm eines Elementes nicht.

Ein Beispiel für einen unitären Operator im HILBERT-Raum l_2 ist eine unendliche *unitäre Matrix* (u_{ij}), d. h. eine solche, deren Elemente den Beziehungen

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{ki} \bar{u}_{kj} = \delta_{ij}, \quad \sum_{l=1}^{\infty} u_{il} \bar{u}_{jl} = \delta_{ij} \tag{4}$$

genügen.

Es seien ein im HILBERT-Raum wirkender linearer Operator A und ein unitärer Operator U gegeben. Der Operator

$$B = U A U^{-1} = U A U^* \tag{5}$$

heißt unitär äquivalent zum Operator A. Aus Gleichung (5) geht hervor, daß ein zu einem selbstadjungierten Operator *unitär äquivalenter* Operator ebenfalls selbstadjungiert ist.

Man verifiziert leicht, daß die Normen einander unitär äquivalenter Operatoren gleich sind.

Wir führen jetzt den für das Weitere wichtigen Begriff des Projektionsoperators ein.

Es sei L ein Unterraum von H. Dann ist jedes $x \in H$ eindeutig in der Form

$$x = y + z$$

mit $y \in L$ und $z \perp L$ darstellbar. Man setzt $P x = y$ und erhält einen Operator, der auf ganz H definiert und dessen Wertebereich der Unterraum L ist. Dieser Operator wird *Projektionsoperator* oder Operator der orthogonalen Projektion auf den Unterraum L genannt und mit P_L bezeichnet. Wir beweisen:

P_L ist ein selbstadjungierter Operator mit $||P_L|| = 1$, und es gilt $P_L^2 = P_L$.

P_L ist ein linearer Operator. Denn für

$$x_1 = y_1 + z_1 \quad \text{und} \quad x_2 = y_2 + z_2$$

mit $y_1, y_2 \in L$ und $z_1, z_2 \perp L$ ist

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = (\alpha y_1 + \beta y_2) + (\alpha z_1 + \beta z_2)$$

mit

$$\alpha y_1 + \beta y_2 \in L, \quad \alpha z_1 + \beta z_2 \perp L.$$

Daraus folgt

$$P(\alpha x_1 + \beta y_2) = \alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha P x_1 + \beta P x_2.$$

Wegen der Orthogonalität von y und z ist ferner

$$||x||^2 = ||y + z||^2 = (y + z, y + z) = (y, y) + (z, z) = ||y||^2 + ||z||^2.$$

Folglich ist

$$||y|| \leqq ||x||,$$

d. h.

$$\|P_L x\| \leqq \|x\|$$

für jedes x. Es ist also $\|P_L\| \leqq 1$.

Für $x \in L$ folgt aus $P_L x = x$ die Beziehung $\|P_L x\| = \|x\|$, also ist

$$\|P_L\| = 1 .$$

Wir zeigen, daß P_L selbstadjungiert ist. Es seien $x_1, x_2 \in H$ und y_1, y_2 ihre Projektionen auf L. Man hat

$$(P_L x_1, x_2) = (y_1, x_2) = (y_1, y_2)$$

und ebenso

$$(x_1, P_L x_2) = (x_1, y_2) = (y_1, y_2) .$$

Es folgt

$$(P_L x_1, x_2) = (x_1, P_L x_2) .$$

Da für alle $x \in H$ auch $P_L x \in L$ ist, folgt $P_L^2 x = P_L (P_L x) = P_L x$ für jedes $x \in H$, d. h., es ist

$$P_L^2 = P_L .$$

Wir zeigen jetzt die Umkehrung:

Jeder selbstadjungierte Operator P mit $P^2 = P$ ist ein Projektionsoperator auf einen Unterraum L.

Wir betrachten die Menge L_P von Elementen der Form $y = P x$, wo x ganz H durchläuft. L_P ist wegen der Additivität und der Homogenität von P eine lineare Mannigfaltigkeit. Es ist leicht zu zeigen, daß L_P abgeschlossen ist. Geht nämlich $y_n \to y$ mit $y_n \in L_P$, so ist $y_n = P x_n$ mit $x_n \in H$ und folglich $P y_n = P^2 x_n = P x_n = y_n$. Aus $y_n \to y$ folgt wegen der Stetigkeit von P die Konvergenz von $P y_n \to P y$. Da aber $P y_n = y_n$ ist, strebt $y_n \to P y$, und es ist $y = P y$, d. h. $y \in L_P$. Es ist schließlich $x - P x \perp P x$ auf Grund der Selbstadjungiertheit von P und wegen $P^2 = P$, denn es ist

$$(x - P x, P x) = (P x - P^2 x, x) = 0 .$$

Nun folgt aus der Definition von L_P, daß P Projektionsoperator in diesen Unterraum ist, was zu beweisen war.

L_P besteht aus genau den Punkten $x \in H$, für die $P x = x$ ist.

Insbesondere folgt, daß neben P auch $I - P$ ein Projektionsoperator ist.

Wir weisen noch auf einige einfache Eigenschaften der Projektionsoperatoren hin. Zwei Projektionsoperatoren P_1, P_2 werden *orthogonal* genannt, wenn $P_1 P_2 = O$ ist[1]). Dies ist mit $P_2 P_1 = O$ gleichwertig, denn ist $P_1 P_2 = O$, so ist auch $(P_1 P_2)^* = P_2^* P_1^* = P_2 P_1 = O$ und umgekehrt.

Die Projektionsoperatoren P_1 und P_2 sind orthogonal genau dann, wenn die entsprechenden Unterräume L_1 und L_2 orthogonal sind.

[1]) Hier und im folgenden bedeutet 0 nicht nur die Zahl 0, sondern auch den Nulloperator.

Wenn $P_1 P_2 = O$ ist, so ist für $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$

$$(x_1, x_2) = (P_1 x_1, P_2 x_2) = (P_2 P_1 x_1, x_2) = (0, x_2) = 0 .$$

Es sei $L_1 \perp L_2$, dann folgt für alle $x \in H$ $P_2 x \in L_2$ und somit $P_1 P_2 x = 0$, d. h., es ist $P_1 P_2 = O$.

Lemma 1. *Die Summe zweier Projektionsoperatoren P_{L_1}, P_{L_2} ist ein Projektionsoperator dann und nur dann, wenn diese Operatoren orthogonal sind. Wenn $P_{L_1} P_{L_2} = O$ ist, so gilt*

$$P_{L_1} + P_{L_2} = P_{L_1 \dotplus L_2} .$$

Notwendigkeit. Es sei

$$P = P_{L_1} + P_{L_2}$$

ein Projektionsoperator. Dann ist

$$(P_{L_1} + P_{L_2})^2 = P_{L_1} + P_{L_2} ,$$

woraus

$$P_{L_1} P_{L_2} + P_{L_2} P_{L_1} = O$$

folgt. Wir multiplizieren von links mit P_{L_1} und erhalten

$$P_{L_1} P_{L_2} + P_{L_1} P_{L_2} P_{L_1} = O .$$

Multipliziert man jetzt von rechts mit P_{L_1}, so ist

$$P_{L_1} P_{L_2} P_{L_1} = O .$$

Wegen der vorhergehenden Gleichung ist aber $P_{L_1} P_{L_2} = O$ und folglich auch $P_{L_2} P_{L_1} = O$.

Hinlänglichkeit. Es sei

$$P_{L_1} P_{L_2} = P_{L_2} P_{L_1} = O .$$

Dann ist

$$(P_{L_1} + P_{L_2})^2 = P_{L_1} + P_{L_2} .$$

Folglich ist $P_{L_1} + P_{L_2}$ ein Projektionsoperator.

Nach der Voraussetzung $P_{L_1} P_{L_2} = O$ sind die Unterräume L_1 und L_2 orthogonal. Wenn $x \in H$ ist, so wird

$$P x = P_{L_1} x + P_{L_2} x = x_1 + x_2 \subset L_1 \dotplus L_2 . \tag{6}$$

Ist umgekehrt $x = x_1 + x_2 \in L_1 \dotplus L_2$, so gilt auf Grund von $P_{L_1} x_2 = 0$ und $P_{L_2} x_1 = 0$:

$$\begin{aligned} x = x_1 + x_2 &= P_{L_1} x_1 + P_{L_2} x_2 \\ &= P_{L_1}(x_1 + x_2) + P_{L_2}(x_1 + x_2) = (P_{L_1} + P_{L_2})\, x . \end{aligned} \tag{7}$$

Aus (6) und (7) folgt, daß P der Projektionsoperator auf $L_1 \dotplus L_2$ ist. Damit ist das Lemma bewiesen.

Lemma 2. *Das Produkt zweier Projektionsoperatoren P_{L_1}, P_{L_2} ist ein Projektionsoperator dann und nur dann, wenn P_{L_1} und P_{L_2} vertauschbar sind. Ist diese Bedingung erfüllt, so gilt $P_{L_1} P_{L_2} = P_{L_1 \cap L_2}$.*

Notwendigkeit. Da $P = P_{L_1} P_{L_2}$ selbstadjungiert ist, wird

$$P_{L_1} P_{L_2} = (P_{L_1} P_{L_2})^* = P_{L_2}^* P_{L_1}^* = P_{L_2} P_{L_1},$$

und die Vertauschbarkeit ist bewiesen.

Hinlänglichkeit. Wenn $P_{L_1} P_{L_2} = P_{L_2} P_{L_1}$ ist, so ist $P = P_{L_1} P_{L_2}$ selbstadjungiert. Außerdem wird

$$(P_{L_1} P_{L_2})^2 = P_{L_1} P_{L_2} P_{L_1} P_{L_2} = P_{L_1}^2 P_{L_2}^2 = P_{L_1} P_{L_2},$$

und folglich ist P ein Projektionsoperator.

Es sei $x \in H$ beliebig. Dann liegt

$$P x = P_{L_1} P_{L_2} x = P_{L_2} P_{L_1} x$$

in L_1 und L_2, d. h. in $L_1 \cap L_2$. Es sei jetzt $y \in L_1 \cap L_2$. Dann ist

$$P y = P_{L_1} (P_{L_2} y) = P_{L_1} y = y .$$

Also ist P der Projektionsoperator auf $L_1 \cap L_2$, und das Lemma ist bewiesen.

Der Projektionsoperator P_2 wird *Teil des Projektionsoperators* P_1 genannt, wenn $P_1 P_2 = P_2$ ist. Wenn man zu den adjungierten Operatoren übergeht, so überzeugt man sich davon, daß diese Definition mit $P_2 P_1 = P_2$ äquivalent ist. Aus der Definition folgt unmittelbar, daß P_{L_2} Teil von P_{L_1} dann und nur dann ist, wenn L_2 Teilraum von L_1 ist.

Ein Projektionsoperator P_{L_2} ist Teil eines Projektionsoperators P_{L_1} genau dann, wenn für alle $x \in H$ die Ungleichung $||P_{L_2} x|| \leqq ||P_{L_1} x||$ erfüllt ist.

Aus $P_{L_2} x$ folgt $P_{L_2} P_{L_1} x = ||P_{L_1} x|| = ||P_{L_1} x|| \, ||P_{L_2} x|| \leqq ||P_{L_2}||$.

Ist umgekehrt diese Bedingung erfüllt, so gilt für alle $x \in L_2$

$$||P_{L_1} x|| \geqq ||P_{L_2} x|| = ||x|| .$$

Wegen

$$||P_{L_1} x|| \leqq ||x||$$

folgt

$$||P_{L_1} x|| = ||x|| .$$

Somit ist

$$||P_{H \dot{-} L_1} x||^2 = ||x||^2 - ||P_{L_1} x||^2 = 0$$

und $x \in L_1$. Daher ist für alle $x \in H$ auch $P_{L_2} x \in L_1$, und das bedeutet $P_{L_1} P_{L_2} x = P_{L_2} x$, d. h., es ist $P_{L1} P_{L2} = P_{L2}$, was zu beweisen war.

Lemma 3. *Die Differenz* $P_1 - P_2$ *zweier Projektionsoperatoren ist ein Projektionsoperator dann und nur dann, wenn* P_2 *Teil von* P_1 *ist. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so ist* $L_{P_1 - P_2}$ *die orthogonale Ergänzung zu* L_{P_2} *in* L_{P_1}.

Notwendigkeit. Wenn $P_1 - P_2$ ein Projektionsoperator ist, so wird

$$E - (P_1 - P_2) = (E - P_1) + P_2$$

ebenfalls ein Projektionsoperator. Dann hat man nach Lemma 1

$$(E - P_1) P_2 = 0 ,$$

d. h. $P_1 P_2 = P_2$.

Hinlänglichkeit. P_2 sei Teil von P_1. Dann ist $E - P_1$ zu P_2 orthogonal, und nach Lemma 1 ist $(E - P_1) + P_2$ ein Projektionsoperator und folglich auch $P_1 - P_2$.

Aus der Voraussetzung $P_1 P_2 = P_2$ folgt schließlich, daß $P_1 - P_2$ und P_2 orthogonal sind. Dann ist aber wiederum wegen Lemma 1

$$L_{P_1} = L_{P_1 - P_2} \dot{+} L_{P_2},$$

was zu beweisen war.

§ 3. Positive Operatoren. Die Quadratwurzel eines positiven Operators

Ein selbstadjungierter Operator A heißt *positiv*, $A > 0$, wenn er von Null verschieden und seine untere Grenze nicht negativ ist, d. h. wenn für jedes $x \in H$

$$(A x, x) \geqq 0$$

gilt und für mindestens ein $x \in H$ $(A x, x) > 0$ ist. Ein selbstadjungierter Operator A heißt *größer* als ein *selbstadjungierter* Operator B, $A > B$, wenn $A - B > 0$ ist. In diesem Fall spricht man auch davon, daß der Operator B kleiner als der Operator A ist. Die in die Menge der selbstadjungierten Operatoren eingeführte Ungleichheitsrelation besitzt folgende Eigenschaften[1]):

1. Aus $A \geqq B$ und $C \geqq D$ folgt $A + C \geqq B + D$,
2. aus $A \geqq 0$ und $\alpha \geqq 0$ folgt $\alpha A \geqq 0$,
3. aus $A \geqq B$ und $B \geqq C$ folgt $A \geqq C$,
4. ist $A > 0$ und existiert A^{-1}, so ist $A^{-1} > 0$.

Weiter sind für jeden linearen, von Null verschiedenen Operator AA^* und A^*A positive Operatoren. Insbesondere ist $A^2 > 0$ für jeden selbstadjungierten Operator A, $A \neq 0$. Aus dem letzten folgt, daß als Beispiel für einen positiven Operator ein Projektionsoperator auf einen Teilraum mit positiver Dimension dienen kann.

Satz 1. *Das Produkt zweier positiver selbstadjungierter vertauschbarer Operatoren A und B ist positiv.*

Beweis. Wir setzen

$$A_1 = \frac{A}{\|A\|}, \quad A_2 = A_1 - A_1^2, \ldots, A_{n+1} = A_n - A_n^2, \ldots$$

und zeigen, daß für jedes n

$$0 \leqq A_n \leqq E \tag{1}$$

gilt. Für $n = 1$ ist das offensichtlich. (1) sei für $n = k$ richtig. Dann ist

$$\big(A_k^2 (E - A_k x), x\big) = \big((E - A_k) A_k x, A_k x\big) \leqq 0,$$

d. h., es ist

$$A_k^2 (E - A_k) \geqq 0$$

---

[1]) Die Ungleichung $A \geqq B$ bedeutet entweder $A > B$ oder $A = B$.

und analog

$$A_k (E - A_k)^2 \geqq 0 .$$

Daher ist

$$A_{k+1} = A_k^2 (E - A_k) + A_k (E - A_k)^2 \geqq 0$$

und

$$E - A_{k+1} = (E - A_k) + A_k^2 \geqq 0 .$$

Somit ist (1) für $n = k + 1$ richtig.

Wir haben ferner

$$A_1 = A_1^2 + A_2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3 = \cdots = A_1^2 + A_2^2 + \cdots + A_n^2 + A_{n+1} ,$$

woraus

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^2 = A_1 - A_{n+1} \leqq A_1$$

wegen $A_{n+1} \geqq 0$ folgt. Daher ist

$$\sum_{k=1}^{n} (A_k x, A_k x) \leqq (A_1 x, x) .$$

Folglich konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} ||A_k x||^2 ,$$

und daher geht $||A_k x|| \to 0$. Deshalb strebt

$$\left(\sum_{k=1}^{n} A_k^2\right) x = A_1 x - A_{n+1} x \to A_1 x .$$

Wir erhalten, da B offensichtlich mit allen A_k vertauschbar ist,

$$(A B x, x) = ||A|| (B A_1 x, x) = ||A|| \lim_n \sum_{k=1}^{n} (B A_k^2 x, x)$$

$$= ||A|| \lim_n \sum_{k=1}^{n} (B A_k x, A_k x) \geqq 0 .$$

Der Satz ist damit bewiesen.

Aus dem Beweis folgt:

Wenn $\{A_n\}$ eine Folge von selbstadjungierten untereinander vertauschbaren Operatoren ist, wenn für alle n $A_n B = B A_n$ ist und

$$A_1 \leqq A_2 \leqq \cdots \leqq A_n \leqq \cdots \leqq B$$

gilt, so konvergieren die A_n gegen A, und es ist $A \leqq B$. (Eine analoge Behauptung gilt für monoton fallende Folgen.)

Wir betrachten die selbstadjungierten Operatoren $C_n = B - A_n$. Diese sind positiv, vertauschbar und bilden eine monoton fallende Folge. Daher sind für $m < n$ auch die Operatoren

$$(C_m - C_n) C_m \qquad \text{und} \qquad C_n (C_m - C_n)$$

positiv, woraus

$$(C_m^2 x, x) \geqq (C_m C_n x, x) \geqq (C_n^2 x, x)$$

folgt.

Die monoton fallende nicht negative Zahlenfolge $\{(C_n^2 x, x)\}$ besitzt einen Limes. Gegen denselben Grenzwert strebt für $n, m \to \infty$ auf Grund der letzten Ungleichungen auch die Folge $\{(C_m C_n x, x)\}$. Daher geht für $n, m \to \infty$

$$\|C_m x - C_n x\|^2 = ((C_m - C_n)^2 x, x) = (C_m^2 x, x) - 2(C_m C_n x, x) + (C_n^2 x, x) \to 0 \,.$$

Also konvergiert die Folge $\{C_n x\}$ und somit auch $\{A_n x\}$ für beliebige x gegen einen Grenzwert; wir bezeichnen den letzten mit $A x : A x = \lim_n A_n x$. Offensichtlich ist A ein selbstadjungierter Operator, der die Ungleichung $A \leqq B$ erfüllt, was zu beweisen war.

Ein selbstadjungierter Operator B wird *Quadratwurzel* des positiven Operators A genannt, wenn $B^2 = A$ ist. Wir beweisen den

Satz 2. *Die positive Quadratwurzel B aus einem beliebigen positiven selbstadjungierten Operator A existiert und ist eindeutig. Sie ist mit jedem Operator vertauschbar, mit dem A vertauschbar ist.*

Beweis. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit $A \leqq E$ annehmen und setzen $B_0 = O$ und

$$B_{n+1} = B_n + \frac{1}{2}(A - B_n^2)\,, \qquad n = 0, 1, \ldots \,. \tag{2}$$

Alle B_n sind selbstadjungiert, positiv und mit jedem Operator vertauschbar, mit dem A vertauschbar ist. Insbesondere ist $B_n B_m = B_m B_n$. Man überzeugt sich sofort von der Gültigkeit der Gleichungen

$$E - B_{n+1} = \frac{1}{2}(E - B_n)^2 + \frac{1}{2}(E - A) \tag{3}$$

und

$$B_{n+1} - B_n = \frac{1}{2}[(E - B_{n-1}) + (E - B_n)](B_n - B_{n-1})\,. \tag{4}$$

Aus (3) folgt $B_n \leqq E$ für alle n. Man verifiziert leicht, daß $B_n \leqq B_{n+1}$ ist. Für $n = 0$ ist dies wegen der Ungleichung

$$B_1 = \frac{1}{2} A \geqq O = B_0$$

evident. Die Gleichung (4) zeigt ferner, daß $B_{n+1} - B_n \geqq O$ ist, falls $B_n - B_{n-1} \geqq O$. Folglich ist $B_n \leqq B_{n+1}$ für alle n. Wir haben auf diese Weise eine beschränkte monoton wachsende Folge $\{B_n\}$ von selbstadjungierten positiven Operatoren erhalten.

Diese Folge konvergiert nach den vorhergehenden Ausführungen gegen einen selbstadjungierten positiven Operator B.

(1) ergibt nach dem Grenzübergang

$$B = B + \frac{1}{2}(A - B^2)\,,$$

d. h.

$$B^2 = A .$$

Die Existenz einer positiven Quadratwurzel B aus dem Operator A ist bewiesen. Schließlich ist B mit jedem Operator vertauschbar, der mit A vertauschbar ist, weil die B_n diese Eigenschaft besitzen.

B_1 sei eine andere positive Quadratwurzel aus A, die mit A vertauschbar ist. Dann ist $B_1 B = B B_1$. Wenn $x \in H$ und $y = (B - B_1)\, x$ ist, erhalten wir daher

$$\begin{aligned}(B\,y, y) + (B_1\, y, y) &= \big((B + B_1)\, y, y\big) \\ &= \big((B + B_1)(B - B_1)\, x, y\big) = \big((B^2 - B_1^2)\, x, y\big) = 0 .\end{aligned}$$

Da B und B_1 positiv sind, folgt $(B\,y, y) = (B_1\, y, y) = 0$. Weil aber Wurzeln positiv sind, gilt $B = C^2$, wobei C ein selbstadjungierter Operator ist.

Es ist nun $\|C\,y\|^2 = (C^2\, y, y) = (B\,y, y) = 0$, also $C\,y = 0$. Folglich ist auch $B\,y = C\;(C\,y) = 0$, und analog gilt $B_1\, y = 0$. Dann wird aber

$$\|B_1\, x - B\, x\|^2 = \big((B - B_1)^2\, x, x\big) = \big((B - B_1)\, y, x\big) = 0 ,$$

d. h., für beliebiges $x \in H$ ist

$$B\, x = B_1\, x ,$$

und die Eindeutigkeit der Quadratwurzel ist bewiesen.

Beispiel. In $L_2\,[0, 1]$ hat der durch

$$A\, f(x) = t\, f(x)$$

definierte Operator die Quadratwurzel B aus

$$B\, f(x) = \sqrt{t}\, f(x) .$$

§ 4. Das Spektrum eines selbstadjungierten Operators

Wir untersuchen eine Operatorenschar $A_\lambda = A - \lambda\, E$, in der A ein selbstadjungierter Operator und λ eine komplexe Zahl ist.

Aus Satz 2, § 5, Kapitel III, folgt: Ist $\left\|\frac{1}{\lambda} A\right\| < 1$ (d. h. $|\lambda| > \|A\|$), so ist λ ein regulärer Wert des Operators A, folglich fällt das gesamte Spektrum von A ins Innere oder auf den Rand des Kreises $|\lambda| \leqq \|A\|$. Das gilt für jeden linearen, in einem BANACH-Raum wirkenden Operator. Im folgenden machen wir für den Fall eines selbstadjungierten Operators im HILBERT-Raum genauere Aussagen über das Gebiet, in dem das Spektrum des Operators liegt.

Für einen selbstadjungierten Operator A sind alle Eigenwerte reell. Aus

$$A\, x = \lambda\, x$$

erhalten wir nämlich die Gleichung

$$(A\, x, x) = \lambda (x, x) ,$$

in der beide Skalarprodukte $(A\,x, x)$ und (x, x) reell sind. Weiter folgt aus der Voraussetzung $A = A^*$, aus der Reellwertigkeit der Eigenwerte und Satz 2, § 3, Kapitel IV, daß verschiedenen Eigenwerten eines selbstadjungierten Operators entsprechende Eigenelemente orthogonal sind.

Satz 1. *Eine Zahl λ ist genau dann ein regulärer Wert eines selbstadjungierten Operators A, wenn eine positive Konstante c existiert, so daß für jedes $x \in H$*

$$||A_\lambda x|| = ||A\,x - \lambda\,x|| \geqq c\,||x|| \tag{1}$$

erfüllt ist.

Notwendigkeit. Es möge ein beschränkter Operator $R_\lambda = A_\lambda^{-1}$, $||R_\lambda|| = d$, existieren.

Für jedes $x \in H$ gilt

$$||x|| = ||R_\lambda\,A_\lambda\,x|| \leqq d\,||A_\lambda\,x||$$

und

$$||A_\lambda\,x|| \geqq \frac{1}{d}\,||x||\,.$$

Hinlänglichkeit. Es sei

$$y = A\,x - \lambda\,x\,,$$

und x durchlaufe den Raum H. Dann durchläuft y eine lineare Mannigfaltigkeit L. Vermöge (1) ist die Beziehung zwischen x und y umkehrbar eindeutig, denn wenn x_1 und x_2 in dasselbe Element y übergehen, so ist

$$A\,(x_1 - x_2) - \lambda\,(x_1 - x_2) = 0$$

und

$$||x_1 - x_2|| \leqq \frac{1}{c}\,||A_\lambda\,(x_1 - x_2)|| = 0\,.$$

L ist überall dicht in H. Andernfalls existiert ein von Null verschiedenes Element $x_0 \in H$ mit $(x_0, y) = 0$ für jedes $y \in L$. Das bedeutet

$$(x_0, A\,x - \lambda\,x) = 0$$

und wegen der Selbstadjungiertheit von A

$$(A\,x_0 - \bar{\lambda}\,x_0, x) = 0$$

und, da das für jedes $x \in H$ der Fall ist,

$$A\,x_0 - \bar{\lambda}\,x_0 = 0\,.$$

Diese Gleichung ist aber bei einem von Null verschiedenen x_0 weder bei komplexem λ (dann hätte ein selbstadjungierter Operator komplexe Eigenwerte) noch bei reellem λ möglich $\left(\text{dann wäre } \bar{\lambda} = \lambda \text{ und } ||x_0|| \leqq \frac{1}{c}\,||A\,x_0 - \lambda\,x_0|| = 0\right)$.

L ist abgeschlossen. Für $\{y_n\} \subset L$, $y_n = A_\lambda\,x_n$ und $y_n \to y_0$ ist wegen (1)

$$||x_n - x_m|| \leqq \frac{1}{c}\,||A_\lambda\,x_n - A_\lambda\,x_m|| = \frac{1}{c}\,||y_n - y_m||\,.$$

Die Folge $\{y_n\}$ konvergiert in sich, und deswegen strebt für $n, m \to +\infty$ $||y_n - y_m|| \to 0$. Dann aber konvergiert $||x_n - x_m|| \to 0$ für $n, m \to \infty$. Aus der Vollständigkeit von H folgt die Existenz des Grenzwertes der Folge $\{x_n\}$:

$$x = \lim_n x_n .$$

Dabei wird

$$A_\lambda x = \lim_n A_\lambda x_n = \lim_n y_n = y ,$$

d. h. $y \in L$.

Somit ist L eine abgeschlossene, in H überall dichte Mannigfaltigkeit, d. h., es ist $L = H$. Es existiert der auf ganz H definierte inverse Operator

$$x = A_\lambda^{-1} y = R_\lambda y ,$$

denn die Beziehung

$$y = A_\lambda x$$

ist umkehrbar eindeutig. Die Ungleichung (1) ergibt

$$||R_\lambda y|| = ||x|| \leqq \frac{1}{c} ||A_\lambda x|| = \frac{1}{c} ||y|| ,$$

d. h., R_λ ist ein beschränkter Operator, und es gilt

$$||R_\lambda|| \leqq \frac{1}{c} .$$

Folgerung. *λ liegt im Spektrum eines selbstadjungierten Operators A dann und nur dann, wenn eine Folge $\{x_n\}$ existiert, so daß*

$$||A x_n - \lambda x_n|| \leqq C_n ||x_n|| \text{ ist und } C_n \to 0 \text{ geht.} \tag{2}$$

In (2) kann man $||x_n|| = 1$ setzen. Dann erhält man:

Es konvergiert

$$||A x_n - \lambda x_n|| \to 0 , \quad \text{falls} \quad ||x_n|| = 1 \quad \text{ist.} \tag{3}$$

Satz 2. *Die komplexen Zahlen $\lambda = \alpha + \beta i$ mit $\beta \neq 0$ sind reguläre Werte des selbstadjungierten Operators A.*

Wenn

$$y = A_\lambda x = A x - \lambda x$$

ist, so gilt

$$(y, x) = (A x, x) - \lambda(x, x) ,$$

$$(x, y) = \overline{(y, x)} = (A x, x) - \bar{\lambda}(x, x) .$$

Hieraus folgt

$$(x, y) - (y, x) = (\lambda - \bar{\lambda}) (x, x) = 2 \beta i ||x||^2$$

oder

$$2 |\beta| ||x||^2 = |(x, y) - (y, x)| \leqq |(x, y)| + |(y, x)| \leqq 2 ||y|| ||x||$$

und somit

$$||y|| \geqq |\beta| ||x|| \quad \text{bzw.} \quad ||A_\lambda x|| \geqq |\beta| ||x|| . \tag{4}$$

Aus Satz 1 und (4) folgt die Behauptung.

Satz 3. *Das Spektrum eines selbstadjungierten Operators A liegt ganz in dem Intervall $[m, M]$ der reellen Achse, wo $M = \sup\limits_{||x||=1} (A\,x, x)$ und $m = \inf\limits_{||x||=1} (A\,x, x)$ ist.*

Aus den letzten Sätzen folgt, daß das Spektrum nur auf der reellen Achse liegen kann. Wir zeigen, daß die reellen λ, die im Äußeren von $[m, M]$ liegen, regulär sind.

Es sei z. B. $\lambda > M$, also $\lambda = M + d$ mit $d > 0$. Man hat

$$(A_\lambda\, x, x) = (A\,x, x) - \lambda(x, x) \leqq M(x, x) - \lambda(x, x) = -\,d\,||x||^2\,,$$

hieraus folgt

$$|(A_\lambda\, x, x)| \geqq d\,||x||^2\,.$$

Andererseits ist aber

$$|(A_\lambda\, x, x)| \leqq ||A_\lambda\, x||\;||x||\,.$$

Folglich ist auch

$$||A_\lambda\, x|| \geqq d\,||x||\,,$$

womit die Regularität von λ bewiesen ist. Analog wird der Fall $\lambda < m$ behandelt.

Satz 4. *M und m sind Punkte des Spektrums.*

Wir beweisen dies etwa für M.

Bemerkung. Ersetzt man A durch A_λ, so verschiebt sich das Spektrum um λ nach links, und m und M gehen über in $m - \lambda$ und $M - \lambda$. Also können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $M \geqq m \geqq 0$ annehmen. Dann ist $M = ||A||$ (siehe S. 214). Wir beweisen, daß M ein Punkt des Spektrums ist.

Es existiert nach Definition von M eine Folge $\{x_n\}$ mit $||x_n|| = 1$, so daß

$$(A\,x_n, x_n) = M - \delta_n \qquad \text{mit} \qquad \delta_n \geqq 0 \quad \text{ist und} \quad \delta_n \to 0 \quad \text{geht.}$$

Ferner ist

$$||A\,x_n|| \leqq ||A||\;||x_n|| = ||A|| = M\,.$$

Deshalb gilt

$$\begin{aligned} ||A\,x_n - M\,x_n||^2 &= (A\,x_n - M\,x_n, A\,x_n - M\,x_n) \\ &= ||A\,x_n||^2 - 2\,M\,(A\,x_n, x_n) + M^2\,||x_n||^2 \\ &\leqq M^2 - 2\,M\,(M - \delta_n) + M^2 = 2\,M\,\delta_n \end{aligned}$$

oder

$$||A\,x_n - M\,x_n|| \leqq \sqrt{2\,M\,\delta_n}\,.$$

Somit gilt

$$||A\,x_n - M\,x_n|| \to 0\,, \qquad ||x_n|| = 1\,,$$

woraus sich mit der Folgerung von Satz 1 ergibt, daß M zum Spektrum gehört.

Folgerung. *Jeder selbstadjungierte Operator hat ein nichtleeres Spektrum.*[1])

[1]) In der Theorie der normierten Ringe wird bewiesen, daß ein beliebiger beschränkter Operator, der in einem BANACH-Raum definiert ist, ein nichtleeres Spektrum hat [9].

Beispiele. 1. Wenn A der identische Operator E ist, so besteht sein Spektrum aus dem einzigen Eigenwert 1, für den der Raum der Eigenelemente $H_1 = H$ ist. Für $\lambda \neq 1$ ist $R_\lambda = \frac{1}{\lambda - 1} E$ ein beschränkter Operator.

2. Wir definieren den Operator A aus $(L_2\,[0, 1] \to L_2\,[0, 1])$ durch

$$A\,x(t) = t\,x(t) \qquad (0 \leqq t \leqq 1)\,.$$

Offensichtlich ist $m \geqq 0$ und $M \leqq 1$. Wir zeigen, daß das Intervall $[0, 1]$ das Spektrum von A ist. Hieraus folgt $m = 0$ und $M = 1$.

Es sei in der Tat $0 \leqq \lambda \leqq 1$ und $\varepsilon > 0$. Wir betrachten dasjenige der Intervalle $[\lambda, \lambda + \varepsilon]$, $[\lambda - \varepsilon, \lambda]$, welches in $[0, 1]$ liegt. Es sei

$$x_\varepsilon(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}} & \text{für} \quad t \in [\lambda, \lambda + \varepsilon]\,, \\ 0 & \text{für} \quad t \notin [\lambda, \lambda + \varepsilon]\,, \end{cases}$$

dann folgt

$$\int_0^1 x_\varepsilon^2\,dt = \int_\lambda^{\lambda+\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon}\,dt = 1\,.$$

Also ist

$$x_\varepsilon \in L_2\,[0, 1] \qquad \text{und} \qquad ||x_\varepsilon|| = 1\,.$$

Ferner ist

$$A_\lambda\,x_\varepsilon(t) = (t - \lambda)\,x_\varepsilon(t)\,,$$

woraus

$$||A_\lambda\,x_\varepsilon(t)||^2 = \frac{1}{\varepsilon} \int_\lambda^{\lambda+\varepsilon} (t - \lambda)^2\,dt = \frac{\varepsilon^2}{3}$$

folgt. Für $\varepsilon \to 0$ geht $||A_\lambda\,x_\varepsilon|| \to 0$. Folglich ist λ mit $0 \leqq \lambda \leqq 1$ ein Punkt des Spektrums.

A hat keinen Eigenwert, denn es ist

$$A_\lambda\,x(t) = (t - \lambda)\,x(t)\,,$$

und wenn $A_\lambda\,x(t) = 0$ ist, so verschwindet $(t - \lambda)\,x(t)$ auf $[0, 1]$ fast überall, und darum ist auch $x(t)$ fast überall gleich Null.

Invariante Unterräume. Ein Unterraum L des Raumes H heißt *invarianter Unterraum* eines Operators A, wenn aus $x \in L$ folgt $A\,x \in L$. Wir geben ein Beispiel eines invarianten Unterraumes an. λ sei Eigenwert eines Operators A und N_λ die Gesamtheit der zu diesem Eigenwert gehörigen Eigenelemente, zu der wir auch das Nullelement zählen. N_λ ist ein invarianter Unterraum, da infolge der Gleichung $A\,x = \lambda\,x$ aus $x \in N_\lambda$ folgt $A\,x \in N_\lambda$.

Ist L ein invarianter Unterraum eines Operators A, so sagt man auch, L *reduziere* A. Wir stellen einige Eigenschaften invarianter Unterräume selbstadjungierter Operatoren zusammen.

1. Aus der Invarianz von L folgt die Invarianz seines orthogonalen Komplements $M = H \dot{-} L$.

Es sei $x \in M$. Dann ist $(x, y) = 0$ für jedes $y \in L$. Da nun auch $A\,y$ für jedes $y \in L$ zu L gehört, ist $(x, A\,y) = 0$. Weil A selbstadjungiert ist, erhalten wir für jedes $y \in L : (A\,x, y) = 0$. Foglich ist, wie behauptet, $A\,x \in M$.

Mit G_λ werde der Wertebereich des Operators A_λ, d. h. die Gesamtheit der Elemente der Form $y = A x - \lambda x$, wobei λ Eigenwert ist, bezeichnet.

Wir entnehmen $H = \overline{G_\lambda} \dotplus N_\lambda$, denn wenn $y \in G_\lambda$ und $u \in N_\lambda$ ist, so wird

$$(y, u) = (A x - \lambda x, u) = (x, A u - \lambda u) = (x, 0) = 0 .$$

Also ist $G_\lambda \perp N_\lambda$. Für $y \in \overline{G_\lambda}$ und $y \notin G_\lambda$ ist $y = \lim\limits_n y_n$ mit $y_n \in G_\lambda$. Die Gleichung $(y_n, u) = 0$ führt uns zu

$$(y, u) = \lim_n (y_n, u) = 0 ,$$

und demzufolge ist $\overline{G_\lambda} \perp N_\lambda$.

Es sei nun für jedes $y \in G_\lambda$ $(y, u) = 0$. Für jedes $x \in H$ ergibt sich

$$0 = (A x - \lambda x, u) = (x, A u - \lambda u)$$

und

$$A u - \lambda u = 0 , \qquad \text{d. h.} \qquad u \in N_\lambda .$$

Folglich ist, wie behauptet,

$$N_\lambda = H \dot{-} G_\lambda = H \dot{-} \overline{G_\lambda} .$$

Aus der Eigenschaft 1 und dem eben bewiesenen Satz folgt: $\overline{G_\lambda}$ ist ein invarianter Unterraum des selbstadjungierten Operators A.

Mit N werde die orthogonale Summe aller Unterräume N_λ oder, damit gleichbedeutend, die abgeschlossene lineare Hülle aller Eigenelemente des Operators A bezeichnet. Das ist auch ein invarianter Unterraum des gegebenen Operators. Ist H separabel, so kann man in jedem N_λ ein vollständiges, endliches oder abzählbares Orthonormalsystem von Eigenelementen konstruieren. Da die Eigenelemente aus verschiedenen N_λ orthogonal sind, erhalten wir durch die Vereinigung dieser Systeme ein orthogonales System von Eigenelementen $\{x_n\}$, das im Raum N vollständig ist.

Der Operator A bestimmt in einem invarianten Unterraum L einen Operator A_L aus $(L \to L)$; und zwar gilt $A_L x = A x$ für $x \in L$. A_L ist ebenfalls ein selbstadjungierter Operator.

2. Wenn die invarianten Räume L und M orthogonale Ergänzungen zueinander bilden, so ist das Spektrum von A die mengentheoretische Vereinigung der Spektren von A_L und A_M.

Es sei λ ein Punkt des Spektrums von A_L oder A_M. Dann existiert eine Folge $\{x_n\} \in L$ (entsprechend M) derart, daß $\|x_n\| = 1$ ist und $\|A_{L\lambda} x_n\| \to 0$ geht. Da aber $\|A_\lambda x_n\| = \|A_{L\lambda} x_n\|$ ist, gehört λ dem Spektrum von A an.

λ gehöre jetzt weder dem Spektrum von A_L noch dem von A_M an. Dann existiert eine positive Zahl c derart, daß für beliebige $y \in L$ und $z \in M$

$$\|A_\lambda y\| = \|A_{L\lambda} y\| \geqq c \|y\| \qquad \text{und} \qquad \|A_\lambda z\| \geqq c \|z\|$$

gilt. Aber jedes $x \in H$ hat die Form

$$x = y + z , \qquad y \in L , \qquad z \in M , \qquad \|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 .$$

Hieraus folgt

$$\|A_\lambda x\| = \|A_\lambda y + A_\lambda z\| = (\|A_\lambda y\|^2 + \|A_\lambda z\|^2)^{1/2} \geqq c\,(\|y\|^2 + \|z\|^2)^{1/2} = c\,\|x\|\,.$$

Somit ist λ kein Punkt des Spektrums von A.

Kontinuierliche Spektren und Punktspektren. N sei die lineare abgeschlossene Hülle aller Eigenelemente eines selbstadjungierten Operators A und G ihre orthogonale Ergänzung. Wie wir wissen, ist H als orthogonale Summe der Räume N und G darstellbar. N ist ein invarianter Raum von A, folglich ist das Spektrum von A die mengentheoretische Summe der Spektren von A_N und A_G. Das Spektrum von A_N heißt *Punktspektrum*[1]) und das von A_G *kontinuierliches Spektrum* des Operators A. Wenn $N = H$ ist, so hat A ein *reines Punktspektrum.* Dieses tritt bei vollstetigen Operatoren auf, wie wir in Kap. VI gesehen haben. Wenn der Operator kein Eigenelement hat, so ist das Spektrum des Operators *rein kontinuierlich.* Der Operator A aus Beispiel 2 ist von dieser Art.

Operatoren mit reinem Punktspektrum. Der selbstadjungierte Operator A habe ein reines Punktspektrum. Dann ist $N = H$, und folglich existiert ein vollständiges Orthonormalsystem von Eigenelementen $\{x_n\}$ mit

$$A\,x_n = \lambda_n\,x_n\,, \tag{5}$$

wobei die λ_n Eigenwerte sind[2]).

Jedes x ist in Form einer Fourier-Reihe

$$x = \sum_n c_n\,x_n \qquad \text{mit} \qquad c_n = (x, x_n) \tag{6}$$

darstellbar. Wir bezeichnen mit P_n den Operator, der durch

$$P_n\,x = (x, x_n)\,x_n = c_n\,x_n$$

definiert wird. (P_n ist ein Projektionsoperator auf die Gerade $t x_n$, $-\infty < t < \infty$.)

Die Reihe (6) kann auch in der Gestalt

$$x = E\,x = \sum_n P_n\,x$$

oder in Operatorform

$$E = \sum_n P_n \tag{7}$$

geschrieben werden. Es folgt leicht

$$\begin{aligned} P_n\,P_m &= O \quad \text{für} \quad n \neq m\,, \\ P_n^2 &= P_n\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Nach (5) und (6) ist

$$A\,x = \sum_n \lambda_n\,c_n\,x_n = \sum_n \lambda_n\,P_n\,x\,. \tag{9}$$

(Da $|\lambda_n| \leqq \|A\|$ ist und $\sum_n c_n^2$ konvergiert, so ist $\sum_n (\lambda_n\,c_n)^2$ konvergent.)

[1]) Häufig bezeichnet man als Punktspektrum eines Operators A die Gesamtheit aller seiner Eigenwerte. Nach unserer Definition zählen auch die Häufungspunkte der Menge seiner Eigenwerte zum Punktspektrum eines Operators.

[2]) Vorausgesetzt H ist separabel.

Man schreibt für (9) auch

$$A = \sum_n \lambda_n P_n . \tag{10}$$

Dann folgt aus (9) und (6) die Relation

$$(A\,x, x) = \sum_n \lambda_n c_n^2 . \tag{11}$$

Somit haben wir die quadratische Form $(A\,x, x)$ auf eine Summe von Quadraten reduziert.

(11) ist gleichwertig mit

$$(A\,x, x) = \sum_n \lambda_n (P_n\,x, x) . \tag{12}$$

Es sei jetzt λ nicht in der abgeschlossenen Hülle von $\{\lambda_n\}$ enthalten. Dann existiert eine Konstante $d > 0$ derart, daß $|\lambda - \lambda_n| > d$ ist. Man hat

$$A_\lambda\,x = (A - \lambda\,E)\,x = \sum_n (\lambda_n - \lambda)\,P_n\,x .$$

Hieraus und aus (8) erhält man leicht

$$R_\lambda\,x = A_\lambda^{-1}\,x = \sum_n \frac{1}{\lambda_n - \lambda} P_n\,x . \tag{13}$$

Wegen $P_n\,x = c_n\,x_n$ gilt

$$R_\lambda\,x = \sum_n \frac{c}{\lambda_n - \lambda} x_n ,$$

und da

$$\left|\frac{c_n}{\lambda_n - \lambda}\right| \leqq \frac{|c_n|}{d}$$

ist, so folgt

$$||R_\lambda\,x|| \leqq \frac{1}{d} \left(\sum_n c_n^2\right)^{1/2} = \frac{1}{d}\,||x||$$

und

$$||R_\lambda|| \leqq \frac{1}{d} .$$

Also gehört λ nicht zum Spektrum. Wir schreiben nun (13) um in

$$R_\lambda = \sum_n \frac{1}{\lambda_n - \lambda} P_n . \tag{14}$$

Diese Formeln sind denen für quadratische Formen und für symmetrische (hermitesche) Matrizen im n-dimensionalen Fall analog. Sie unterscheiden sich nur von jenen durch die unendliche Summation.

Hilbert untersuchte als erster in seiner Arbeit [11] die allgemeine Theorie der selbstadjungierten Operatoren und der entsprechenden Formen $(A\,x, x)$, die er als Grenzwerte quadratischer Formen mit n Veränderlichen für $n \to \infty$ auffaßte. Bei unbeschränktem Anwachsen von n können die endlichen Summen sowohl in unendliche Summen als auch in Integralausdrücke übergehen

(diese werden später behandelt). Dem entspricht das Auftreten eines Punktspektrums und eines kontinuierlichen Spektrums. Das reine Punktspektrum ist besonders einfach wegen seiner vollständigen Analogie zum endlichdimensionalen Fall. In dieser Arbeit von HILBERT ist die Klasse der vollstetigen Operatoren, die ein reines Punktspektrum aufweisen, untersucht worden. Wir geben hier einen von den allgemeinen Ergebnissen des Kapitels VI unabhängigen Beweis für die Diskretheit des Spektrums eines vollstetigen Operators an.

Satz 5. *Jeder von Null verschiedene Punkt des Spektrums eines selbstadjungierten vollstetigen Operators A ist ein Eigenwert von A.*

Wenn $\lambda \neq 0$ ein Punkt des Spektrums von A ist, so existiert eine Folge $\{x_n\} \in H$ derart, daß

$$||x_n|| = 1 \quad \text{ist und} \quad ||A\, x_n - \lambda\, x_n|| \to 0 \quad \text{konvergiert.}$$

Indem man $A\, x_n - \lambda\, x_n = y_n$ setzt, geht $||y_n|| \to 0$, und es ist

$$x_n = \frac{1}{\lambda}(A\, x_n - y_n)\,.$$

A bildet die Folge $\{x_n\}$ in eine kompakte Folge $\{A\, x_n\}$ ab. Daher existiert eine konvergierende Teilfolge $\{A\, x_{n_k}\}$. Mit ihr konvergiert auch die Teilfolge

$$x_{n_k} = \frac{1}{\lambda}(A\, x_{n_k} - y_{n_k})\,. \tag{15}$$

Geht $x_{n_k} \to x$, dann strebt $A\, x_{n_k} \to A\, x$ und auch $y_{n_k} \to 0$. Daher folgt aus (15)

$$x = \frac{1}{\lambda} A\, x \quad \text{oder} \quad A\, x = \lambda\, x$$

mit $||x|| = \lim\limits_{k} ||x_{n_k}|| = 1$.

Somit ist x Eigenelement und λ Eigenwert von A.

Folgerung 1. *Jeder selbstadjungierte vollstetige von O verschiedene Operator hat wenigstens einen Eigenwert.*

Diese Aussage ergibt sich unmittelbar aus Satz 1 und der Folgerung aus Satz 4.

Folgerung 2. *Jeder invariante von Null verschiedene Raum L eines selbstadjungierten vollstetigen Operators A enthält ein Eigenelement.*

Mit A ist auch $A_L \in (L \to L)$ vollstetig. Dieser Operator besitzt wegen Folgerung 1 einen Eigenwert λ. Folglich existiert in L ein Eigenelement des Operators A_L und deshalb auch von A.

Folgerung 3. *Ein selbstadjungierter vollstetiger Operator besitzt ein reines Punktspektrum.*

Der invariante Raum G, der orthogonal zu allen Eigenvektoren ist, ist leer. Wäre G nicht leer, so müßte nach Folgerung 2 G ein Eigenelement enthalten, was im Widerspruch zur Definition von G steht.

Satz 6. *Die Menge der Eigenwerte $\{\lambda_n\}$ eines selbstadjungierten vollstetigen Operators A kann nur einen Häufungspunkt $\lambda = 0$ haben.*

Dieser Satz ist ein Spezialfall von Satz 7, § 2, Kap. VI, man kann ihn aber leicht unabhängig davon beweisen. Wenn eine Folge von Eigenwerten $\{\lambda_n\}$

existieren würde mit $|\lambda_n| \geqq c > 0$, so hätten wir wegen der Orthogonalität für Eigenelemente x_n mit $\|x_n\| = 1$

$$\|A x_n - A x_m\|^2 = \|\lambda_n x_n - \lambda_m x_m\|^2 = \lambda_n^2 + \lambda_m^2 \geqq 2 c^2 \quad \text{falls} \quad m \neq n \quad \text{ist.}$$

Dann wäre aber die Folge $\{A x_n\}$ im Widerspruch zur Vollstetigkeit von A nicht kompakt.

§ 5. Die Spektralzerlegung eines selbstadjungierten Operators

Die Zerlegung der Einheit. Die Gleichungen (7), (10), (14) von § 4 werden auf beliebige selbstadjungierte Operatoren verallgemeinert.

Lemma. *A und B seien selbstadjungierte vertauschbare Operatoren, und es sei $A^2 = B^2$. Dann gilt für die Projektion P auf das Radikal von $A - B$:*

1. *Jeder mit $A - B$ vertauschbare lineare beschränkte Operator C ist mit P vertauschbar,*
2. *aus $A x = 0$ folgt $P x = x$, und es ist*
3. *$A = (2 P - E) B$.*

Wir betrachten die Menge der $x \in H$, für die $(A - B) x = 0$ ist. Diese Menge bildet einen Unterraum $L \subseteq H$. P ist der Projektionsoperator auf L. Wenn C mit $A - B$ vertauschbar und $y \in L$ ist, so gehört $C y$ ebenfalls zu L, denn es ist $(A - B) C y = C (A - B) y = 0$. Daher ist $C P x \in L$ für alle $x \in H$ und darum auch $P C P x = C P x$, d. h. $P C P = C P$. Analog ergibt sich $C^* P = P C^* P$. Hieraus folgt $P C = (C^* P)^* = (P C^* P)^* = P C P$. Somit ist $C P = P C$, und 1 ist bewiesen. Insbesondere ist $A P = P A$ und $B P = P B$.

Es gelte $A x = 0$. Dann ist

$$\|B x\|^2 = (B x, B x) = (B^2 x, x) = (A^2 x, x) = \|A x\|^2 = 0 ,$$

d. h. $B x = 0$. Also gilt

$$(A - B) x = 0 ,$$

folglich ist

$$P x = x ,$$

und 2 ist ebenfalls gezeigt.

Es ist schließlich

$$(A - B)(A + B) = A^2 - B^2 = 0 .$$

Deshalb gilt für alle x

$$(A + B) x \in L$$

und somit

$$P (A + B) x = (A + B) x ,$$

d. h.

$$P (A + B) = A + B .$$

Da nun aber außerdem $P (A - B) = 0$ ist, so wird

$$P (A + B) - P (A - B) = A + B$$

und

$$A = (2\,P - E)\,B\,.$$

Das Lemma ist hiermit bewiesen.

Satz 1. *Zu jedem selbstadjungierten Operator A existiert ein Projektionsoperator E_+ mit den Eigenschaften:*

1. *Ein beliebiger, mit A vertauschbarer linearer beschränkter Operator C ist mit E_+ vertauschbar;*
2. *es ist $A\,E_+ \geqq 0$, $A\,(E - E_+) \leqq 0$ und*
3. *wenn $A\,x = 0$ ist, so folgt $E_+\,x = x$.*

Es sei B die positive Quadratwurzel aus A^2. Bezeichnen wir den nach dem oben bewiesenen Lemma existierenden Operator mit E_+, so gilt 1. und 3. Wegen dieses Lemmas gilt auch

$$A = (2\,E_+ - E)\,B\,,$$

demnach

$$A\,E_+ = B\,E_+ \geqq 0\,,\quad A\,(E - E_+) = -\,(E - E_+)\,B \leqq 0\,,$$

da das Produkt zweier vertauschbarer positiver Operatoren wieder ein positiver Operator ist. Satz 1 ist damit vollständig bewiesen.

Wir bemerken, daß aus Gleichung $A = (2\,E_+ - E)$ folgt $B\,E_+ = \frac{1}{2}(A + B)$ und hieraus

$$A\,E_+ = \frac{1}{2}(A + B)\,,$$

$$A\,(E - E_+) = \frac{1}{2}(A - B)\,.$$

Der Operator $A\,E_+$ wird mit A_+ bezeichnet und heißt *positiver Teil von A*. Für $A\,(E - E_+)$ schreibt man A_- und nennt A_- den *negativen Teil von A*. Es gilt dann

$$A = A_+ + A_-\,.$$

Beispiele. 1. $\mathfrak{A}$ sei eine symmetrische Matrix n-ter Ordnung mit den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, wobei die $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ kleiner als 0 und die $\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \ldots, \lambda_n$ größer als 0 sind. Man hat also (siehe S. 87)

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{U}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}\mathfrak{U}^{-1}\,.$$

Dann ist

$$\mathfrak{A}_+ = \mathfrak{U}\begin{pmatrix}0 & & & & & 0\\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & \lambda_{k+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \lambda_n\end{pmatrix}\mathfrak{U}^{-1} \quad\text{und}\quad \mathfrak{A}_- = \mathfrak{U}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & & 0\\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0\end{pmatrix}\mathfrak{U}^{-1}\,.$$

2. Es sei der Operator A in $L_2\,[-1, +1]$ durch die Gleichung

$$A\,x(t) = t\,x(t)$$

definiert. Dann ist

$$A_+ x(t) = \frac{t + |t|}{2} x(t), \quad A_- x(t) = \frac{t - |t|}{2} x(t).$$

Satz 2. *Jeder selbstadjungierte Operator A erzeugt eine Schar $\{E_\lambda\}$ von Projektionsoperatoren, die von einem reellen Parameter λ $(-\infty < \lambda < +\infty)$ abhängen und die folgenden Bedingungen erfüllen:*

1. *Aus $A\,C = C\,A$ folgt $E_\lambda\,C = C\,E_\lambda$ für jedes λ,*
2. *$E_\lambda \leqq E_\mu$ für $\lambda < \mu$,*
3. *E_λ ist stetig von links, d. h., es ist $E_{\lambda-0} = E_\lambda$,*
4. *$E_\lambda = O$ für $-\infty < \lambda \leqq m$ und $E_\lambda = E$ für $M < \lambda < +\infty$, wo m und M die untere bzw. die obere Grenze von A sind.*

Die Schar $\{E_\lambda\}$ heißt *die durch A erzeugte Zerlegung der Einheit.*

Wir bringen zunächst Beispiele solcher Zerlegungen.

1. A sei eine symmetrische Matrix n-ter Ordnung

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{U} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \mathfrak{U}^{-1}$$

mit $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots < \lambda_n$, und e_i seien Eigenvektoren, die den Eigenwerten λ_i entsprechen. Für $\lambda_i < \lambda \leqq \lambda_{i+1}$ bezeichne E_λ den Operator, der auf den durch die Vektoren $e_1, e_2, \ldots, e_i$ erzeugten i-dimensionalen Unterraum projiziert. Für $\lambda \leqq \lambda_1$ sei $E_\lambda = O$, und für $\lambda > \lambda_n$ sei $E_\lambda = E$.

2. Es sei A in $L_2\,[-1, 1]$ durch die Gleichung

$$A\,x(t) = t\,x(t)$$

definiert. Dann ist

$$E_\lambda\,x(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t \geqq \lambda, \\ x(t) & \text{für} \quad t < \lambda. \end{cases}$$

Für $\lambda \leqq -1$ ist offensichtlich $E_\lambda = O$, und für $\lambda < 1$ wird $E_\lambda = E$.

Wir führen nun für den Satz 2 den

Beweis. λ sei eine reelle Zahl und $A_\lambda = A - \lambda\,E$. Mit E_λ bezeichnen wir den Projektionsoperator $E - E_+(\lambda)$. $E_+(\lambda)$ ist der für A_λ nach Satz 1 konstruierte Projektionsoperator.

Bedingung 1. wird offensichtlich erfüllt. Hieraus folgt insbesondere, daß E_λ und E_μ für beliebige λ und μ vertauschbar sind.

Wir betrachten 2. und untersuchen für $\lambda < \mu$ den Projektionsoperator

$$P = E_\lambda\,(E - E_\mu)\,.$$

Es ist

$$E_\lambda\,P = E_\lambda^2\,(E - E_\mu) = E_\lambda\,(E - E_\mu) = P \tag{1}$$

und analog

$$(E - E_\mu)\,P = P\,. \tag{2}$$

Nach Definition von E_λ ist

$$(A - \lambda\,E)\,E_\lambda \leqq O\,, \tag{3}$$

$$(A - \mu\,E)\,(E - E_\mu) \leqq O\,. \tag{4}$$

Wir setzen für beliebiges $x \in H$ $Px = y$. Aus (1) und (2) folgt

$$E_\lambda y = E_\lambda P x = P x = y$$

und analog

$$(E - E_\mu) y = y .$$

Aus (3) und (4) ergibt sich nun

$$\big((A - \lambda E) y, y\big) = \big((A - \lambda E) E_\lambda y, y\big) \leqq 0 ,$$

$$\big((A - \mu E) y, y\big) = \big((A - \mu E)(E - E_\mu) y, y\big) \geqq 0 .$$

Aus beiden Ungleichungen erhält man

$$\big((\mu - \lambda) y, y\big) \leqq 0$$

oder

$$(\mu - \lambda) \|y\|^2 \leqq 0 .$$

Da nun nach Voraussetzung $\mu - \lambda > 0$ ist, so folgt hieraus, daß $y = Px = 0$ ist, und da $x \in H$ beliebig war, gilt $P = O$, d. h.

$$E_\lambda (E - E_\mu) = E_\lambda - E_\lambda E_\mu = O ,$$

und 2. ist bewiesen.

Wir betrachten das halboffene Intervall $\Delta = [\lambda, \mu)$ der Zahlengeraden. Für den Projektionsoperator $E(\Delta) = E_\mu - E_\lambda$ ist

$$E_\mu E(\Delta) = E(\Delta)$$

und

$$(E - E_\lambda) E(\Delta) = E(\Delta) .$$

Deshalb ist

$$(A - \mu E) E(\Delta) = (A - \mu E) E_\mu E(\Delta) \leqq O ,$$

$$(A - \lambda E) E(\Delta) = (A - \lambda E)(E - E_\lambda) E(\Delta) \geqq O$$

und folglich

$$\lambda E(\Delta) \leqq A E(\Delta) \leqq \mu E(\Delta) . \tag{5}$$

Wir beweisen jetzt 3. Für beliebiges $x \in H$ ist der Ausdruck $(E_\lambda x, x)$ eine nichtfallende Funktion von λ. Daher existiert $\lim\limits_{\substack{\lambda \to \mu \\ \lambda < \mu}} (E_\lambda x, x)$. Man erhält hieraus die Konvergenz von

$$\|E_\nu x - E_\lambda x\|^2 = \big((E_\nu - E_\lambda) x, x\big) = (E_\nu x, x) - (E_\lambda x, x) \to 0$$

für $\lambda < \nu < \mu$, $\lambda \to \mu$ und $\nu \to \mu$. Folglich existiert für alle $x \in H$

$$\lim_{\substack{\lambda \to \mu \\ \lambda > \mu}} E_\lambda x = E_{\mu - 0} x .$$

Es ist leicht zu sehen, daß $E_{\mu-0}$ ein Projektionsoperator ist. Wir beweisen, daß

$$E_{\mu-0} = E_\mu$$

gilt. Es sei

$$E(\Delta_0) = E_\mu - E_{\mu-0}\,.$$

Dann geht

$$E(\Delta) = E_\mu - E_\lambda \to E(\Delta_0) \qquad \text{für} \qquad \lambda \to \mu,\ \lambda < \mu$$

im Sinne der punktweisen Konvergenz von Operatoren. Geht man nun in der Ungleichung (5) zur Grenze über, was offensichtlich möglich ist, so erhält man

$$\mu\, E(\Delta_0) = A\, E(\Delta_0)\,.$$

Es sei jetzt $x \in H$ beliebig und $y = E(\Delta_0)\, x$. Wegen der vorhergehenden Gleichung ist

$$(A - \mu\, E)\, y = 0\,,$$

woraus man nach 3. von Satz 1 $E_\mu\, y = 0$ erhält. Aus $E_\mu\, E(\Delta) = E(\Delta)$ ergibt sich durch Grenzübergang

$$E_\mu\, E(\Delta_0) = E(\Delta_0)$$

und folglich

$$E(\Delta_0)\, x = E_\mu\, E(\Delta_0)\, x = E_\mu\, y = 0\,.$$

Da $x \in H$ beliebig war, ist $E(\Delta_0) = O$, und 3. ist bewiesen.[1])

Es bleibt 4. zu beweisen. Es sei $\lambda < m$ und $E_\lambda \neq O$. Dann existiert ein x, so daß $E_\lambda\, x \neq 0$ ist. Man setzt $E_\lambda\, x = y$ und hat $E_\lambda\, y = y$, wobei man $\|y\| = 1$ annehmen kann. Dann ist nach (3)

$$(A\, y, y) - \lambda = (A\, y, y) - \lambda(y, y) = \big((A - \lambda\, E)\, y, y\big) = \big((A - \lambda\, E)\, E_\lambda\, y, y\big) \leqq 0\,,$$

d. h.

$$(A\, y, y) \leqq \lambda < m\,,$$

was im Widerspruch zur Definition der Zahl m steht. Folglich ist $E_\lambda = O$ für $\lambda < m$ und wegen der Linksstetigkeit auch $E_m = O$. Analog zeigt man $E_\lambda = E$ für $\lambda > M$.

Spektraldarstellung eines selbstadjungierten Operators. Satz 3. *Für jeden selbstadjungierten Operator A und für jedes positive ε gilt*

$$A = \int\limits_m^{M+\varepsilon} \lambda\, dE_\lambda\,, \tag{6}$$

wobei das Integral als Grenzwert von STIELTJES*schen Summen im Sinne der gleichmäßigen Konvergenz im Raum der Operatoren aufzufassen ist.*

Beweis. Das halboffene Intervall $[m, M + \varepsilon)$ mit $\varepsilon > 0$ sei in die halboffenen Intervalle $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ zerlegt, wobei $\Delta_k = [\lambda_k, \mu_k)$ ist. Für jedes Δ_k ist nach (5)

$$\lambda_k\, E(\Delta_k) \leqq A\, E(\Delta_k) \leqq \mu_k\, E(\Delta_k)\,.$$

---

[1]) Nach der Definition von E_λ gehören Elemente, für die $(A - \lambda\, E)\, x = 0$ ist, zur orthogonalen Ergänzung des Unterraumes $L_{E\lambda}$. Wenn jedoch E_λ so definiert wird, daß diese Elemente in $L_{E\lambda}$ abgebildet werden (was ohne Verletzung von 1., 2. und 4. gemacht werden kann), so wird E_λ von rechts stetig.

Summiert man über k und berücksichtigt

$$\sum_{k=1}^{n} E(\Delta_k) = E\,,$$

so folgt

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, E(\Delta_k) \leqq A \leqq \sum_{k=1}^{n} \mu_k\, E(\Delta_k)\,.$$

Man wähle nun $\nu_k \in [\lambda_k, \mu_k)$, dann ist

$$\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \nu_k)\, E(\Delta_k) \leqq A - \sum_{k=1}^{n} \nu_k\, E(\Delta_k) \leqq \sum_{k=1}^{n} (\mu_k - \nu_k)\, E(\Delta_k)\,.$$

Wir setzen $\max\limits_k (\mu_k - \lambda_k) = \delta$ und finden aus diesen Ungleichungen

$$-\,\delta E \leqq A - \sum_{k=1}^{n} \nu_k\, E(\Delta_k) \leqq \delta E$$

und folglich

$$-\,\delta(x, x) \leqq \left(\left(A - \sum_{k=1}^{n} \nu_k\, E(\Delta_k)\right) x, x\right) \leqq \delta(x, x)\,.$$

Hieraus folgt

$$\left\| A - \sum_{k=1}^{n} \nu_k\, E(\Delta_k) \right\| \leqq \delta\,,$$

d. h., es ist

$$A = \lim_n \sum_{k=1}^{n} \nu_k\, E(\Delta_k) = \int_m^{M+\varepsilon} \lambda\, dE_\lambda\,,$$

was zu beweisen war. Für einen vollstetigen Operator geht diese Gleichung in (10), § 4, über.

Bemerkung. Da die Konvergenz einer Folge von Operatoren $\{A_n\}$ gegen A im Sinne der gleichmäßigen Konvergenz die punktweise Operatorenkonvergenz und die Konvergenz der quadratischen Formen $(A_n\, x, x)$ gegen $(A\, x, x)$ zur Folge hat, so folgt aus Satz 3

$$1.\quad A\,x = \lim_n \sum_{k=1}^{n} \nu_k\, E(\Delta_k)\, x = \int_m^{M+\varepsilon} \lambda\, dE_\lambda\, x$$

und

$$2.\quad (A\, x, x) = \lim_n \sum_{k=1}^{n} \nu_k \left(E(\Delta_k)\, x, x\right) = \int_m^{M+\varepsilon} \lambda\, d\,\left(E_\lambda\, x, x\right)$$

für alle $x \in H$.

Operatorfunktionen. Resolventen. Spektren. Definition von $F(A)$. Wir definieren

$$\int_m^{M+\varepsilon} F(\lambda)\, dE_\lambda\,,$$

wobei $F(\lambda)$ eine beliebige komplexe Treppenfunktion auf dem abgeschlossenen Intervall $[m, M]$ und $\{E_\lambda\}$ die von dem selbstadjungierten Operator A erzeugte

Zerlegung der Einheit ist. Wenn λ_0 eine Unstetigkeitsstelle dieser Funktion ist, so verabreden wir, daß $F(\lambda_0) = F(\lambda_0 + 0)$ gesetzt wird. Wir setzen $F(\lambda)$ auf das halboffene Intervall $[m, M + \varepsilon)$ fort, indem wir dort $F(\lambda) = F(M)$ definieren. Es ist also $F(\lambda) = \nu_k$ auf $\Delta_k = [\lambda_k, \mu_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, wobei

$$\bigcup_{k=1}^{n} \Delta_k = [m, M + \varepsilon)$$

ist.

Per definitionem ist

$$\int_m^{M+\varepsilon} F(\lambda)\, dE_\lambda = \sum_{k=1}^{n} \nu_k\, E(\Delta_k)\,.$$

Es ist leicht zu sehen, daß auch die Gleichung

$$\int_m^{M+\varepsilon} F(\lambda)\, dE_\lambda = \sum_{k=1}^{m} \nu_k'\, E(\Delta_k')$$

gilt, wo Δ_k' beliebige Teilintervalle der Δ_k sind, deren Vereinigung das Intervall $[m, M + \varepsilon)$ ergibt. Den Operator $\int_m^{M+\varepsilon} F(\lambda)\, dE_\lambda$ bezeichnen wir mit $F(A)$. Er ist eine von der Funktion $F(\lambda)$ der reellen Veränderlichen λ abhängige *Funktion des Operators A*. Man erhält auf diese Weise eine Zuordnung der Treppenfunktionen einer reellen Veränderlichen zu den Operatorfunktionen von A.

Diese Zuordnung besitzt die folgenden Eigenschaften.

1. Wenn

$$F(\lambda) = a\, F_1(\lambda) + b\, F_2(\lambda)$$

ist, so gilt

$$F(A) = a\, F_1(A) + b\, F_2(A) \quad \text{(Additivität).}$$

2. Für

$$F(\lambda) = F_1(\lambda)\, F_2(\lambda)$$

ist

$$F(A) = F_1(A)\, F_2(A) \quad \text{(Multiplikativität).}$$

3. $\overline{F}(A) = (\overline{F}(A))^*$, wo F die konjugiert komplexe Funktion bezeichnet.

4. $\|F(A)\| \leq \max\limits_{\lambda} |F(\lambda)|$.

5. Aus $A\, B = B\, A$ folgt $F(A)\, B = B\, F(A)$ für jeden beschränkten linearen Operator B.

Zum Beweis der 1. und 2. Eigenschaft zerlegen wir $[m, M + \varepsilon)$ in die Teilintervalle Δ_k, auf denen die beiden Funktionen $F_1(\lambda)$ und $F_2(\lambda)$ konstant sind. Dann hat man für $F(\lambda) = a\, F_1(\lambda) + b\, F_2(\lambda)$

$$\begin{aligned} F(A) &= \sum_{k=1}^{n} (a\, c_k^{(1)} + b\, c_k^{(2)})\, E(\Delta_k) \\ &= a \sum_{k=1}^{n} c_k^{(1)}\, E(\Delta_k) + b \sum_{k=1}^{n} c_k^{(2)}\, E(\Delta_k) = a\, F_1(A) + b\, F_2(A) \end{aligned}$$

und für $F(\lambda) = F_1(\lambda) F_2(\lambda)$ wegen der Orthogonalität von $E(\Delta_k)$ und $E(\Delta_l)$ für $k \neq l$

$$F_1(A) F_2(A) = \left(\sum_{k=1}^{n} c_k^{(1)} E(\Delta_k)\right)\left(\sum_{l=1}^{n} c_l^{(2)} E(\Delta_l)\right) = \sum_{k=1}^{n} c_k^{(1)} c_k^{(2)} E(\Delta_k) = F(A) .$$

Weiter gilt

$$(F(A)\, x, y) = \left(\sum_{k=1}^{n} c_k E(\Delta_k)\, x, y\right) = \left(x, \sum_{k=1}^{n} \bar{c}_k E(\Delta_k)\, y\right) = (x, \bar{F}(A)\, y) ,$$

hieraus folgt

$$(F(A))^* = \bar{F}(A) .$$

Schließlich ist

$$|(F(A)\, x, x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} c_k (E(\Delta_k)\, x, x)\right| \leqq \sum_{k=1}^{n} |c_k| (E(\Delta_k)\, x, x) \leqq \max_{\lambda} |F(\lambda)| (x, x) .$$

Hieraus ergibt sich

$$||F(A)|| = \sup_{||x||=1} |(F(A)\, x, x)| \leqq \max_{\lambda} |F(\lambda)| .$$

Die 5. Eigenschaft ist offensichtlich.

Aus der Definition von $F(A)$ folgt insbesondere, daß $E(\Delta) = \chi_\Delta(A)$ ist, wo $\chi_\Delta(\lambda)$ die charakteristische Funktion des halboffenen Intervalls Δ bedeutet. Es sei jetzt $F(\lambda)$ eine beliebige auf $[m, M]$ stetige Funktion. Wir setzen sie auf $[m, M + \varepsilon)$ fort, indem wir $F(\lambda) = F(M)$ für $\lambda \in (M, M + \varepsilon)$ setzen. Es existiert eine Folge von Treppenfunktionen $F_n(\lambda)$, die auf $[m, M + \varepsilon)$ gleichmäßig gegen $F(\lambda)$ konvergiert. Wir betrachten die zugeordneten Operatorfunktionen $F_n(A)$. Es geht

$$||F_m(A) - F_n(A)|| \leqq \max_{\lambda} |F_m(\lambda) - F_n(\lambda)| \to 0 \qquad \text{für} \qquad m, n \to \infty .$$

Wegen der Vollständigkeit des Raumes der Operatoren existiert ein Operator

$$B = \lim_{n} F_n(A) .$$

Das Integral

$$\int_{m}^{M+\varepsilon} F(\lambda)\, dE_\lambda$$

ist nach Definition von B die durch die Grenzfunktion $F(\lambda)$ erzeugte *Operatorfunktion*, die wir mit $F(A)$ bezeichnen. Man überzeugt sich leicht davon, daß dieser Prozeß von der speziellen Wahl der gegen $F(\lambda)$ konvergierenden Folge $F_n(\lambda)$ unabhängig ist. Nun ist leicht nachzuprüfen, daß die Eigenschaften 1. bis 5. im Falle stetiger Funktionen erhalten bleiben. Insbesondere ist

$$A^n = \int_{m}^{M+\varepsilon} \lambda^n\, dE_\lambda , \qquad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Resolventen. Die Zuordnung zwischen den Funktionen einer reellen Veränderlichen und den Operatorfunktionen kann man zur Untersuchung von Eigen-

schaften der selbstadjungierten Operatoren insbesondere der Spektraleigenschaften verwenden. Wir beschränken uns hier auf die folgenden drei Sätze.

Satz 4. *Für gegebenes A und λ_0 existiert die Resolvente $R_{\lambda_0} = (A - \lambda_0 E)^{-1}$, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

1. *λ_0 ist nicht reell,*
2. *λ_0 ist reell und liegt außerhalb des abgeschlossenen Intervalls $[m, M]$, oder*
3. *wenn $\lambda_0 \in [m, M]$ ist, so existiere ein halboffenes Intervall $[\alpha, \beta)$ mit $\alpha < \lambda_0 < \beta$ innerhalb dessen E_λ konstant ist.*

Dann ist stets

$$R_{\lambda_0} = \int_m^{M+\varepsilon} \frac{dE_\lambda}{\lambda - \lambda_0}.$$

Beweis. In den ersten zwei Fällen ist die Funktion

$$f(\lambda) = \frac{1}{\lambda - \lambda_0}$$

für hinreichend kleine ε in $[m, M + \varepsilon)$ stetig. Es ist

$$\int_m^{M+\varepsilon} \frac{dE_\lambda}{\lambda - \lambda_0} \int_m^{M+\varepsilon} (\lambda - \lambda_0)\, dE_\lambda = \int_m^{M+\varepsilon} dE_\lambda = E\,.$$

Und weil

$$\int_m^{M+\varepsilon} (\lambda - \lambda_0)\, dE_\lambda = A - \lambda_0 E$$

ist, gilt

$$\int_m^{M+\varepsilon} \frac{dE_\lambda}{\lambda - \lambda_0} = R_{\lambda_0}\,.$$

Im dritten Fall zerlegen wir $[m, M + \varepsilon)$ in drei halboffene Intervalle $[m, \alpha)$, $[\alpha, \beta)$ und $[\beta, M + \varepsilon)$. Es sei

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{\lambda - \lambda_0} \quad \text{auf} \quad [m, \alpha) \quad \text{und} \quad [\beta, M + \varepsilon)\,,$$

und auf $[\alpha, \beta)$ sei $\varphi(\lambda)$ linear, wobei $\varphi(\alpha) = \frac{1}{\alpha - \lambda_0}$, $\varphi(\beta) = \frac{1}{\beta - \lambda_0}$ ist. Für jede Funktion $\psi(\lambda)$ ist wegen der Konstanz von E_λ

$$\int_\alpha^\beta \psi(\lambda)\, dE_\lambda = O\,,$$

daher können wir auch

$$\int_m^{M+\varepsilon} \varphi(\lambda)\, dE_\lambda = \int_m^{M+\varepsilon} \frac{dE_\lambda}{\lambda - \lambda_0}$$

schreiben. Man hat also wie auch in den ersten zwei Fällen

$$\int_m^{M+\varepsilon} \frac{dE_\lambda}{\lambda - \lambda_0} \int_m^{M+\varepsilon} (\lambda - \lambda_0)\, dE_\lambda = E\,.$$

Hieraus folgt die Existenz von

$$R_{\lambda_0} = \int_m^{M+\varepsilon} \frac{dE_\lambda}{\lambda - \lambda_0}\,.$$

Satz 5. *Wenn R_{λ_0} für ein reelles λ_0 existiert, so liegt λ_0 im Innern eines Intervalles $[\alpha, \beta)$ in dem E_λ konstant ist.*

Wir bilden für ein beliebiges $x \in H$

$$(A - \lambda_0 E)\, x = \int_m^{M+\varepsilon} (\lambda - \lambda_0)\, dE_\lambda\, x$$

und wenden auf beiden Seiten den Operator $R_{\lambda_0} E(\Delta)$ an, wo $\Delta = [\alpha, \beta)$ ein gewisses halboffenes Intervall ist, welches λ_0 in seinem Innern enthält. Man bekommt

$$E(\Delta)\, x = R_{\lambda_0} \left(\int_\alpha^\beta (\lambda - \lambda_0)\, dE_\lambda\, x \right).$$

Hieraus folgt

$$||E(\Delta)\, x|| \leqq ||R_{\lambda_0}|| \left|\left| \int_\alpha^\beta (\lambda - \lambda_0)\, dE_\lambda\, x \right|\right|.$$

Nun wird aber, wie man leicht verifiziert,

$$\left|\left| \int_\alpha^\beta (\lambda - \lambda_0)\, dE_\lambda\, x \right|\right| \leqq c\, ||E(\Delta)\, x||\,,$$

wo $c = \max\{\beta - \lambda_0, \lambda_0 - \alpha\}$ ist. Folglich ist

$$||E(\Delta)\, x|| \leqq c\, ||R_{\lambda_0}||\, ||E(\Delta)\, x||\,.$$

Wir wählen jetzt das Intervall $[\alpha, \beta)$ so klein, daß $c\, ||R_{\lambda_0}|| < \frac{1}{2}$ wird. Dann erhält man

$$||E(\Delta)\, x|| \leqq \frac{1}{2}\, ||E(\Delta)\, x||\,.$$

Das ist aber nur möglich, wenn $E(\Delta)\, x = 0$ ist, und da $x \in H$ beliebig war, muß $E(\Delta) = O$ sein. Also muß für jedes halboffene Intervall $\Delta' \subseteqq \Delta$ erst recht $E(\Delta') = O$ sein. Das bedeutet aber, E_λ ist in $[\alpha, \beta)$ konstant.

Aus Satz 4 folgt unmittelbar: Die Menge der regulären Punkte eines selbstadjungierten Operators A ist offen. Folglich stellt das Spektrum von A eine abgeschlossene Menge auf der reellen Zahlengeraden dar (die Abgeschlossenheit des Spektrums von beschränkten linearen Operatoren in reellen BANACH-Räumen ist in Kap. III bewiesen worden).

Eigenwerte eines selbstadjungierten Operators.

Satz 6. *λ_0 ist Eigenwert eines selbstadjungierten Operators A genau dann, wenn λ_0 eine Unstetigkeitsstelle von E_λ ist.*

Notwendigkeit. Es sei für ein gewisses $x_0 \neq 0$

$$A x_0 - \lambda_0 x_0 = 0 .$$

Dann ist

$$((A - \lambda_0 E)^2 x_0, x_0) = 0$$

und folglich

$$\int_m^{M+\varepsilon} (\lambda - \lambda_0)^2 \, d(E_\lambda x_0, x_0) = 0 .$$

Da der Integrand nicht negativ ist und die Belegung monoton wächst, ist auch

$$\int_\alpha^\beta (\lambda - \lambda_0)^2 \, d(E_\lambda x_0, x_0) = 0$$

für beliebige Intervalle $[\alpha, \beta)$. Insbesondere ist für jedes $\varepsilon > 0$

$$\int_{\lambda_0+\varepsilon}^{M+\varepsilon} (\lambda - \lambda_0)^2 \, d(E_\lambda x_0, x_0) = 0 .$$

Da auf dem Integrationsintervall $(\lambda - \lambda_0)^2 \geqq \varepsilon^2$ ist, so wird erst recht

$$\varepsilon^2 \int_{\lambda_0+\varepsilon}^{M+\varepsilon} d(E_\lambda x_0, x_0) = \varepsilon^2 [(x_0, x_0) - (E_{\lambda_0+\varepsilon} x_0, x_0)] = 0 .$$

Folglich ist

$$(x_0, x_0) - (E_{\lambda_0+\varepsilon} x_0, x_0) = 0 ,$$

d. h., es gilt

$$E_{\lambda_0+\varepsilon} x_0 = x_0 . \tag{7}$$

Analog wird

$$\int_m^{\lambda_0-\varepsilon} (\lambda - \lambda_0)^2 \, d(E_\lambda x_0, x_0) = 0 ,$$

woraus wir unter Berücksichtigung von $E_m = O$

$$E_{\lambda_0-\varepsilon} x_0 = 0 \tag{8}$$

erhalten. Aus (7) und (8) folgt

$$(E_{\lambda_0+\varepsilon} - E_{\lambda_0-\varepsilon}) x_0 = x_0 ,$$

und da ε beliebig war, ist

$$(E_{\lambda_0+0} - E_{\lambda_0}) x_0 = x_0 .$$

λ_0 ist somit eine Unstetigkeitsstelle von E_λ, wobei der Eigenvektor x_0 in dem Unterraum liegt, der dem Projektionsoperator $E_{\lambda_0+0} - E_{\lambda_0}$ zugeordnet ist.

Hinlänglichkeit. Es sei $E_{\lambda_0+0} \neq E_{\lambda_0}$ und x_0 ein beliebiges Element des Unterraumes, der $E_{\lambda_0+0} - E_{\lambda_0}$ zugeordnet ist. Dann wird

$$(E_{\lambda_0+0} - E_{\lambda_0})\, x_0 = x_0 \,,$$

d. h., x_0 liegt in der orthogonalen Ergänzung von $L_{E_{\lambda_0}}$ in $L_{E_{\lambda_0+0}}$. Daher ist

$$E_{\lambda_0+0}\, x_0 = x_0 \,, \qquad E_{\lambda_0}\, x_0 = 0 \,.$$

Also ist sicher

$$E_\lambda\, x_0 = x_0 \quad \text{für} \quad \lambda > \lambda_0$$

und folglich

$$E(\Delta)\, x_0 = x_0 \quad \text{für} \quad \Delta = [\lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon) \,.$$

Dann wird aber

$$A\, x_0 = A\, E(\Delta)\, x_0 = \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda_0+\varepsilon} \lambda\, dE_\lambda\, x_0 \,,$$

$$\lambda_0\, x_0 = \lambda_0\, E(\Delta)\, x_0 = \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda_0+\varepsilon} \lambda_0\, dE_\lambda\, x_0$$

und folglich

$$A\, x_0 - \lambda_0\, x_0 = \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda_0+\varepsilon} (\lambda - \lambda_0)\, dE_\lambda\, x_0 \,.$$

Hieraus ergibt sich

$$||A\, x_0 - \lambda_0\, x_0|| \leqq \varepsilon\, ||E(\Delta)\, x_0|| \leqq \varepsilon\, ||x_0|| \,,$$

und da ε beliebig war, ist

$$||A\, x_0 - \lambda_0\, x_0|| = 0 \,.$$

Wir haben gleichzeitig gefunden, daß der ganze Unterraum, der dem Operator $E_{\lambda_0+0} - E_{\lambda_0}$ zugeordnet ist, aus den Eigenvektoren von A besteht, die zu dem Eigenwert λ_0 gehören.

§ 6. Unbeschränkte lineare Operatoren. Grundlegende Begriffe und Definitionen

Im vorangegangenen Paragraphen untersuchten wir lineare beschränkte Operatoren, die auf dem gesamten Hilbert-Raum definiert waren. Jedoch entspricht eine ganze Reihe äußerst wichtiger Operatoren nicht diesen Voraussetzungen. Das gilt beispielsweise für den Differentiationsoperator

$$A = \frac{d}{dt} \,.$$

Er ist nur auf der in $L_2\,[-\pi, \pi]$ überall dichten Menge der differenzierbaren, quadratisch summierbaren Funktionen definiert. Der Differentiationsoperator ist auf dieser Menge nicht beschränkt, denn für $x_n(t) = \sin n\, t$ gilt

$$||A\, x_n|| = n\, ||x_n|| \,.$$

Ist ein linearer Operator auf einer überall dichten Menge des Raumes H definiert und beschränkt, so ist er auf dieser Menge gleichmäßig stetig und kann eindeutig stetig auf den gesamten Raum fortgesetzt werden. Für eine gewisse Klasse von Operatoren ist auch die Umkehrung gültig.

Satz 1. *Ist ein linearer Operator A auf dem gesamten Raum H definiert und gilt für alle x und y aus H $(A\,x, y) = (x, A\,y)$, so ist er beschränkt und damit stetig.*

Wir nehmen das Gegenteil an. Dann existiert eine Folge $\{x_n\} \subset H$ mit

$$||x_n|| = 1 \quad \text{und} \quad ||A\,x_n|| \to \infty. \tag{1}$$

Wir betrachten die Funktionale

$$f_n(x) = (A\,x, x_n) = (x, A\,x_n)\,.$$

Sie sind additiv und homogen, außerdem gilt

$$|f_n(x)| = |(A\,x, x_n)| \leqq ||A\,x||\;||x_n|| = ||A\,x|| = c_x\,.$$

Nach dem Satz von Banach-Steinhaus sind die Normen dieser Funktionale gleichmäßig beschränkt: $||f_n|| \leqq c$. Nun ist $||f_n|| = ||A\,x_n||$, daher $||A\,x_n|| \leqq c$, und das ist wegen (1) unmöglich. Wir gelangen also zu einem Widerspruch. Damit ist Satz 1 bewiesen.

Wir untersuchen jetzt diejenigen auf einer in H überall dichten linearen Mannigfaltigkeit $D(A) \subset H$ definierten Operatoren A, deren Wertebereich in H liegt und die auf $D(A)$ linear sind, d. h. für alle $x, y \in D(A)$ und alle Zahlen α und β der Beziehung

$$A\,(\alpha\,x + \beta\,y) = \alpha\,A\,x + \beta\,A\,y$$

genügen.

Die Menge $D(A)$ heißt *Definitionsbereich* des jeweiligen Operators. Die Menge $R(A) = A\,D(A)$ heißt *Wertebereich* des Operators. Zwei Operatoren A und B sehen wir als *gleich* an, wenn $D(A) = D(B)$ und $A\,x = B\,x$ für jedes $x \in D(A)$ ist. Ist jedoch $D(A) \subset D(B)$ und $A\,x = B\,x$ für jedes $x \in D(A)$, so nennen wir den Operator B eine *Erweiterung* oder *Fortsetzung* des Operators A und den Operator A eine *Einengung* des Operators B. Wir werden in diesem Falle $A \subset B$ schreiben.

A und B mögen zwei lineare Operatoren mit den Definitionsbereichen $D(A)$ und $D(B)$ sein. Auf den Elementen der linearen Mannigfaltigkeit $L = D(A) \cap D(B)$ sind beide Operatoren erklärt. Der Operator

$$(A + B)\,x = A\,x + B\,x\,, \qquad x \in L\,,$$

heißt *Summe* der Operatoren A und B. Die Mannigfaltigkeit L enthält immer das Nullelement und ist folglich nicht leer, die Summe der Operatoren aber erhält erst dann einen nichttrivialen Sinn, wenn L ein von Null verschiedenes Element enthält. Diese Bemerkung bezieht sich auch auf die folgenden Definitionen.

In $D(A)$ existiere nun eine Teilmenge D, so daß $A x \in D(B)$ für alle $x \in D$ wird. Dann ist das *Produkt* des Operators B mit dem Operator A auf D definiert:

$$(B A) x = B (A x) .$$

Analog wird das Produkt $A B$ erklärt.

Bildet der Operator A $D(A)$ auf $R(A)$ umkehrbar eindeutig ab, so existiert der *inverse* Operator A^{-1} mit dem Definitionsbereich $R(A)$ und dem Wertebereich $D(A)$. Es kann der Fall eintreten, daß $R(A) = H$ und der inverse Operator A^{-1} beschränkt ist, obwohl A ein unbeschränkter linearer Operator war. Es kann auch der umgekehrte Fall vorkommen: Ein beschränkter linearer Operator A besitzt einen unbeschränkten inversen Operator. So verhalten sich z. B. die Operatoren auf S. 111, wenn man sie als Operatoren im Raum $L_2[0, 1]$ betrachtet.

Der adjungierte Operator. A sei ein auf einer in H überall dichten Mannigfaltigkeit $D(A)$ definierter linearer Operator. Wenn das Skalarprodukt $(A x, y)$ für ein festes y und jedes $x \in D(A)$ in der Form

$$(A x, y) = (x, y^*) \tag{2}$$

dargestellt werden kann, sagen wir, y liege im Definitionsbereich $D(A^*)$ des zu A *adjungierten* Operators A^*, und der adjungierte Operator selbst wird durch die Gleichung

$$A^* y = y^*$$

erklärt. Da $D(A)$ nach Voraussetzung in H überall dicht liegt, wird durch Gleichung (2) das Element y^* eindeutig bestimmt. $D(A^*)$ wird eine lineare Mannigfaltigkeit und A^* ein linearer Operator. Der Definitionsbereich des adjungierten Operators ist immer nichtleer, er enthält mit Sicherheit das Nullelement.

Beispiel. H sei gleich $L_2(G)$ und G ein beschränkter meßbarer Bereich der x, y-Ebene. Wir betrachten den Operator $A = \frac{\partial^l}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2}}$. Er ist auf der in G überall dichten Mannigfaltigkeit derjenigen Funktionen $\psi(x, y)$ definiert, die mit ihren Ableitungen bis l-ter Ordnung einschließlich stetig sind und in einem Randstreifen des Gebietes G (der von der Funktion abhängen kann) verschwinden. Da $D(A)$ in $L_2(G)$ überall dicht lag, existiert der adjungierte Operator A^*. Wir erinnern uns an die auf S. 65 gegebene Definition und finden, daß $D(A^*)$ die Gesamtheit derjenigen Funktionen $\varphi(x, y)$ ist, die eine verallgemeinerte Ableitung l-ter Ordnung besitzen; A^* ist der Operator der verallgemeinerten Differentiation $A^* \varphi = \frac{\partial^l \varphi}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2}}$.

Ein auf $D(A)$ definierter linearer Operator A heißt *symmetrisch*, wenn für alle $x, y \in D(A)$ die Gleichung

$$(A x, y) = (x, A y)$$

erfüllt ist.

Im Falle beschränkter Operatoren fällt der Begriff des symmetrischen Operators mit dem Begriff des selbstadjungierten zusammen. Für unbeschränkte Operatoren sind das, wie wir unten sehen werden, verschiedene Begriffe.

Wie bei den beschränkten Operatoren ist für die Symmetrie von A notwendig und hinreichend, daß $(A\,x, x)$ für jedes $x \in D(A)$ reell ist. Bei einem symmetrischen Operator zieht die Enthaltenseinsrelation $y \in D(A)$ die Relation $y \in D(A^*)$ nach sich, und es gilt für $y \in D(A)$

$$A^*\,y = A\,y\,.$$

Deshalb ist $A^* \supset A$, d. h., für einen symmetrischen Operator A ist der zu ihm adjungierte Operator eine Erweiterung von A.

Aus $A \subset B$ folgt $B^* \subset A^*$.

Satz 2. *Existiert der Operator A^{-1} und besitzt ebenso wie der Operator A einen überall dichten Definitionsbereich, so existiert $(A^*)^{-1}$ und ist gleich $(A^{-1})^*$.*

Es sei $y \in D\big((A^{-1})^*\big)$. Für alle $x \in D(A)$ gilt

$$(x, y) = (A^{-1}\,A\,x, y) = \big(A\,x, (A^{-1})^*\,y\big)\,.$$

Lesen wir diese Gleichung von rechts nach links, so sehen wir $(A^{-1})^*\,y \in D(A^*)$ und

$$A^*\,(A^{-1})^*\,y = y\,. \tag{3}$$

Analog ist bei $x' \in D(A^{-1})$, $y' \in D(A^*)$

$$(x', y') = (A\,A^{-1}\,x', y') = (A^{-1}\,x', A^*\,y')\,,$$

und daraus folgt wie oben $A^*\,y' \in D\big((A^{-1})^*\big)$ und

$$(A^{-1})^*\,A^*\,y' = y'\,. \tag{4}$$

Aus (3) und (4) folgt die Existenz von $(A^*)^{-1}$ und die Gleichheit mit $(A^{-1})^*$.

Ferner kann

$$(\lambda\,A)^* = \bar{\lambda}\,A^*\,,$$

$$(A + B^*) \supset A^* + B^*\,,$$

$$(A\,B)^* \supset B^*\,A^*$$

bewiesen werden.

Wir berühren jetzt die Frage der Vertauschbarkeit zweier Operatoren. A sei ein linearer Operator mit dem Definitionsbereich $D(A)$ und B ein beschränkter linearer Operator. Man sagt, B ist mit A *vertauschbar* oder B *kommutiert* mit A, wenn aus $x \in D(A)$ folgt $B\,x \in D(A)$ und $A\,B\,x = B\,A\,x$. Den allgemeineren Fall der Vertauschbarkeit zweier unbeschränkter Operatoren definieren wir weiter unten.

Wir geben noch eine Definition an. A und B seien lineare Operatoren. A sei mit jedem beschränkten Operator vertauschbar, der mit B kommutiert. Wir werden dann sagen, daß der Operator A mit B *ko-kommutiert*.

Abgeschlossene Operatoren. Die Abschließung eines Operators. Ein unbeschränkter linearer Operator ist nicht stetig. Aus der Beziehung $x_n \to x_0$ folgt im allgemeinen nicht, daß $\{A x_n\}$ gegen einen Grenzwert strebt. Jedoch besitzen einige unbeschränkte lineare Operatoren eine schwächere Eigenschaft, die zum Teil die Stetigkeit ersetzt.

Sei A ein linearer Operator mit dem Definitionsbereich $D(A)$. Folgt aus den Bedingungen $\{x_n\} \subset D(A)$, $x_n \to x_0$, $A x_n \to y_0$

$$x_0 \in D(A) \quad \text{und} \quad y_0 = A x_0 ,$$

so heißt der Operator A *abgeschlossen*.

Als Beispiel eines abgeschlossenen Operators kann ein zu einem beliebigen linearen Operator adjungierter Operator dienen.

Es sei $y_n \in D(A^*)$ und

$$y_n \to y_0 , \quad A^* y_n \to z_0 .$$

Für jedes $x \in D(A)$ gilt

$$(x, A^* y_n) = (A x, y_n) \to (A x, y_0) .$$

Andererseits ist

$$(x, A^* y_n) \to (x, z_0) .$$

Folglich gilt für jedes $x \in D(A)$

$$(A x, y_0) = (x, z_0) .$$

Demnach ist $y_0 \in D(A^*)$ und $A^* y_0 = z_0$.

Als Beispiel eines nicht abgeschlossenen Operators dient der auf S. 245 eingeführte partielle Differentiationsoperator.

Wir werden sagen, der Operator A erlaube eine *Abschließung*, wenn ein abgeschlossener Operator B existiert, der eine Erweiterung von A darstellt (d. h. $B \supset A$). Unter den verschiedenen abgeschlossenen Erweiterungen eines gegebenen, eine Abschließung erlaubenden Operators A kann man eine sogenannte *minimale abgeschlossene Erweiterung* finden, die in jeder anderen abgeschlossenen Erweiterung von A enthalten ist. Die minimale abgeschlossene Erweiterung von A heißt die *Abschließung* von A und wird mit $\bar{A}$ bezeichnet. Die Existenz der Abschließung und ihre Eindeutigkeit für jeden eine Abschließung erlaubenden Operator werden wir nicht beweisen, sondern uns nur auf den Fall symmetrischer Operatoren beschränken.

Satz 3. *Zu jedem symmetrischen Operator A kann eine Abschließung $\bar{A}$ konstruiert werden.*

Wir bezeichnen mit $D(\bar{A})$ die Gesamtheit der Elemente $x \in H$, für die es eine Folge $\{x_n\} \subset D(A)$ mit

$$x_n \to x , \quad A x_n \to y$$

gibt, wobei y ein Element aus H ist.

Offenbar ist $D(\bar{A})$ eine lineare Mannigfaltigkeit und $D(A) \subset D(\bar{A})$. Wir setzen für $x \in D(\bar{A})$

$$\bar{A}\, x = y \, .$$

Diese Definition ist eindeutig. $\{x_n'\} \subset D(A)$ sei eine andere Folge mit

$$x_n' \to x \, , \qquad A\, x_n' \to y' \, .$$

Wegen der Symmetrie des Operators ist für jedes $h \in D(A)$

$$(h, y - y') = \lim_n (h, A\, x_n - A\, x_n') = \lim_n (A\, h, x_n - x_n') = (A\, h, x - x) = 0 \, .$$

Da $D(A)$ in H überall dicht ist, folgt $y = y'$. Der Operator $\bar{A}$ ist offensichtlich linear und eine Erweiterung des Operators A.

Der Operator $\bar{A}$ ist symmetrisch, weil für alle $x, y \in D(\bar{A})$

$$(x, \bar{A}\, y) = \lim_n (x_n, A\, y_n) = \lim_n (A\, x_n, y_n) = (\bar{A}\, x, y)$$

gilt.

Der Operator $\bar{A}$ ist abgeschlossen. Unter den Voraussetzungen $\{x_n\} \subset D(\bar{A})$, $x_n \to x$, $\bar{A}\, x_n \to y$ gibt es wegen $x_n \in D(\bar{A})$ ein Element $x_n' \in D(A)$, so daß

$$\|x_n - x_n'\| < \frac{1}{n} \, , \qquad \|\bar{A}\, x_n - A\, x_n'\| < \frac{1}{n}$$

wird. Dann aber folgt $x_n' \to x$, $A\, x_n' \to y$ und damit nach der Definition der Menge $D(\bar{A})$ und des Operators $\bar{A}$: $x \in D(\bar{A})$ und $\bar{A}\, x = y$.

Daß $\bar{A}$ eine minimale abgeschlossene symmetrische Erweiterung des Operators A ist, ergibt sich daraus, daß jedes Element $x \in D(\bar{A})$ dem Definitionsbereich einer abgeschlossenen Erweiterung des Operators A angehören muß.

Daraus ergibt sich auch bereits die Eindeutigkeit der Abschließung $\bar{A}$.

Bemerkung. *Ist $\bar{A}$ die Abschließung eines symmetrischen Operators A, so ist $(\bar{A})^* = A^*$.*

Wegen $A \subset \bar{A}$ ist $(\bar{A})^* \subset A^*$, und man braucht nur die umgekehrte Enthaltenseinsrelation nachzuweisen.

Es sei $y \in D(A^*)$ und x ein Element von $D(\bar{A})$. Es ergibt sich

$$(\bar{A}\, x, y) = \lim_n (A\, x_n, y) = \lim_n (x_n, A^*\, y) = (x, A^*\, y) \, .$$

Diese Gleichung beinhaltet die Beziehungen $y \in D((\bar{A})^*)$ und $(\bar{A})^*\, y = A^*\, y$, d. h. $A^* \subset (\bar{A})^*$.

Der Graph eines Operators. Zur weitergehenden Behandlung des adjungierten Operators und der Abschließung führen wir den Begriff des Graphen eines Operators ein.

Wir betrachten einen Hilbert-Raum H. $\tilde{H}$ sei die Gesamtheit der Paare $\tilde{z} = \{x, y\}$, $x \in H$, $y \in H$, mit den üblichen Definitionen der linearen Opera-

tionen. Für $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2 \in \tilde{H}$, definieren wir das Skalarprodukt dieser Elemente mit Hilfe der Gleichung

$$(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) = (x_1, x_2) + (y_1, y_2)\,.$$

Alle Eigenschaften eines Skalarproduktes liegen vor, alle übrigen Axiome des HILBERT-Raumes sind erfüllt. $\tilde{H}$ ist damit auch ein HILBERT-Raum.

Ist in einem Raum H ein linearer Operator A gegeben, so heißt die Menge $\mathfrak{Gr}(A) \subset \tilde{H}$ aller Elemente der Form

$$\{x, A\,x\}\,, \qquad x \in D(A)\,,$$

der *Graph* des Operators A.

$\mathfrak{Gr}(A)$ ist eine durch den Operator A eindeutig definierte lineare Mannigfaltigkeit. Umgekehrt ergibt $\mathfrak{Gr}(A) = \mathfrak{Gr}(B)$ auch $A = B$. Schließlich gilt: Ein Operator A ist genau dann abgeschlossen, wenn $\mathfrak{Gr}(A)$ ein abgeschlossener Unterraum von $\tilde{H}$ ist.

In $\tilde{H}$ wird durch die Gleichung

$$\tilde{U}\{x, y\} = \{y, -x\}$$

ein Operator $\tilde{U}$ bestimmt. Es gilt

$$\tilde{U}^2 = -\tilde{E}\,, \qquad \tilde{U}^* = -\tilde{U}$$

und

$$\tilde{U}^*\,\tilde{U} = \tilde{U}\,\tilde{U}^* = \tilde{E}\,,$$

d. h., $\tilde{U}$ ist ein unitärer Operator.

Hilfssatz. *Ist A ein auf einer überall dichten linearen Mannigfaltigkeit $D(A)$ definierter linearer Operator, so ist $\mathfrak{Gr}(A^*)$ das orthogonale Komplement der linearen Mannigfaltigkeit $\tilde{U}(\mathfrak{Gr}(A))$.*

Zum Beweis sei $\tilde{z} = \{x', y'\} \in \tilde{H} \dot{-} \overline{\tilde{U}(\mathfrak{Gr}(A))}$. Das bedeutet für jedes $x \in D(A)$

$$(\{x', y'\}\,, \quad \{A\,x, -x\}) = 0\,.$$

Daraus ergibt sich

$$(x', A\,x) = (y', x)$$

und damit $x' \in D(A^*)$ und $y' = A^*x'$, d. h. $\{x', y'\} \in \mathfrak{Gr}(A^*)$. Durch Rückwärtsschließen ergibt sich aus der Beziehung $\{x', y'\} \in \mathfrak{Gr}(A^*)$ die Orthogonalität dieses Elementes zu jedem Element aus $\tilde{U}(\mathfrak{Gr}(A))$. Der Hilfssatz ist damit bewiesen.

Satz 4. *Ist A ein auf einer überall in H dichten Menge $D(A)$ definierter abgeschlossener Operator, so ist auch $D(A^*)$ überall dicht und $(A^*)^* = A^{**}$ eindeutig bestimmt. Es gilt $A^{**} = A$.*

Da A abgeschlossen ist, ist $\mathfrak{Gr}(A)$ eine abgeschlossene lineare Mannigfaltigkeit, und folglich ist $\tilde{U}(\mathfrak{Gr}(A))$ auch abgeschlossen. Daher gilt

$$\tilde{H} = \tilde{U}(\mathfrak{Gr}(A)) \dot{+} \mathfrak{Gr}(A^*)\,. \tag{5}$$

Durch die Anwendung des Operators $\tilde{U}$ auf beide Seiten der Gleichung erhalten wir unter Berücksichtigung von $\tilde{U}^2(\mathfrak{Gr}(A)) = -\tilde{E}\,\mathfrak{Gr}(A) = \mathfrak{Gr}(A)$ und der Tatsache, daß ein unitärer Operator orthogonale Elemente wieder in orthogonale überführt,

$$\tilde{U}(\tilde{H}) = \tilde{H} = \mathfrak{Gr}(A) \dotplus \tilde{U}(\mathfrak{Gr}(A^*))\,. \tag{6}$$

Wir zeigen zunächst, daß $D(A^*)$ überall dicht ist. Wäre das nicht der Fall, so würde ein von Null verschiedenes zu $D(A^*)$ orthogonales Element $y_0 \in H$ existieren. Das Element $\tilde{y}_0 = \{0, y_0\} \in \tilde{H}$ wird dann orthogonal zu $\tilde{U}(\mathfrak{Gr}(A^*))$, da für jedes $\{y, A^* y\} \in \mathfrak{Gr}(A^*)$ die Beziehung

$$(\{0, y_0\}, \tilde{U}\{y, A^* y\}) = (0, A^* y) - (y_0, y) = 0$$

gilt. Folglich ist $\{0, y_0\} \in \mathfrak{Gr}(A)$ und daher $y_0 = A\,0 = 0$. Der entstandene Widerspruch bestätigt die Richtigkeit der Behauptung.

Da $D(A^*)$ überall dicht ist, ist A^{**} eindeutig bestimmt. Die Gleichung $A^{**} = A$ folgt aus der Beziehung (6) und dem Hilfssatz.

Satz 5. *Der Operator A^{**} existiert genau dann, wenn der auf einer überall dichten Menge definierte Operator A abgeschlossen werden kann. In diesem Falle ist $A^{**} = \overline{A}$.*

Kann A zu $\overline{A}$ abgeschlossen werden, so existiert nach Satz 4 $(\overline{A})^{**}$, und es ist $(\overline{A})^{**} = \overline{A}$. Wegen $(\overline{A})^* = A^*$ ist aber $(\overline{A})^{**} = A^{**}$ und daher $A^{**} = \overline{A}$. Der erste Teil des Satzes ist damit bewiesen.

A^{**} möge existieren. Die Anwendung von Gleichung (5) auf A^* liefert

$$\tilde{H} = \tilde{U}(\mathfrak{Gr}(A^*)) \dotplus \mathfrak{Gr}(A^{**})\,. \tag{7}$$

Wendet man $\tilde{U}$ auf beide Seiten der Gleichung

$$\tilde{H} = \tilde{U}\overline{(\mathfrak{Gr}(A))} \dotplus \mathfrak{Gr}(A^*)$$

an, so ergibt sich

$$\tilde{H} = \tilde{U}(\mathfrak{Gr}(A^*)) \dotplus \overline{\mathfrak{Gr}(A)}\,. \tag{8}$$

Durch Vergleich von (7) und (8) erhält man $\mathfrak{Gr}(A) \subset \mathfrak{Gr}(A^{**})$, d. h., A ermöglicht die abgeschlossene Erweiterung A^{**}.

Invariante Unterräume, Reduzibilität. Auch für unbeschränkte Operatoren kann der Begriff des invarianten Unterraumes eingeführt werden.

Ein Unterraum L heißt *invarianter* Unterraum eines Operators A, wenn folgendes gilt:

1. Aus $x \in D(A)$ folgt $P\,x \in D(A)$ $(P = P_L)$;
2. aus $x \in D(A) \cap L$ folgt $A\,x \in L$ (d. h. $P\,A\,P\,x = A\,P\,x$ für alle $x \in D(A)$).

Aus 1 und $\overline{D(A)} = H$ folgt, daß $D(A) \cap L$ überall dicht in L ist.

Auch für unbeschränkte symmetrische Operatoren folgt aus der Invarianz von L die Invarianz von $M = H \dot{-} L$. Ist $x \in D(A)$ und $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in L$,

$x_2 \in M$, so ist, da L ein invarianter Unterraum ist, $x_1 \in D(A)$, und da $D(A)$ eine lineare Mannigfaltigkeit ist, $x_2 = x - x_1 \in D(A)$.

Ist weiter $x \in D(A) \cap M$ und y ein Element aus $D(A) \cap L$, so folgt wegen $A\,y \in L$ und $x \perp L$

$$(A\,x, y) = (x, A\,y) = 0 .$$

Somit ist das Element $A\,x$ orthogonal zu $D(A) \cap L$, und da diese Mannigfaltigkeit überall dicht in L liegt, so ist $A\,x \perp L$ und damit $A\,x \in M$.

Ist L ein invarianter Unterraum des Operators A, so sagt man auch, L *reduziere* A.

Satz 6. *Ein Unterraum L reduziert einen symmetrischen Operator A genau dann, wenn der Projektionsoperator P auf diesen Unterraum mit A vertauschbar ist.*

L sei ein invarianter Unterraum. Dann folgt aus $x \in D(A)$: $P\,x \in D(A)$ und $P\,x \in D(A) \cap L$. Nach Bedingung 2 der Invarianz von L gilt

$$P\,A\,P\,x = A\,P\,x . \tag{9}$$

A ist ein symmetrischer Operator, daher ist $H \dot{-} L$ auch ein invarianter Unterraum von A. Deshalb gilt wie oben

$$(E - P)\,A\,(E - P)\,x = A\,(E - P)\,x$$

oder nach Auflösen der Klammern und Vereinfachen

$$P\,A\,P\,x = P\,A\,x . \tag{10}$$

Aus (9) und (10) folgt $P\,A\,x = A\,P\,x$ und damit die Vertauschbarkeit von A mit dem beschränkten Operator P.

Es seien umgekehrt A und P vertauschbar. Dann folgt zunächst aus $x \in D(A)$ die Beziehung $P\,x \in D(A)$.

Ferner ergibt sich für $x \in D(A) \cap L$

$$A\,x = A\,P\,x = P\,A\,x ,$$

d. h. $A\,x \in L$ und damit die Invarianz von L.

§ 7. Selbstadjungierte Operatoren und die Theorie der Erweiterungen symmetrischer Operatoren

Ein linearer (nicht unbedingt beschränkter) Operator A heißt *selbstadjungiert*, wenn $A = A^*$ ist. Diese Definition hat zur Folge, daß jeder selbstadjungierte Operator symmetrisch ist. Die umgekehrte Schlußfolgerung ist, wie wir unten sehen werden, nicht richtig.

Eine Reihe grundlegender Aussagen über das Spektrum beschränkter selbstadjungierter Operatoren kann auf den Fall unbeschränkter selbstadjungierter Operatoren übertragen werden. So sind alle Eigenwerte selbstadjungierter Operatoren reell, und die verschiedenen Eigenwerten entsprechenden Eigen-

elemente sind orthogonal; eine Zahl λ ist genau dann ein regulärer Wert des Operators, wenn eine Zahl c mit

$$||(A - \lambda E)\, x|| \geqq c\, ||x|| \tag{1}$$

für jedes $x \in D(A)$ existiert. Als Beispiel zeigen wir, wie die letzte Behauptung hergeleitet wird.

Ist λ ein regulärer Wert, dann existiert der beschränkte inverse Operator $R_\lambda = (A - \lambda E)^{-1}$. Daher ist

$$||x|| = ||R_\lambda (A - \lambda E)\, x|| \leqq ||R_\lambda||\, ||(A - \lambda E)\, x||\,,$$

und wir erhalten (1) mit $c = \frac{1}{||R_\lambda||}$. Nun sei (1) erfüllt. Wir untersuchen wiederum die aus allen Elementen der Form $y = (A - \lambda E)\, x$, $x \in D(A)$, bestehende Mannigfaltigkeit L. Die Beziehung zwischen $D(A)$ und L ist auf Grund von (1) umkehrbar eindeutig. L ist überall dicht in H. Wäre das nicht der Fall, so existierte in H ein Element $x_0 \neq 0$ mit $(x_0, y) = 0$ für jedes $y \in L$ oder

$$(x_0, A\, x - \lambda\, x) = 0 \tag{2}$$

für jedes $x \in D(A)$. Aus (2) ergibt sich

$$(A\, x, x_0) = (x, \bar{\lambda}\, x_0)\,.$$

Das bedeutet $x_0 \in D(A^*) = D(A)$ und

$$A^* x_0 = A\, x_0 = \bar{\lambda}\, x_0\,.$$

Aus den gleichen Überlegungen, wie sie im Falle beschränkter Operatoren angestellt wurden, folgt, daß das unmöglich ist.

Außerdem ist L abgeschlossen. Wir setzen $\{y_n\} \subset L$, $y_n \to y_0$. Unter der Bedingung $y_n = A_\lambda\, x_n$ ist nach (1)

$$||x_n - x_m|| \leqq \frac{1}{c}\, ||y_n - y_m||$$

und danach $||x_n - x_m|| \to 0$. Auf Grund der Abgeschlossenheit des Operators A (selbstadjungierte Operatoren sind immer abgeschlossen) gilt

$$x_0 = \lim_n x_n \in D(A)\,, \qquad y_0 = A_\lambda\, x_0\,,$$

und damit ist die Abgeschlossenheit von L bewiesen[1]). Der Abschluß des Beweises der Regularität von λ verläuft genauso wie im Falle eines beschränkten Operators.

Folgerung 1. *Eine Zahl λ gehört dem Spektrum eines selbstadjungierten Operators genau dann an, wenn in $D(A)$ eine Folge $\{x_n\}$ mit $||x_n|| = 1$ existiert, so daß $||A\, x_n - \lambda\, x_n|| \to 0$ für $n \to \infty$ strebt.*

Folgerung 2. *Die Menge der regulären Punkte eines selbstadjungierten Operators ist eine offene Menge, mithin ist das Spektrum eine abgeschlossene Menge.*

[1]) Vgl. S. 253.

Folgerung 3. *Jedes nichtreelle λ ist ein regulärer Wert eines selbstadjungierten Operators, das Spektrum eines solchen Operators liegt also gänzlich auf der reellen Achse.*

Die Theorie der Erweiterungen symmetrischer Operatoren. Es sei ein symmetrischer Operator A mit einem wie immer überall dicht in H vorausgesetzten Definitionsbereich $D(A)$ gegeben.

Sofern A nicht abgeschlossen ist, werden wir ihn vorbereitend abschließen. Deshalb setzen wir A im weiteren als abgeschlossen voraus. Wir beschreiben zunächst in großen Zügen einen Prozeß, der die Konstruktion von symmetrischen Erweiterungen von A erlaubt, insbesondere die Konstruktion einer Erweiterung eines symmetrischen Operators zu einem selbstadjungierten.

B sei eine symmetrische Erweiterung des Operators A. Aus $A \subset B$ folgt dann $B^* \subset A^*$, und da $B \subset B^*$ ist, auch

$$B \subset A^* .$$

Somit ist jede symmetrische Erweiterung eines Operators A ein Teil des adjungierten Operators A^*:

$$D(B) \subset D(A^*) , \quad B\,y = A^*\,y \quad \text{für} \quad y \in D(B) . \tag{3}$$

Wegen der Symmetrie des Operators B wird $(B\,y, y)$ reell für jedes $y \in D(B)$. Nun ist aber $(B\,y, y) = (A^*\,y, y)$ und deshalb $D(B) \subset \Gamma$, worin Γ die Menge[1]) aller Elemente y aus $D(A)$ bezeichnet, für die die quadratische Form $(A^*\,y, y)$ reellwertig ist.

Genügt umgekehrt eine lineare Mannigfaltigkeit L der Bedingung

$$D(A) \subset L \subset \Gamma ,$$

so ist der auf L durch die Gleichung

$$B\,y = A^*\,y$$

definierte Operator B eine symmetrische Erweiterung des Operators A.

Es sei L_i die lineare Mannigfaltigkeit aller Elemente der Form $y = (A + i\,E)\,x$, worin i die imaginäre Einheit ist und x den Bereich $D(A)$ durchläuft. L_i ist dann ein Unterraum. Zunächst erhalten wir durch eine einfache Rechnung

$$||(A \pm i\,E)\,x||^2 = ||A\,x||^2 + ||x||^2$$

und daraus

$$||(A + i\,E)\,x|| \geqq ||x|| .$$

Nun sei $y_n = (A + i\,E)\,x_n$ und $y_n \to y_0$. Dann strebt für $n, m \to \infty$ $||y_n - y_m|| \to 0$ und demzufolge auch $||x_n - x_m|| \to 0$. Aus der Vollständigkeit von H folgt $x_n \to x_0$.

Somit ergibt sich $x_n \in D(A)$, $x_n \to x_0$, $A\,x_n = y_n - i\,x_n \to y_0 - i\,x_0$. Da A ein abgeschlossener Operator ist, gilt $x_0 \in D(A)$ und $A\,x_0 = y_0 - i\,x_0$ und daraus folgend $y_0 \in L_i$. Die Abgeschlossenheit von L_i ist damit bewiesen.

---

1) Die Menge Γ bildet keine lineare Mannigfaltigkeit.

Ein Element z ist genau dann orthogonal zum Unterraum L_i, wenn für jedes $x \in D(A)$ die Beziehung

$$(z, A x + i x) = 0$$

oder

$$(A x, z) = (x, i z)$$

erfüllt ist, d. h. wenn $z \in D(A^*)$ und $A^* z = i z$ ist. Folglich ist das orthogonale Komplement N_i zu L_i der Unterraum der Eigenelemente des Operators A^*, die dem Eigenwert i entsprechen:

$$H = L_i \dotplus N_i . \tag{4}$$

Analog ergibt sich

$$H = L_{-i} \dotplus N_{-i} . \tag{5}$$

Hilfssatz 1. *Der Definitionsbereich $D(A^*)$ des zu einem abgeschlossenen symmetrischen Operators A adjungierten Operators A^* ist die direkte Summe der linearen Mannigfaltigkeit $D(A)$ und der Räume N_i und N_{-i}:*

$$D(A^*) = D(A) \oplus N_i \oplus N_{-i} . \tag{6}$$

y sei ein Element aus $D(A^*)$. Wir betrachten das Element $A^* y - i y$. Auf Grund von (5) ist

$$A^* y - i y = (A x - i x) + \tilde{z}_0 .$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen $A x = A^* x$ und $A^* \tilde{z}_0 = - i \tilde{z}_0$ ergibt die vorhergehende Beziehung

$$\begin{aligned} A^*\left(y - x - \frac{1}{2} i \tilde{z}_0\right) &= i (y - x) + \tilde{z}_0 + A^*\left(-\frac{1}{2} i \tilde{z}_0\right) \\ &= i (y - x) + \tilde{z}_0 - \frac{1}{2} i (-i) \tilde{z}_0 = i (y - x) + \frac{1}{2} \tilde{z}_0 \\ &= i (y - x) + \frac{1}{2} i (-i) \tilde{z}_0 = i\left(y - x - \frac{1}{2} i \tilde{z}_0\right). \end{aligned}$$

Mithin ist

$$y - x - \frac{1}{2} i \tilde{z}_0 = z \in N_i .$$

Setzt man $\frac{1}{2} i \tilde{z}_0 = \tilde{z}$, so gilt

$$y = x \dotplus z + \tilde{z} , \tag{7}$$

und y ist in geforderter Weise zerlegt. Wir zeigen, daß diese Zerlegung eindeutig ist. Sei

$$y = x_1 + z_1 + \tilde{z}_1$$

eine andere Zerlegung desselben Elementes y. Dann ist

$$(x - x_1) + (z - z_1) + (\tilde{z} - \tilde{z}_1) = 0 . \tag{8}$$

Auf beide Seiten der Gleichung (8) wird der Operator A^* angewandt, das ergibt

$$A (x - x_1) + i (z - z_1) - i (\tilde{z} - \tilde{z}_1) = 0 . \tag{9}$$

Durch Multiplikation von (8) mit i und Subtraktion von (9) erhalten wir

$$[A(x - x_1) - i(x - x_1)] - 2i(\tilde{z} - \tilde{z}_1) = 0\,.$$

Die auf der linken Seite der Gleichung stehenden Summanden sind orthogonal:

$$A(x - x_1) - i(x - x_1) \perp 2i(\tilde{z} - \tilde{z}_1)\,.$$

Somit ist

$$2i(\tilde{z} - \tilde{z}_1) = 0$$

oder $\tilde{z} = \tilde{z}_1$. Analog ergibt sich $z = z_1$, und daher ist $x = x_1$. Der Hilfssatz ist damit vollständig bewiesen.

Anstelle der imaginären Einheit i kann man eine beliebige nichtreelle Zahl λ nehmen. Wir erhalten eine andere Zerlegung

$$D(A^*) = D(A) \oplus N_\lambda \oplus N_{\bar{\lambda}}\,.$$

Die Unterräume N_λ und $N_{\bar{\lambda}}$ sind im allgemeinen für verschiedene λ verschieden. Man kann jedoch beweisen: Liegt λ in der oberen Halbebene, so ist die Dimension von N_λ gleich der von N_i und die von $N_{\bar{\lambda}}$ gleich der von N_{-i}. Die Dimensionen der Unterräume N_i und N_{-i} heißen *Defektindizes* des Operators A, und die Unterräume N_λ und $N_{\bar{\lambda}}$ heißen *defekte Unterräume.*

Hilfssatz 2. *Das Element* $y \in D(A^*)$ *liegt genau dann in der Menge* Γ (s. S. 253), *wenn in der Zerlegung* (7) *die Gleichung*

$$\|z\| = \|\tilde{z}\|$$

gilt.

Ist $y = x + z + \tilde{z}$, so wird nämlich

$$\begin{aligned}(A^* y, y) &= \big(A^* x + A^*(z + \tilde{z}), x + (z + \tilde{z})\big)\\ &= (A x, x) + (A x, z + \tilde{z}) + \big(A^*(z + \tilde{z}), x\big)\\ &\quad + \big(A^*(z + \tilde{z}), z + \tilde{z}\big)\,.\end{aligned}$$

Da $(A x, x)$ reell und

$$(A x, z + \tilde{z}) + \big(A^*(z + \tilde{z}), x\big) = \big(x, A^*(z + \tilde{z})\big) + \big(A^*(z + \tilde{z}), x\big)$$

als Summe konjugiert komplexer Größen ebenfalls reell ist, gilt

$$\operatorname{Im}(A^* y, y) = \operatorname{Im}\big(A^*(z + \tilde{z}), z + \tilde{z}\big)\,.$$

Weiter ist

$$\begin{aligned}\big(A^*(z + \tilde{z}), z + \tilde{z}\big) &= (i z - i\tilde{z}, z + \tilde{z})\\ &= i\|z\|^2 + i(z, \tilde{z}) - i(\tilde{z}, z) - i\|\tilde{z}\|^2\,.\end{aligned}$$

Wiederum ist $i(z, \tilde{z}) - i(\tilde{z}, z)$ als Summe konjugiert komplexer Größen reell. Daher wird

$$\operatorname{Im}\big(A^*(z + \tilde{z}), z + \tilde{z}\big) = i\,(\|z\|^2 - \|\tilde{z}\|^2)\,.$$

Hieraus folgt die Behauptung des Hilfssatzes.

Satz 1. *Jeder symmetrischen Erweiterung B eines abgeschlossenen symmetrischen Operators A entsprechen zwei lineare Mannigfaltigkeiten $T_i \subset N_i$, $T_{-i} \subset N_{-i}$ und ein isometrischer Operator U, der T_i auf T_{-i} abbildet, mit folgenden Eigenschaften:*

a) *Der Definitionsbereich $D(B)$ des Operators B besteht aus den Elementen der Form*

$$y = x + z + U z\,, \tag{10}$$

wobei x ein beliebiges Element aus $D(A)$ und z ein beliebiges Element aus T_i ist.

b) *Die Werte des Operators B auf den Elementen der Form* (10) *berechnen sich nach der Gleichung*

$$B y = A x + i z - i U z\,. \tag{11}$$

Sind umgekehrt zwei lineare Mannigfaltigkeiten $T_i \subset N_i$, $T_{-i} \subset N_{-i}$ und ein isometrischer Operator U, der T_i auf T_{-i} abbildet, gegeben, so stellt der Operator B, der auf der Menge der Elemente der Form (10) *durch Gleichung* (11) *definiert wird, eine symmetrische Erweiterung des Operators A dar.*

Der Operator B ist genau dann abgeschlossen, wenn es die Mannigfaltigkeiten T_i und T_{-i} sind.

B sei eine symmetrische Erweiterung des Operators A und $y \in D(B)$. Wie wir bereits sahen, ist $D(B) \subset D(A^*)$, und y hat nach Gleichung (7) die Form

$$y = x + z + \tilde{z}\,, \tag{12}$$

wobei wegen $y \in \Gamma$ nach Hilfssatz 2

$$\|z\| = \|\tilde{z}\| \tag{13}$$

ist. Durchläuft nun y den Bereich $D(B)$, so durchläuft z eine lineare Mannigfaltigkeit T_i und das Element $\tilde{z}$ eine lineare Mannigfaltigkeit T_{-i}. Dabei kann einem Element $z \in T_i$ nur ein Element $\tilde{z} \in T_{-i}$ entsprechen. Es ist nämlich für

$$y_1 = x_1 + z_1 + \tilde{z}_1\,, \quad y_2 = x_2 + z_1 + \tilde{z}_2\,, \quad y_1, y_2 \in D(B)\,,$$

auch

$$y_1 - y_2 = x_1 - x_2 + 0 + (\tilde{z}_1 - \tilde{z}_2) \in D(B) \subset \Gamma$$

und deshalb nach (13)

$$\|\tilde{z}_1 - \tilde{z}_2\| = \|0\| = 0\,,$$

d. h. $\tilde{z}_1 = \tilde{z}_2$.

Indem einem Element z das ihm durch Gleichung (12) entsprechende Element $\tilde{z}$ zugeordnet wird, erhalten wir eine isomorphe und isometrische Abbildung von T_i auf T_{-i}. Wir bezeichnen den Operator dieser Abbildung mit U und gelangen dadurch zur Gleichung (10) und zu der Beziehung

$$B y = A^* y = A^* (x + z + U z) = A x + i z - i U z\,.$$

Damit ist auch Gleichung (11) bewiesen.

Umgekehrt seien nun $T_i \subset N_i$ und $T_{-i} \subset N_{-i}$ zwei lineare Mannigfaltigkeiten und U ein isometrischer Operator, der T_i auf T_{-i} abbildet. Der durch Gleichung

(11) auf den Elementen der Form (10) definierte Operator B ist eine symmetrische Erweiterung des Operators A, da die lineare Mannigfaltigkeit $D(B)$ der Elemente der Form (10) der Bedingung

$$D(B) \subset \Gamma \cap D(A^*)$$

genügt und da auf $D(B)$ die Gleichung

$$B\, y = A^*\, y$$

gilt.

Wir beweisen die letzte Behauptung des Satzes. Für die Abgeschlossenheit des Operators B ist die Abgeschlossenheit der Mannigfaltigkeit L_i' der Elemente der Form $(B + i\, E)\, y$, $y \in D(B)$, notwendig und hinreichend. Die Notwendigkeit wurde auf S. 253 hergeleitet. Um die Hinlänglichkeit nachzuweisen, nehmen wir an, daß L_i' abgeschlossen, aber B nicht abgeschlossen ist. Durch das Abschließen von B fügen wir zu L_i' neue Häufungspunkte hinzu, folglich kann auch L_i' nicht abgeschlossen sein.

Für $y \in D(B)$ gilt

$$(B + i\, E)\, y = (B + i\, E)\, (x + z + \tilde{z}) = (A + i\, E)\, x + 2\, i\, z$$

und demzufolge

$$L_i' = L_i \dotplus T_i\,, \tag{14}$$

wobei L_i die Gesamtheit der Elemente der Form $(A + i\, E)\, x$, $x \in D(A)$, ist. Wegen der Abgeschlossenheit von L_i erweist sich L_i' genau dann als abgeschlossen, wenn T_i abgeschlossen ist.

Der Satz ist damit vollständig bewiesen.

Ein symmetrischer Operator A sei nach der oben angeführten Methode zu einem symmetrischen Operator B erweitert worden. Wir stellen die Frage nach den defekten Räumen und den Defektindizes dieser Erweiterung.

Satz 2. *B sei eine abgeschlossene symmetrische Erweiterung eines abgeschlossenen symmetrischen Operators A mit dem Definitionsbereich*

$$D(B) = D(A) + T_i + U(T_i)\,.$$

Wir bezeichnen mit (m_1, m_2) die Defektindizes des Operators A:

$$m_1 = \dim N_i\,, \qquad m_2 = \dim N_{-i}$$

und mit (m_1', m_2') die Defektindizes des Operators B:

$$m_1' = \dim N_i'\,, \qquad m_2' = \dim N_{-i}'\,,$$

N_i' und N_{-i}' sind die defekten Unterräume des Operators B. Dann ist

$$N_i = N_i' \dotplus T_i\,, \qquad N_{-i} = N_{-i}' \dotplus T_{-i}$$

und folglich, wenn $\dim T_i = \dim T_{-i} = l$ *ist,*

$$m_1 = m_1' + l\,, \qquad m_2 = m_2' + l\,.$$

Nach Gleichung (4) ist

$$H = L_i' + N_i'\,.$$

Wir benutzen (14):

$$L_i' = L_i \dotplus T_i\,.$$

Damit ergibt sich

$$H = L_i \dotplus N_i' \dotplus T_i\,.$$

Andererseits ist

$$H = L_i \dotplus N_i\,,$$

und daher gilt

$$N_i = N_i' \dotplus T_i\,.$$

Analog wird die Zerlegung

$$N_{-i} = N'_{-i} \dotplus T_{-i}$$

bewiesen.

Aus diesen Gleichungen ergibt sich unmittelbar die Beziehung zwischen den Defektindizes.

Wir kommen jetzt zu den sogenannten *maximalen symmetrischen Erweiterungen* eines symmetrischen Operators.

Ein Operator A habe die Defektindizes (0, 0). Das bedeutet, daß die defekten Räume N_i und N_{-i} nur aus den Nullelementen bestehen und $D(A^*) = D(A)$ ist. Das wiederum heißt, daß A ein selbstadjungierter Operator ist und keine symmetrische Erweiterung besitzt.

Die Defektindizes des Operators A seien endlich: (m_1, m_2). Wir nehmen zunächst an $m_1 = m_2 = m \neq 0$. In N_i und N_{-i} wählen wir vollständige Orthonormalsysteme $e_1, e_2, \ldots, e_m$ und $e_1', e_2', \ldots, e_m'$ und ordnen dem Element $z = \sum_{k=1}^{m} c_k\, e_k \in N_i$ das Element $\tilde{z} = \sum_{k=1}^{m} c_k\, e_k' \in N_{-i}$ zu. Diese Zuordnung ist offensichtlich isometrisch und isomorph und erzeugt einen isometrischen Operator U, der ganz N_i auf ganz N_{-i} abbildet. Als Unterräume T_i und T_{-i} können N_i und N_{-i} genommen werden:

$$D(B) = D(A) \dotplus N_i \dotplus U(N_i)\,.$$

Der Operator B hat dann die Defektindizes (0, 0) und wird demzufolge eine selbstadjungierte Erweiterung des symmetrischen Operators A. Die Menge solcher Erweiterungen ist unendlich. Wir können nämlich dem Element

$$z = \sum_{k=1}^{m} c_k\, e_k$$

das Element

$$\tilde{z}(\tau) = \sum_{k=1}^{m} c_k\, e^{i\tau}\, e_k'\,,$$

bei dem τ reell ist, zuordnen oder allgemeiner ein Element

$$\tilde{z}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m) = \sum_{k=1}^{m} c_k\, e^{i\tau_k}\, e_k'\,.$$

Wir erhalten dadurch ein Kontinuum isometrischer Operatoren $U_{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_m}$ und dementsprechend ein Kontinuum selbstadjungierter Erweiterungen.

Der Operator A besitze nun endliche verschiedene Defektindizes (m_1, m_2), z. B. $m_1 > m_2$. Wir wählen in N_i die ersten m_2 Elemente einer orthonormalen Basis und bezeichnen den durch sie erzeugten Teilraum mit T_i; als T_{-i} wählen wir ganz N_{-i}. Dann ist

$$D(B) = D(A) + T_i + U(T_i) = D(A) + T_i + N_{-i}\,.$$

Der symmetrische Operator B besitzt die Defektindizes $(m_1 - m_2, 0)$. Er läßt weitere symmetrische oder sogar selbstadjungierte Erweiterungen nicht zu. Ein symmetrischer Operator, bei dem ein Defektindex gleich Null, der andere aber ungleich Null ist, heißt *maximal*. Ein selbstadjungierter Operator (bei dem beide Defektindizes gleich Null sind) wird manchmal *hypermaximal* genannt. Besitzt ein Operator A die Defektindizes (m, ∞) oder (∞, m), so kann ähnlich wie oben A konstruktiv zu einem maximalen Operator erweitert werden; eine selbstadjungierte Erweiterung des Operators A existiert nicht.

Schließlich besitze der Operator A die Defektindizes (∞, ∞). Wir betrachten den separablen Fall, wo die Defektindizes $(\aleph_0, \aleph_0)$ werden. Solch ein Operator ermöglicht sowohl maximale als auch hypermaximale Erweiterungen. T_i sei ein abzählbar unendlichdimensionaler Teilraum des defekten Raumes N_i. Durch eine isomorphe und isometrische Abbildung von T_i auf N_{-i} erhalten wir einen maximalen Operator B mit dem Definitionsbereich

$$D(B) = D(A) + T_i + N_{-i}$$

und den Defektindizes $(m, 0)$, wobei m je nach Wahl von T_i endlich oder unendlich sein kann. Durch eine isomorphe und isometrische Abbildung von N_i auf ganz N_{-i} kommen wir zu einer selbstadjungierten Erweiterung B des Operators A.

Demnach erlaubt jeder symmetrische, aber nicht selbstadjungierte Operator A eine maximale oder eine selbstadjungierte Erweiterung. Es gibt ein ganzes Kontinuum von verschiedenen maximalen oder selbstadjungierten Erweiterungen des Operators A.

Ein Beispiel für die Erweiterung eines symmetrischen Operators wird weiter unten angegeben.

§ 8. Die Spektralzerlegung eines unbeschränkten selbstadjungierten Operators. Funktionen eines selbstadjungierten Operators

Die oben hergeleitete Integraldarstellung für beschränkte selbstadjungierte Operatoren kann auch auf unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren verallgemeinert werden. Wir führen diese Verallgemeinerung nach einer von F. Riesz und E. Lorch vorgeschlagenen Methode durch, die einen unbeschränkten Operator auf eine Folge beschränkter Operatoren reduziert.

Die Stieltjes-Integrale. E_λ, $-\infty < \lambda < +\infty$, sei eine *Zerlegung der Einheit*, d. h. eine Familie von Projektionsoperatoren, die von einem reellen Parameter λ

abhängen und folgende Eigenschaften besitzen:

1. $E_\lambda \leqq E_\mu$ für $\lambda < \mu$,
2. $E_{\lambda-0} = E_\lambda$,
3. $E_{-\infty} = 0$, $E_{+\infty} = E$.

Sei weiter $f(\lambda)$ eine beschränkte oder unbeschränkte komplexwertige Funktion, die auf dem Intervall $(-\infty, \infty)$ definiert und dort gleichmäßig stetig ist.

Wir zerlegen $(-\infty, \infty)$ in halboffene Intervalle $\Delta_k = [\lambda_k, \mu_k)$ und untersuchen die Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\nu_k)\, E(\Delta_k)\, x\,, \qquad \lambda_k \leqq \nu_k < \mu_k\,. \tag{1}$$

Diese Reihe setzt sich aus paarweise orthogonalen Summanden zusammen. Für ihre Konvergenz ist die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f(\nu_k)|^2\, \|E(\Delta_k)\, x\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f(\nu_k)|^2\, (E(\Delta_k)\, x, x) \tag{2}$$

notwendig und hinreichend.

Die letzte Reihe stellt selbst eine Summe für das Stieltjes-Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2\, d(E_\lambda\, x, x) \tag{3}$$

dar und konvergiert bei jeder Zerlegung des Intervalls $(-\infty, \infty)$ genau dann, wenn dieses Integral konvergiert. Wir bezeichnen mit $D(f)$ die Menge jener Elemente $x \in H$, für die die Reihe (2) oder, was auf das gleiche hinauskommt, das Integral (3) konvergiert.

α sei eine beliebige positive Zahl. Wir betrachten das halboffene Intervall $\Delta_\alpha = [-\alpha, \alpha)$. Auf diesem Intervall ist die Funktion $|f(\lambda)|$ beschränkt und deshalb für jedes $x \in H$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} |f(\lambda)|^2\, d\,(E_\lambda\, x, x) < \infty\,.$$

Nun ist aber

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} |f(\lambda)|^2\, d\,(E_\lambda\, x, x) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2\, d\,(E_\lambda\, E(\Delta_\alpha)\, x, E(\Delta_\alpha)\, x)\,.$$

Also gehören die Elemente der Form $E(\Delta_\alpha)\, x$ für beliebige α und x zu $D(f)$.

Die Menge $\{E(\Delta_\alpha)\, x\}$ und erst recht $D(f)$ ist überall dicht in H, weil $E(\Delta_\alpha)\, x \to x$ für $\alpha \to \infty$ strebt. Wie man leicht sieht, ist $D(f)$ eine lineare Mannigfaltigkeit.

Wir nehmen $x \in D(f)$ und betrachten die Summen (1), die zu zwei Unterteilungen der Geraden $(-\infty, \infty)$ in halboffene Intervalle Δ_k' und Δ_k'' gehören, wobei

$$\max\,(\mu_k' - \lambda_k') \leqq \delta \qquad \text{und} \qquad \max\,(\mu_k'' - \lambda_k'') \leqq \delta$$

ist. Dann lassen sich unter Benutzung der Additivitäts- und Orthogonalitätseigenschaft von $E(\Delta)$ leicht die Beziehungen

$$\left\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\nu_k') E(\Delta_k') x - \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\nu_k'') E(\Delta_k'') x \right\|^2$$

$$\leqq \omega^2 \{ (E_\infty x, x) - (E_{-\infty} x, x) \} = \omega^2 (x, x) , \tag{4}$$

$$\omega = \sup_{|\lambda - \mu| \leqq \delta} |f(\lambda) - f(\mu)| ,$$

herleiten.

Es sei eine Folge verfeinernder Zerlegungen des Intervalls $(-\infty, \infty)$ gegeben, für die

$$\delta_n = \max |\mu_k^{(n)} - \lambda_k^{(n)}| \to 0$$

gilt, und $\{s_n\}$ sei die Folge der Partialsummen der Reihe (1), die diesen Zerlegungen entspricht. Infolge (4) genügt die Folge $\{s_n\}$ der CAUCHYschen Bedingung

$$\|s_{n+p} - s_n\|^2 \leqq \omega_n^2 (x, x) \to 0$$

für $n \to \infty$, $p > 0$. Demzufolge konvergiert sie gegen den Grenzwert $s \in H$. Diesen Grenzwert bezeichnen wir mit $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, dE_\lambda\, x$ und nennen ihn das STIELTJES-*Integral* über die Funktion $f(\lambda)$ bezüglich der Familie E_λ.

Das STIELTJES-Integral

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, dE_\lambda\, x \tag{5}$$

stellt offenbar einen auf der linearen Mannigfaltigkeit $D(S) = D(f)$ definierten linearen Operator S dar.:

$$S = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, dE_\lambda\, x \, . \tag{6}$$

Aus Gleichung (5) folgt für jedes $x \in D(S)$ und $y \in H$ auch

$$(S\, x, y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d\, (E_\lambda\, x, y) \, . \tag{7}$$

Die oben eingeführte Definition des STIELTJES-Integrals kann auf stückweise gleichmäßig stetige Funktionen ausgedehnt werden, d. h. auf solche, die mit Ausnahme endlich vieler Sprungstellen mit endlichen Sprüngen stetig und in den Stetigkeitsintervallen gleichmäßig stetig sind.

Aus (7) folgt

$$(S\, x, x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d\, (E_\lambda\, x, x)$$

und die Tatsache, daß für eine reelle Funktion $f(\lambda)$ auch $(S\, x, x)$ reell ist. Daher definiert das STIELTJES-Integral einer reellen Funktion einen symmetrischen Operator.

Wir zeigen: S ist sogar ein selbstadjungierter Operator. Da auf Grund der Symmetrie von S der Bereich $D(S)$ in $D(S^*)$ enthalten ist, muß nur die entgegengesetzte Relation bewiesen werden.

x sei ein beliebiges Element aus H und $\Delta_n = [-n, n)$. Dann ist

$$x_n = E(\Delta_n)\, x \in D(S)\,.$$

Wir bezeichnen mit L_n den Unterraum, auf den $E(\Delta_n)$ projiziert. Offensichtlich sind S und $E(\Delta_n)$ vertauschbar. Dann ist

$$S\, x_n = S\, E(\Delta_n)\, x = E(\Delta_n)\, S\, x \in L_n\,.$$

Nun sei y ein beliebiges Element aus $D(S^*)$. Da $y_n = E(\Delta_n) \in D(S)$ und $D(S) \subset D(S^*)$ ist, ist $y_n \in D(S^*)$ und $S^*\, y_n = S\, y_n \in L_n$. Es sei $z_n = y - y_n$. Dann ist $z_n \in D(S^*)$ und $z_n \perp L_n$. Ist $\tilde{x}_n$ ein beliebiges Element aus L_n, so gilt, weil $S\,\tilde{x}_n \in L_n$ ist,

$$(S^*\, z_n, \tilde{x}_n) = (z_n, S\,\tilde{x}_n) = 0\,.$$

Folglich wird $S^*\, z_n \perp L_n$. Deshalb gilt

$$||S^*\, y||^2 = ||S^*\, y_n||^2 + ||S^*\, z_n||^2 \geqq ||S^*\, y_n||^2 = ||S\, y_n||^2\,.$$

Nun ist aber

$$||S\, y_n||^2 = \int_{-n}^{n} [f(\lambda)]^2\, d\,(E_\lambda\, y, y)\,.$$

Damit erhalten wir für beliebiges n

$$\int_{-n}^{n} [f(\lambda)]^2\, d\,(E_\lambda\, y, y) \leqq ||S^*\, y||^2\,,$$

und daraus folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(\lambda)]^2\, d\,(E_\lambda\, y, y) < \infty\,,$$

d. h. $y \in D(S)$. Somit ist $D(S^*) \subset D(S)$, und damit ist die Selbstadjungiertheit des Operators S bewiesen.

Zwei Hilfssätze. Hilfssatz 1. *$H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$ sei eine Folge paarweise orthogonaler Unterräume eines* HILBERT-*Raumes H, deren orthogonale Summe gleich H ist. Wir bezeichnen mit x_n die Projektion eines Elementes x auf den Unterraum H_n. Weiter sei $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ eine Folge beschränkter selbstadjungierter Operatoren, die auf den entsprechenden $H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$ definiert sind und diese Teilräume in sich abbilden.*

Dann existiert in H ein eindeutig bestimmter selbstadjungierter Operator A, der auf jedem H_n mit A_n zusammenfällt. Der Definitionsbereich $D(A)$ dieses Operators besteht aus genau denjenigen $x \in H$, für die die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||A_n\, x_n||^2 \tag{8}$$

konvergiert. Für $x \in D(A)$ ist

$$A x = \sum_{n=1}^{\infty} A_n x_n . \tag{9}$$

Wir bezeichnen mit $D(A)$ die Menge jener $x \in H$, für die die Reihe (8) konvergiert. $D(A)$ ist eine lineare Mannigfaltigkeit. Es seien $x, y \in D(A)$. Dann gilt für beliebige komplexe α und β

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||A_n (\alpha x + \beta y)_n||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} ||\alpha A_n x_n + \beta A_n y_n||^2 \leqq \sum_{n=1}^{\infty} (||A_n (\alpha x_n)|| + ||A_n(\beta y_n||)^2$$
$$\leqq C \sum_{n=1}^{\infty} (||A_n x_n||^2 + ||A_n y_n||^2) < \infty ,$$

worin C nur von α und β abhängt.

Die lineare Mannigfaltigkeit $D(A)$ ist in H überall dicht, da zu $D(A)$ alle Elemente der Form $\sum_{k=1}^{n} x_k$, $x_k \in H_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, gehören.

Mit Hilfe von (9) definieren wir auf $D(A)$ den Operator A. Die auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende Reihe konvergiert, weil infolge der paarweisen Orthogonalität der Elemente $A_k x_k$

$$\left\|\sum_{k=n+1}^{n+p} A_k x_k\right\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} ||A_k x_k||^2 \to 0$$

strebt für $n \to \infty$, $p > 0$. Der durch (9) definierte Operator A ist offenbar linear. Weiter finden wir für $x, y \in D(A)$

$$(A x, y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n x_n, \sum_{k=1}^{\infty} y_k\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n x_n, y_n)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} (x_n, A_n y_n) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k, \sum_{n=1}^{\infty} A_n y_n\right) = (x, A y) ,$$

d. h., der Operator A ist symmetrisch. Daher existiert der adjungierte Operator A^*, und es ist $A^* \supset A$.

Wir leiten die entgegengesetzte Relation her. Für $y \in D(A^*)$ und $x \in D(A)$ ist

$$(x, A^* y) = (A x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k x_k, y_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k, A_k y_k) .$$

Für x nehmen wir ein beliebiges Element $z_n \in H_n$. Dann ist

$$(z_n, A^* y) = (z_n, A_n y_n) ,$$

d. h.

$$P_{H_n} (A^* y) = P_{H_n} (A_n y_n) = A_n y_n .$$

Daher wird

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||A_n y_n||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} ||P_{H_n} (A^* y)||^2 = ||A^* y||^2 < \infty .$$

Also ist $y \in D(A)$ und $A^* y = A y$.

Schließlich beweisen wir, daß nur ein Operator mit den angegebenen Eigenschaften existiert. Ist B ein anderer solcher Operator, dann gilt zunächst

$$B\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} B x_k = \sum_{k=1}^{n} A_k x_k = A\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right),$$

d. h., für endliche Summen der Form $\sum_{k=1}^{n} x_k$ stimmen die beiden Operatoren überein. Ist nun $x \in D(A)$, so folgt $\sum_{k=1}^{n} x_k \to x$ und

$$B\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} A_k x_k \to y = A x,$$

und da B als selbstadjungierter Operator abgeschlossen ist, ergibt sich $x \in D(B)$ und $B x = y = A x$. Somit ist $B \supset A$. Andererseits erhalten wir durch Übergang zu den adjungierten Operatoren $A \subset B$. Also muß $A = B$ sein, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Hilfssatz 2. *Zu einem beliebigen selbstadjungierten Operator A existieren zwei beschränkte selbstadjungierte Operatoren B und C mit folgenden Eigenschaften:*

1. $R(B) \subset D(A)$, $R(C) \subset D(A)$;
2. $0 \leq B \leq E$, $\|C\| \leq 1$; *aus* $B x = 0$ *folgt* $x = 0$;
3. $C = A B$;
4. C *und* B *sind vertauschbar und ko-kommutieren mit* A.

Wir betrachten die Operatoren $R_i = (A - i E)^{-1}$ und $R_{-i} = (A + i E)^{-1}$. Das sind beschränkte Operatoren, die H umkehrbar eindeutig auf $D(A)$ abbilden. Wir erwähnen noch, daß $R_i^* = R_{-i}$, $R_{-i}^* = R_i$ ist und setzen

$$B = \frac{1}{2 i}(R_i - R_{-i}), \quad C = \frac{1}{2}(R_i + R_{-i}). \tag{10}$$

Die Beschränktheit und Selbstadjungiertheit der Operatoren B und C und auch die erste Eigenschaft für B und C sind offensichtlich. Aus (10) erhalten wir:

$$R_i = C + i B, \quad R_{-i} = C - i B. \tag{11}$$

Daher ist

$$(A - i E)(C + i B) = (A - i E) R_i = E,$$
$$(A + i E)(C - i B) = (A + i E) R_{-i} = E$$

oder nach Auflösen der Klammern

$$(A C + B) + i(A B - C) = E,$$
$$(A C + B) - i(A B - C) = E.$$

Daraus ergibt sich durch Addition und Subtraktion

$$A C + B = E, \quad A B = C. \tag{12}$$

Die dritte Eigenschaft ist damit auch bewiesen.

Da R_i und R_{-i} sowohl mit A als auch untereinander und mit beliebigen, mit A vertauschbaren beschränkten Operatoren[1]) kommutieren, ist die Eigenschaft (4) der Operatoren B und C ebenfalls offensichtlich.

Wir überzeugen uns schließlich von der Eigenschaft (2) der Operatoren B und C. Für $x \in D(A)$ erhalten wir durch einfache Rechnung

$$||(A - i\,E)\,x||^2 \geqq ||x||^2 .$$

Wir setzen $(A - i\,E)\,x = y$. Dann ist für jedes $y \in H$: $x = R_i\,y$ und

$$||R_i\,y|| \leqq ||y|| .$$

Folglich gilt $||R_i|| \leqq 1$.

Analog ergibt sich $||R_{-i}|| \leqq 1$. Daraus folgt

$$||B|| \leqq 1 , \qquad ||C|| \leqq 1 . \tag{13}$$

Ferner ergibt sich durch rechtsseitige Multiplikation der ersten Gleichung von (12) mit B

$$B = B^2 + A\,C\,B = B^2 + C\,A\,B = B^2 + C^2 \geqq 0 . \tag{14}$$

Aus (13) und (14) folgt $0 \leqq (B\,x, x) \leqq (x, x)$, d. h.

$$0 \leqq B \leqq E .$$

Schließlich sei $B\,x = 0$. Dann ist auch $C\,x = A\,B\,x = 0$. Daraus folgt

$$x = E\,x = (B + A\,C)\,x = 0 ,$$

womit der Beweis des Hilfssatzes abgeschlossen ist.

Die Integraldarstellung eines Operators. A sei ein unbeschränkter selbstadjungierter Operator und $\mathfrak{E}_\lambda$ die Spektralfunktion des nach Hilfssatz 2 konstruierten beschränkten Operators B. Wegen

$$0 \leqq (B\,x, x) \leqq (x, x)$$

fällt das Spektrum dieses Operators in das Intervall $[0, 1]$. Da weiter aus $B\,x = 0$ $x = 0$ folgt, ist $\lambda = 0$ kein Eigenwert des Operators B und deshalb $\mathfrak{E}_\lambda$ im Punkt $\lambda = 0$ stetig:

$$\mathfrak{E}_{+0} = \mathfrak{E}_0 = 0 .$$

H_n seien die Unterräume, auf die die Operatoren $\mathfrak{E}(\Delta_n)$ mit $\Delta_n = \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ für $n \geqq 2$ und $\Delta_1 = \left[\frac{1}{2}, 1 + \varepsilon\right)$ (ε ist eine beliebige positive Zahl) projizieren.

Die Räume H_n sind paarweise orthogonal, und da

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{E}(\Delta_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\mathfrak{E}_{1+\varepsilon} - \mathfrak{E}_{\frac{1}{n+1}}\right) = E - 0 = E$$

[1]) Ist $A\,B = B\,A$, so ist

$$R_i\,B = R_i\,B\,(A - i\,E)\,R_i = R_i\,(A - i\,E)\,B\,R_i = B\,R_i .$$

ist, ergibt die orthogonale Summe der H_n den ganzen Raum H. Wir führen die Funktion

$$\varphi_n(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} & \text{für} \quad \frac{1}{n+1} \leqq \lambda < \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{außerhalb} \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right) \end{cases}$$

und den Operator

$$\varphi_n(B) = \int_0^{1+\varepsilon} \varphi_n(\lambda)\, d\mathfrak{E}_\lambda = \int_{\frac{1}{n+1}}^{1/n} \frac{1}{\lambda}\, d\mathfrak{E}_\lambda = \mathfrak{E}(\varDelta_n)\, \varphi_n(B)$$

ein. Offenbar erhalten wir

$$B\, \varphi_n(B) = \varphi_n(B)\, B = \int_{\frac{1}{n+1}}^{1/n} d\mathfrak{E}_\lambda = \mathfrak{E}(\varDelta_n)\,.$$

Daher ist für alle $x \in H_n$

$$x = \mathfrak{E}(\varDelta_n)\, x = B\, \varphi_n(B)\, x = B\, z \in D(A)$$

und weiter

$$A\, x = A\, B\, \varphi_n(B)\, x = C\, \varphi_n(B)\, x = \varphi_n(B)\, C\, x = \mathfrak{E}(\varDelta_n)\, \varphi_n(B)\, C\, x\,.$$

Aus der letzten Gleichung ist ersichtlich, daß der Operator A, eingeschränkt auf H_n, einen beschränkten selbstadjungierten Operator A_n darstellt, der den Unterraum H_n in sich abbildet. $E_\lambda^{(n)}$ sei die Spektralfunktion des Operators A_n:

$$A_n = \int_{a_n}^{b_n} \lambda\, dE_\lambda^{(n)}\,.$$

Nach Hilfssatz 1 existiert ein selbstadjungierter Operator E_λ, $-\infty < \lambda < +\infty$, der auf jedem H_n mit $E_\lambda^{(n)}$ übereinstimmt. x_n sei die Projektion des Elementes x auf den Unterraum H_n. Da

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||E_\lambda^{(n)}\, x||^2 \leqq \sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||^2 \leqq ||x||^2 \tag{15}$$

ist, konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} ||E_\lambda^{(n)}\, x||^2$ für jedes $x \in H$, der Operator

$$E_\lambda\, x = \sum_{n=1}^{\infty} E_\lambda^{(n)}\, x \tag{16}$$

ist überall definiert und stellt demzufolge einen beschränkten selbstadjungierten Operator dar.

Infolge der Orthogonalität der Unterräume H_n erhalten wir für diesen Operator

$$(E_\lambda\, x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (E_\lambda^{(n)}\, x_n, y_n)\,,$$

$$||E_\lambda\, x||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} ||E_\lambda^{(n)}\, x||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (E_\lambda^{(n)}\, x_n, x_n)\,.$$

Aus (16) folgt für $\lambda < \mu$

$$E_\lambda E_\mu x = E_\lambda \left(\sum_{n=1}^{\infty} E_\mu^{(n)} x_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} E_\lambda E_\mu^{(n)} x_n = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} E_\lambda^{(m)} E_\mu^{(n)} x$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} E_\lambda^{(n)} E_\mu^{(n)} x = \sum_{n=1}^{\infty} E_\lambda^{(n)} x = E_\lambda x$$

und analog

$$E_\mu E_\lambda x = E_\lambda x .$$

Hieraus ergibt sich insbesondere $E_\lambda^2 = E_\lambda$, d. h., E_λ ist ein Projektionsoperator. Weiter gilt für $\nu < \lambda$

$$||E_\lambda x - E_\nu x||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} ||E_\lambda^{(n)} x_n - E_\nu^{(n)} x_n||^2$$

$$= \sum_{n=1}^{N} ||E_\lambda^{(n)} x_n - E_\nu^{(n)} x_n||^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} ||E_\lambda^{(n)} x_n - E_\nu^{(n)} x_n||^2 .$$

Da für alle n

$$||E_\lambda^{(n)} x_n - E_\nu^{(n)} x_n|| \leqq 2 \, ||x_n||$$

ist, so gilt

$$||E_\lambda x - E_\nu x||^2 \leqq \sum_{n=1}^{N} ||E_\lambda^{(n)} x_n - E_\nu^{(n)} x_n||^2 + 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} ||x_n||^2 .$$

Ein $\varepsilon > 0$ sei gegeben. Wir wählen zunächst N so groß, daß

$$2 \sum_{n=N+1}^{\infty} ||x_n||^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}$$

wird. Danach können wir infolge der linksseitigen Stetigkeit von $E_\lambda^{(n)}$ ein ν so nahe an λ finden, daß

$$\sum_{n=1}^{N} ||E_\lambda^{(n)} x_n - E_\nu^{(n)} x_n||^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}$$

wird. Für solches ν ergibt sich

$$||E_\lambda x - E_\nu x||^2 < \varepsilon^2 ,$$

d. h. $E_\nu x \to E_\lambda x$ für $\nu \to \lambda$, $\nu < \lambda$, wodurch die linksseitige Stetigkeit der Funktion E_λ bewiesen wird. Analog überzeugen wir uns von

$$E_\lambda x \to 0 \quad \text{bei} \quad \lambda \to -\infty ,$$

$$E_\lambda x \to x \quad \text{bei} \quad \lambda \to +\infty .$$

Folglich ist E_λ eine Zerlegung der Einheit.

Mit Hilfe der erhaltenen Zerlegung E_λ der Einheit bilden wir das Stieltjes-Integral

$$\tilde{A} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE_\lambda ,$$

das, wie oben gezeigt wurde, einen selbstadjungierten Operator definiert.

Für $x \in H_n$ ist $E_\lambda x = E_\lambda^{(n)} x$ und deshalb

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \, d(E_\lambda x, x) = \int_{a_n}^{b_n} \lambda^2 \, d(E_\lambda^{(n)} x, x) < \infty .$$

Daher existiert $\tilde{A} x$, und es ist

$$\tilde{A} x = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE_\lambda x = \int_{a_n}^{b_n} \lambda \, dE_\lambda^{(n)} x = A_n x .$$

Folglich fällt auf jedem H_n der Operator $\tilde{A}$ mit A_n zusammen. Andererseits fällt auch der Operator A auf jedem H_n mit A_n zusammen, und da nur ein solcher Operator existieren kann, ist $\tilde{A} = A$.

Also ist

$$A x = \tilde{A} x = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE_\lambda x .$$

Wir haben damit die Integraldarstellung eines unbeschränkten selbstadjungierten Operators erhalten.

Der Definitionsbereich $D(A)$ des Operators A besteht aus genau den Elementen $x \in H$, für die

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \, d\,(E_\lambda x, x) < \infty$$

ist. Man kann zeigen, daß die Zerlegung der Einheit durch den Operator A eindeutig bestimmt ist.

Funktionen eines Operators. Oben konstruierten wir Funktionen eines beschränkten selbstadjungierten Operators. Analog können wir Funktionen von unbeschränkten selbstadjungierten Operatoren bilden, nur sind hier die Eigenschaften der Additivität und der Multiplikativität der Beziehung zwischen Funktionen einer reellen Veränderlichen und Operatorfunktionen etwas komplizierter.

Es sei A ein unbeschränkter selbstadjungierter Operator mit einem Definitionsbereich $D(A)$ und E_λ die von A erzeugte Zerlegung der Einheit. Für eine beliebige, stückweise auf $(-\infty, +\infty)$ gleichmäßig stetige Funktion $f(\lambda)$ bilden wir den Operator

$$B x = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \, dE_\lambda x ,$$

dessen Definitionsbereich $D(B)$ aus allen $x \in H$ besteht, für die

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2 \, d\,(E_\lambda x, x) < +\infty$$

ist.

Wie wir oben sahen, ist $D(B)$ in H überall dicht; ist $f(\lambda)$ reell, so ist B ein selbstadjungierter Operator. Der Operator B heißt *Funktion des Operators A*

und wird mit $f(A)$ bezeichnet:

$$f(A) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, dE_\lambda\, x\,.$$

Man kann die Operatorfunktionen in allgemeinerer Form einführen [28]. Die Spektralfunktion $E_\lambda\ (-\infty < \lambda < \infty)$ des Operators A erzeugt nämlich eine Intervallfunktion $E(\Delta)$, die durch einen Prozeß, der analog zu dem in der Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen angewandten verläuft, zu einem Operatormaß $E(M)$ der linearen Punktmengen M erweitert werden kann. Dieses Maß $E(M)$ ist auf einer Klasse von Mengen, die *A-meßbar* heißen und zu denen alle Borel-Mengen gehören, definiert. Nach der Definition der Klasse der meßbaren Mengen werden wie üblich A-meßbare Funktionen definiert, und das Lebesgue-Stieltjes-Operatorintegral

$$f(A) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, dE_\lambda$$

wird zunächst für beschränkte und dann für unbeschränkte Funktionen gebildet. Der Definitionsbereich dieses Operators $f(A)$, der im hier gebrauchten Sinne eine Funktion des Operators A darstellt, besteht wiederum aus genau denjenigen x, für die

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2\, d\,(E_\lambda x, x) > \infty$$

ist. Auch das letzte Integral ist im Sinne von Lebesgue-Stieltjes zu verstehen [28].
Derart allgemeine Funktionen von Operatoren werden wir jedoch nicht betrachten.

Gegeben sei ein Operator $f(A)$, dabei sei $f(\lambda)$ eine auf $(-\infty, \infty)$ stückweise gleichmäßig stetige Funktion. Der Definitionsbereich des Operators $f(A)$ wird mit $D\{f(A)\}$ bezeichnet. Für jedes n und $x \in H$ ist, wie wir auf Seite 260 sahen,

$$E(\Delta_n)\, x \in D\,\{f(A)\}\,.$$

Dann aber ist auch $E(\Delta)\, x \in D\{f(A)\}$ für jedes $x \in H$ und beliebiges $\Delta = [\alpha, \beta)$ mit endlichem α und β.
Es sei $x \in D\{f(A)\}$. Aus der Ungleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2\, d\,(E_\lambda\, E(\Delta)\, x,\, E(\Delta)\, x) = \int_{\Delta} |f(\lambda)|^2\, d(E_\lambda\, x, x) \leqq \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2\, d\,(E_\lambda\, x, x)\,,$$

die für alle endlichen oder unendlichen $\Delta = [\alpha, \beta)$ gilt, folgt

$$E(\Delta)\, x \in D\,\{f(A)\}\,.$$

Da das Stieltjes-Integral der Grenzwert einer Integralsumme ist, wird

$$f(A)\, E(\Delta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d\,(E_\lambda\, (E(\Delta)\, x)) = E(\Delta) \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, dE_\lambda\, x = E(\Delta)\, f(A)\, x\,.$$

Also ist $E(\Delta)$ für jedes Δ mit $f(A)$ vertauschbar.
Es sei $k \neq 0$ irgendeine reelle oder komplexe Zahl. Da das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |k|^2\, |f(\lambda)|^2\, d\,(E_\lambda\, x, x)$$

für genau die x konvergiert, für die

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2 \, d\,(E_\lambda x, x)$$

konvergent ist, fällt der Definitionsbereich des Operators $f(A)$ zusammen mit dem des Operators $(k f)(A)$, und es ist

$$(k f)\,(A)\,x = k\,f(A)\,x\,.$$

$f_1(\lambda)$ und $f_2(\lambda)$ seien zwei auf $(-\infty, \infty)$ stückweise gleichmäßig stetige Funktionen. Ist

$$x \in D\,\{f_1(A)\} \cap D\,\{f_2(A)\}\,,$$

so folgt

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} |f_1(\lambda) + f_2(\lambda)|^2 \, d\,(E_\lambda x, x)\right]^{1/2} \leqq \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f_2(\lambda)|^2 \, d\,(E_\lambda x, x)\right]^{1/2} + \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f_2(\lambda)|^2 \, d\,(E_\lambda x, x)\right]^{1/2},$$

und deshalb ist $x \in D\,\{(f_1 + f_2)\,(A)\}$. Also gilt

$$f_1(A) + f_2(A) \subset (f_1 + f_2)\,(A)\,. \tag{17}$$

Wir bestimmen, wann in der Beziehung (17) das Gleichheitszeichen steht. Wegen

$$[f_1(\lambda) + f_2(\lambda)] - f_2(\lambda) = f_1(\lambda)$$

ist

$$D\,\{(f_1 + f_2)\,(A)\} \cap D\,\{f_2(A)\} \subset D\,\{f_1(A)\}\,.$$

Hieraus und aus (17) folgt

$$D\,\{(f_1 + f_2)\,(A)\} \cap D\,\{f_2(A)\} \subset D\,\{f_1(A)\} \cap D\,\{f_2(A)\} \subset D\,\{(f_1 + f_2)\,(A)\}\,.$$

Diese Relationen ergeben

$$D\,\{(f_1 + f_2)\,(A)\} \cap D\,\{f_2(A)\} = D\,\{f_1(A)\} \cap D\,\{f_2(A)\}\,.$$

Analog finden wir

$$D\,\{(f_1 + f_2)\,(A)\} \cap D\,\{f_1(A)\} = D\,\{f_1(A)\} \cap D\,\{f_2(A)\}\,.$$

Folglich gilt die Gleichheit in (17), wenn mindestens eine der beiden Relationen

$$D\,\{(f_1 + f_2)\,(A)\} \subset D\,\{f_1(A)\}$$

oder

$$D\,\{(f_1 + f_2)\,(A)\} \subset D\,\{f_2(A)\}$$

richtig ist. Das ist beispielsweise der Fall, wenn einer der Operatoren $f_1(A)$ oder $f_2(A)$ beschränkt ist.

Wiederum seien $f_1(\lambda)$ und $f_2(\lambda)$ auf der reellen Achse stückweise gleichmäßig stetig. Es sei $x \in D\{f_1(A)\,f_2(A)\}$. Das bedeutet $x \in D\{f_2(A)\}$ und $f_2(A) \in D\{f_1(A)\}$.

Die letzte Relation bedeutet auch

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_1(\lambda)|^2 \, d(E_\lambda f_2(A)\, x,\, f_2(A)\, x) < \infty . \tag{18}$$

Nun gilt jedoch

$$(E_\lambda f_2(A)\, x, f_2(A)\, x) = ||E_\lambda f_2(A)\, x||^2 = \int_{-\infty}^{\lambda} |f_2(\mu)|^2 \, d\, (E_\mu x, x) .$$

Deshalb ist

$$d\,(E_\lambda f_2(A)\, x,\, f_2(A)\, x) = |f_2(\lambda)|^2 \, d\,(E_\lambda x, x) ,$$

und (18) erhält die Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_1(\lambda)\, f_2(\lambda)|^2 \, d\,(E_\lambda x, x) < \infty .$$

Hieraus folgt $x \in D\{(f_1 f_2)\ (A)\}$. Somit ist

$$D\{f_1(A)\, f_2(A)\} \subset D\{(f_1 f_2)\ (A)\} = D\{(f_2 f_1)\ (A)\} , \tag{19}$$

d. h.

$$f_1(A)\, f_2(A) \subset (f_1 f_2)\ (A) . \tag{20}$$

Wir fragen, wann in (20) das Gleichheitszeichen steht. Es sei $x \in D\{(f_1 f_2)\ (A)\}$ und $x \in D\{f_2(A)\}$. Dann ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_1(\lambda)|^2 \, d(E_\lambda f_2(A)\, x, f_2(A)\, x) = \int_{-\infty}^{\infty} |f_1(\lambda)\, f_2(\lambda)|^2 \, d\,(E_\lambda x, x) < \infty .$$

Das bedeutet

$$f_2(A)\, x \in D\{f_1(A)\} ,$$

und folglich ist

$$x \in D\{f_1(A)\, f_2(A)\} .$$

Wir gelangen somit zur Relation

$$D\{f_2(A)\} \cap D\{(f_1 f_2)\,(A)\} \subset D\{f_1(A)\, f_2(A)\} . \tag{21}$$

Daraus erhalten wir unter Berücksichtigung von (19)

$$D\{f_2(A)\} \cap D\{(f_1 f_2)\ (A)\} \subset D\{f_1(A)\, f_2(A)\} \subset D\{(f_1 f_2)\,(A)\} .$$

Aus dieser Relation folgt: In (20) steht das Gleichheitszeichen genau dann, wenn $D\{(f_1 f_2)\ (A)\} \subset D\{f_2(A)\}$ ist.

Wir betrachten den Fall $f_1(\lambda) = f_2(\lambda) = f(\lambda)$.

Da in jedem endlichen Intervall die Funktion $f(\lambda)$ beschränkt ist, kann die Divergenz des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^n \, d(E_\lambda x, x) \tag{22}$$

nur aus dem unbeschränkten Wachsen von $|f(\lambda)|$ für $|\lambda| \to \infty$ herrühren. Da aber $|f(\lambda)|^{n-1}$ langsamer ansteigt als $|f(\lambda)|^n$, folgt aus der Konvergenz des Integrals (22) die des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^{n-1} \, d\,(E_\lambda x, x) .$$

Das bedeutet $D\{(f^n)(A)\} \subset D\{(f^{n-1})(A)\}$. Hieraus folgt auf Grund des vorangegangenen

$$(f^{n-1}(A))\, f(A) = (f^n)(A)$$

und deshalb

$$[f(A)]^n = (f^n)(A)\,,$$

d. h.

$$[f(A)]^n = \int_{-\infty}^{\infty} [f(\lambda)]^n \, dE_\lambda\,.$$

Wir bestimmen nun den zum Operator $f(A)$ adjungierten Operator $f(A)^*$. Ist $f(\lambda)$ eine reelle Funktion, so ist, wie wir wissen, $f(A)$ ein selbstadjungierter Operator.

Ist $f(\lambda) = u(\lambda) + i\, v(\lambda)$ eine auf $(-\infty, \infty)$ beschränkte komplexe Funktion, so folgt aus den bisherigen Ableitungen

$$f(A)^* = [u(A) + i\, v(A)]^* = u(A)^* - i\, v(A)^* = u(A) - i\, v(A) = \bar{f}(A)\,,$$

worin $\bar{f}(\lambda)$ die zu $f(\lambda)$ konjugiert komplexe Funktion bedeutet. Ein unbeschränktes $f(\lambda)$ können wir in der Form

$$f(\lambda) = |f(\lambda)|\, e^{i \arg f(\lambda)} = g(\lambda)\, h(\lambda)$$

darstellen. Darin ist $g(\lambda)$ reell, $|h(\lambda)| = 1$ und die Definitionsbereiche von $f(A)$ und $g(A)$ sind gleich. $g(A)$ ist selbstadjungiert, $h(A)$ beschränkt. Daher ist

$$f(A)^* = [g(A)\, h(A)]^* = h(A)^*\, g(A) = \bar{h}(A)\, g(A) = \bar{f}(A)\,.$$

T sei ein mit A vertauschbarer beschränkter Operator. Dann ist T mit $R_\lambda = (A - \lambda E)^{-1}$ für jedes reguläre λ vertauschbar, folglich auch mit

$$B = \frac{1}{2i}(R_i - R_{-i})\,.$$

Seinerseits folgt aus der Vertauschbarkeit von T und B die von T mit jeder beschränkten Funktion $f(B)$, insbesondere mit der Spektralfunktion $\mathfrak{E}_\lambda$ dieses Operators und mit der oben eingeführten Funktion $\varphi_n(B)$. Diese letzte Vertauschbarkeit bedeutet, daß der Unterraum H_n den Operator T reduziert. Daher gilt für $x \in H_n$

$$A_n\, T\, x = A\, T\, x = T\, A\, x = T\, A_n\, x\,,$$

d. h., A_n und T kommutieren auf H_n. Dann kommutiert aber T auch mit der Spektralfunktion $E_\lambda^{(n)}$ des Operators A_n. Da die Spektralfunktion E_λ des Operators A die Darstellung

$$E_\lambda x = \sum_{n=1}^{\infty} E_\lambda^{(n)}\, x$$

besitzt, wobei die Reihe für jedes $x \in H$ konvergiert, ist

$$T\, E_\lambda = E_\lambda\, T\,.$$

Aus der Vertauschbarkeit von T mit E_λ folgt die Vertauschbarkeit von T mit einer beliebigen beschränkten Funktion $f(A)$.

Wenn schließlich $f(A)$ eine unbeschränkte Funktion ist, so setzen wir

$$f_n(A) = f(A)\,\chi_n(A)\,.$$

Darin ist $\chi_n(\lambda)$ die charakteristische Funktion des halboffenen Intervalls $[-n, n)$. Wir erhalten für jedes $x \in D\{f(A)\}$

$$f_n(A)\,T\,x = T\,f_n(A)\,x\,. \tag{23}$$

Da $x \in D\{f(A)\}$ ist, so strebt $f_n(A)\,x \to f(A)\,x$ für $n \to \infty$. Folglich ist

$$T\,f_n(A)\,x \to T\,f(A)\,x\,.$$

Dann strebt für $n \to \infty$ die linke Seite von Gleichung (23) gegen den Grenzwert $T\,f(A)\,x$, d. h., es gilt

$$T\,x \in D\{f(A)\}$$

und

$$f(A)\,T\,x = T\,f(A)\,x\,.$$

Somit ko-kommutiert eine beliebige Funktion des Operators A mit dem Operator A. Es zeigt sich, daß diese Eigenschaft bei einem separablen Hilbert-Raum charakteristisch für eine Operatorfunktion ist. Es gilt nämlich der

Satz. *Ein abgeschlossener Operator B mit einem überall dichten Definitionsbereich ist genau dann eine Funktion eines selbstadjungierten Operators A, wenn B mit A ko-kommutiert.*

Zum Beweis dieses Satzes s. beispielsweise [28].

λ sei eine komplexe Zahl oder ein Punkt der reellen Achse, in dessen Umgebung (α, β) E_μ konstant ist. Wir setzen im ersten Fall

$$\varphi(\mu) = \frac{1}{\mu - \lambda}\,, \qquad -\infty < \mu < \infty\,,$$

im zweiten Fall

$$\varphi(\mu) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu - \lambda} & \text{außerhalb} \quad (\alpha, \beta) \\[2ex] 0 & \text{für} \quad \mu \in (\alpha, \beta)\,, \end{cases}$$

dann ist $\varphi(\mu)$ auf der reellen Zahlengeraden beschränkt und stückweise gleichmäßig stetig. Deshalb ist der Operator $\varphi(A)$ beschränkt, und folglich gilt

$$(A - \lambda\,E)\,\varphi(A) = \varphi(A)\,(A - \lambda\,E) = \int_{-\infty}^{\infty} (\mu - \lambda)\,\frac{1}{\mu - \lambda}\,dE_\mu = \int_{-\infty}^{\infty} dE_\mu = E\,.$$

Wiederum sind die komplexen Punkte und die Punkte der reellen Achse, in deren Umgebung E_μ konstant ist, reguläre Punkte und wieder besitzt die Resolvente die Form

$$R_\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE_\mu}{\mu - \lambda}\,.$$

Es existiere umgekehrt R_λ für reelles λ. Dann erhalten wir durch Wiederholung der Überlegungen von Satz 5, § 5, dieses Kapitels, daß in einer Umgebung von λ die Spektralfunktion E_μ konstant ist.

Schließlich kann wie im Falle beschränkter selbstadjungierter Operatoren gezeigt werden, daß λ_0 ein Eigenwert des Operators genau dann ist, wenn λ_0 eine Unstetigkeitsstelle in der zu diesem Operator gehörigen Zerlegung E_λ der Einheit ist.

Wir kommen auf die Resolvente zurück. Wir finden zunächst:

1. Ist $R_\lambda x = 0$, so gilt $x = (A - \lambda E) R_\lambda x = (A - \lambda E) 0 = 0$.

Weiter ergeben die Rechenregeln für Operatorfunktionen:

2. $R_\lambda^* = R_{\bar{\lambda}}$;

3. $$R_\lambda - R_\mu = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dE_\eta}{\eta - \lambda} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dE_\eta}{\eta - \mu} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda - \mu}{(\eta - \lambda)(\eta - \mu)} dE_\eta$$

$$= (\lambda - \mu) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dE_\eta}{\eta - \lambda} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dE_\eta}{\eta - \mu} = (\lambda - \mu) R_\lambda R_\mu .$$

Das ist die sogenannte HILBERT*sche Funktionalgleichung* für die Resolvente.

Somit besitzt die Resolvente eines selbstadjungierten Operators die Eigenschaften 1 bis 3. Auch die Umkehrung erweist sich als richtig.

Gegeben sei eine Familie solcher beschränkter linearer Operatoren, die von einem komplexen Parameter λ abhängen, und folgende Eigenschaften besitzen:

1. Aus $R_\lambda x = 0$ folgt $x = 0$;
2. $R_\lambda^* = R_{\bar{\lambda}}$;
3. $R_\lambda - R_\mu = (\lambda - \mu) R_\lambda R_\mu$.

Dann existiert ein beschränkter oder unbeschränkter selbstadjungierter Operator A, für den die Familie R_λ die Familie der Resolventen ist.

Zum Beweis s. beispielsweise [27].

Wir erwähnen schließlich, daß man unter Zuhilfenahme der Funktionalgleichung der Resolventen beweisen kann, daß die Resolvente eine analytische Funktion des Parameters λ ist, d. h., in einer Umgebung eines regulären Punktes λ_0 ist die Resolvente in eine Potenzreihe nach $\lambda - \lambda_0$ entwickelbar, die im Sinne der gleichmäßigen Konvergenz im Raum der Operatoren konvergiert [27].

§ 9. Beispiele unbeschränkter Operatoren

Der Operator der Multiplikation mit der unabhängigen Veränderlichen. Ein Beispiel eines unbeschränkten Operators bildet der Operator der Multiplikation mit der unabhängigen Veränderlichen im Raum $L_2(-\infty, \infty)$. $D(A)$ sei die Mannigfaltigkeit der auf $(-\infty, \infty)$ quadratisch summierbaren Funktionen $x(t)$,

für die gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 \, |x(t)|^2 \, a \, t < \infty .$$

$D(A)$ ist eine lineare Mannigfaltigkeit. Diese ist überall dicht in $L_2(-\infty, \infty)$, da sie alle beschränkten Funktionen enthält, die außerhalb eines Intervalls $[a, b]$ ($|a|$, $|b| < \infty$) verschwinden. Auf dieser Mannigfaltigkeit definieren wir den Operator A durch die Gleichung

$$A\,x = t\,x(t) .$$

Wegen der Reellwertigkeit von

$$(A\,x, x) = \int_{-\infty}^{\infty} t\,x(t)\,\bar{x}(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} t|x(t)|^2\,dt$$

ist A ein symmetrischer Operator.

Wir zeigen: A ist ein selbstadjungierter Operator.

Es sei $y(t) \in D(A^*)$ und $x(t)$ eine beliebige quadratisch summierbare Funktion, die für $|t| > n$ verschwindet. Dann ist $x(t) \in D(A)$, und wir erhalten

$$(A\,x, y) = (x, y^*)$$

oder

$$\int_{-n}^{n} t\,x(t)\,\bar{y}(t)\,dt = \int_{-n}^{n} x(t)\,\overline{t\,y(t)}\,dt = \int_{-n}^{n} x(t)\,\overline{y^*(t)}\,dt$$

und daraus

$$\int_{-n}^{n} x(t)\,\overline{[y^*(t) - t\,y(t)]}\,dt = 0 .$$

Da $x(t)$ völlig willkürlich sein kann, muß für jedes feste n auf $[-n, n]$ fast überall

$$y^*(t) - t\,y(t) = 0$$

sein, demzufolge auch fast überall auf $(-\infty, \infty)$. Da $y^*(t) \in L_2(-\infty, \infty)$ ist, gilt $t\,y(t) \in L_2(-\infty, \infty)$, d. h. $y(t) \in D(A)$. Daher ist $D(A^*) \subset D(A)$, das ergibt $D(A^*) = D(A)$, und A ist selbstadjungiert.

Der Operator A besitzt keine Eigenwerte. Ist nämlich $A\,x = \sigma\,x$, so muß $(t - \sigma)\,x(t) = 0$ sein, und das ergibt auf $(-\infty, \infty)$ fast überall $x(t) = 0$.

Andererseits ist jede reelle Zahl σ ein Punkt des Spektrums. Das folgt aus Überlegungen, wie wir sie in § 4, Kapitel VII, für den Operator der Multiplikation mit der unabhängigen Veränderlichen im Raum $L_2[0, 1]$ angestellt haben. Der Operator A besitzt also ein rein stetiges Spektrum, das die gesamte reelle Achse ausfüllt.

Die Resolvente des Operators A wird durch die Gleichung

$$R_\lambda x = \frac{1}{t - \lambda}\,x(t)$$

bestimmt. Hieraus ergibt sich

$$(R_\lambda x, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x(t)|^2}{t-\lambda}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t-\lambda}\, d\varphi(t)\,,$$

worin $\varphi(t) = \int_{-\infty}^{t} |x(\tau)|^2\, d\tau$ ist.

Andererseits ist

$$(R_\lambda x, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\,(E_\mu x, x)}{\mu - \lambda} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\mu-\lambda}\, d\varrho(\mu)\,.$$

Durch Gleichsetzen der beiden Ausdrücke für $(R_\lambda x, x)$ finden wir für alle nichtreellen λ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varphi(\xi)}{\xi - \lambda} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varrho(\xi)}{\xi-\lambda}.$$

Hieraus erhalten wir auf Grund der STIELTJESschen Umkehrformel [27] unter Berücksichtigung der Stetigkeit von $\varphi(\xi)$ und $\varrho(\xi)$

$$\varrho(\xi) = \varphi(\xi)\,,$$

d. h.

$$(E_\lambda x, x) = \int_{-\infty}^{\lambda} |x(t)|^2\, dt\,.$$

Das ergibt

$$(E(\Delta)\, x, x) = \int_{\Delta} |x(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_\Delta(t) |\, x(t)|^2\, dt\,,$$

worin $\chi_\Delta(t)$ die charakteristische Funktion des Intervalls Δ ist. Für ein beliebiges Intervall Δ ist also

$$E(\Delta)\, x = \chi_\Delta(t)\, x(t)\,.$$

Die Integraldarstellung des Operators A erhält die Form

$$A\, x = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dE_\lambda\, x = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d\, \big(\chi_\lambda(t)\, x(t)\big) = t\, x(t)\,.$$

Hier ist $\chi_\lambda(t)$ die charakteristische Funktion des Intervalls $(-\infty, \lambda)$, und das STIELTJES-Integral entartet zu dem Wert des Integranden an der einzigen Sprungstelle der integrierenden Funktion.

Die Operatorfunktion $F(A)$, die der Funktion $F(\lambda)$ entspricht, hat offenbar die Gestalt

$$F(A)\, x = F(t)\, x(t)\,.$$

Der Differentiationsoperator. Als zweites Beispiel eines unbeschränkten Operators betrachten wir den Differentiationsoperator.

Im HILBERT-Raum $L_2(a, b)$ für endliche oder unendliche a und b führen wir den Operator

$$A = i\, \frac{d}{dt}$$

ein. Zunächst seien a und b endlich, z. B. $a = 0$, $b = 1$. Wir nehmen an, daß der Definitionsbereich $D(A)$ des betrachteten Operators aus allen absolut stetigen Funktionen besteht, die eine quadratisch summierbare Ableitung besitzen und den Randbedingungen

$$x(0) = x(1) = 0 \tag{1}$$

genügen. Dann überzeugt man sich durch partielle Integration leicht davon, daß für beliebige $x, y \in D(A)$ gilt

$$(A\,x, y) = \int_0^1 i\,\frac{dx(t)}{dt}\,\bar{y}(t)\,dt = \int_0^1 x(t)\,\overline{\left(i\,\frac{dy(t)}{dt}\right)}\,dt = (x, A\,y)\,.$$

A ist also ein symmetrischer Operator.

Es sei nun $a = 0$, $b = \infty$. $D(A)$ bestehe aus den auf $[0, \infty)$ quadratisch summierbaren Funktionen $x(t)$, die auf diesem Intervall eine quadratisch summierbare Ableitung $\frac{dx(t)}{dt}$ besitzen und der Randbedingung $x(0) = 0$ genügen.

Wir zeigen, daß dann auch $x(\infty) = 0$ ist.

Da $x(t)$ und $\frac{dx(t)}{dt}$ quadratisch summierbar sind, so ist $x(t)\,\overline{\frac{dx(t)}{dt}}$ summierbar auf $[0, \infty)$, und wir können schreiben

$$|x(t)|^2 = |x(0)|^2 + \int_0^t x(\tau)\,\overline{\frac{dx(\tau)}{d\tau}}\,d\tau + \int_0^t \bar{x}(\tau)\,\frac{dx(\tau)}{d\tau}\,d\tau\,.$$

Für $t \to \infty$ strebt die rechte Seite der Gleichung gegen einen endlichen Grenzwert, folglich existiert

$$\lim_{t\to\infty} |x(t)| < \infty\,.$$

Auf Grund der Summierbarkeit von $|x(t)|^2$ auf $[0, \infty)$ kann dieser Grenzwert nur Null sein.

Somit gilt im zweiten Fall

$$x(0) = x(\infty) = 0\,. \tag{2}$$

Aus der Gleichung

$$\int_0^n i\,\frac{dx(t)}{dt}\,\overline{y(t)}\,dt = i\,x(n)\,\overline{y(n)} + \int_0^n x(t)\,\overline{\left(i\,\frac{dy(t)}{dt}\right)}\,dt$$

erhalten wir für $n \to \infty$ im Grenzfall

$$(A\,x, y) = (x, A\,y)\,,$$

d. h., auch im zweiten Fall ist A ein symmetrischer Operator.

Im dritten Fall, wenn $a = -\infty$ und $b = \infty$ ist, bestehe $D(A)$ aus allen auf $(-\infty, \infty)$ quadratisch summierbaren Funktionen, die dort quadratisch summierbare Ableitungen besitzen. Wie oben überzeugen wir uns davon, daß aus

diesen Voraussetzungen

$$x(-\infty) = x(\infty) = 0 \tag{3}$$

folgt, und wiederum wird A ein symmetrischer Operator.

Es muß noch nachgewiesen werden, daß $D(A)$ in $L_2(a, b)$ überall dicht ist. Es sei (α, β) im ersten Fall das Intervall $(0, 1)$, im zweiten Fall gleich $(0, \beta)$, wobei β eine beliebige endliche Zahl ist, und im dritten Fall gleich einem beliebigen endlichen Intervall. Ist $y(t)$ eine zu $D(A)$ orthogonale Funktion aus $L_2(a, b)$, so wählen wir als $x(t)$ im ersten Fall eine beliebige Funktion aus $D(A)$ und im zweiten Fall eine beliebige Funktion aus $D(A)$, die außerhalb (α, β) gleich Null ist. So erhalten wir

$$0 = (x, y) = \int_\alpha^\beta x(t)\, \overline{y(t)}\, dt = -\int_\alpha^\beta \frac{dx(t)}{dt}\, Y(t)\, dt\,,$$

wobei $Y(t)$ eine Stammfunktion von $y(t)$ ist. Da für $x(t)$ eine beliebige, auf (α, β) stetige und in den Enden des Intervalls verschwindende Funktion genommen werden kann, folgt aus einem bekannten Hilfssatz der Variationsrechnung, angewandt auf die stetige Funktion $Y(t)$, daß $Y(t) = \text{const}$ ist und demzufolge $y(t) \equiv 0$ auf dem Intervall (α, β) und damit auch überall auf (a, b). $A = i\,\frac{d}{dt}$ ist also in allen drei Fällen ein symmetrischer Operator.

Wir bestimmen den adjungierten Operator A^*.

Es sei $y \in D(A^*)$. Dann ist für beliebiges $x \in D(A)$

$$(A\,x, y) = \int_a^b i\,\frac{dx(t)}{dt}\,\overline{y(t)}\, dt = \int_a^b x(t)\,\overline{y^*(t)}\, dt = (x, y^*)\,.$$

Als $x(t)$ wählen wir eine beliebige Funktion aus $D(A)$, die außerhalb des Intervalls (α, β) verschwindet. Die vorige Gleichung ergibt

$$\int_\alpha^\beta i\,\frac{dx(t)}{dt}\,\overline{y(t)}\, dt = \int_\alpha^\beta x(t)\,\overline{y^*(t)}\, dt\,.$$

Durch partielle Integration der rechten Seite entsteht

$$\int_\alpha^\beta i\,\frac{dx(t)}{dt}\,\overline{y(t)}\, dt = \int_\alpha^\beta \frac{dx(t)}{dt}\,\overline{Y^*(t)}\, dt\,, \tag{4}$$

darin ist $Y^*(t) = \int\limits_0^t y^*(\tau)\, d\tau$ eine Stammfunktion von $y^*(t)$. Die Gleichung (4) bringen wir in die Form

$$\int_\alpha^\beta \frac{dx(t)}{dt}\,\overline{[i\,y(t) - Y^*(t)]}\, dt = 0\,.$$

Hieraus folgt wiederum, zunächst für (α, β) und dann überall auf (a, b)

$$i\,y(t) - Y^*(t) = \text{const}\,, \tag{5}$$

d. h., $y(t)$ ist eine auf (a, b) quadratisch summierbare Funktion, die dort eine quadratisch summierbare Ableitung besitzt. Aus (5) erhalten wir für jedes $y \in D(A^*)$

$$y^*(t) = \frac{d}{dt}\left(Y^*(t)\right) = i\,\frac{dy(t)}{dt}\,,$$

d. h.

$$A^*\,y = i\,\frac{dy}{dt}\,.$$

Ist umgekehrt $y(t)$ eine Funktion mit den oben angegebenen Eigenschaften, so führt die partielle Integration zu

$$\int\limits_\alpha^\beta i\,\frac{dx(t)}{dt}\,\overline{y(t)}\,dt = \int\limits_\alpha^\beta x(t)\,\overline{\left(i\,\frac{dy(t)}{dt}\right)}\,dt = \int\limits_\alpha^\beta x(t)\,\overline{y^*(t)}\,dt$$

und der Übergang zum Grenzfall $\beta \to \infty$ bzw. $\alpha \to -\infty$, $\beta \to \infty$ im zweiten bzw. dritten Fall zu

$$(A\,x, y) = (x, y^*)\,,$$

d. h. $y \in D(A^*)$.

Somit besteht $D(A^*)$ aus den auf (a, b) quadratisch summierbaren Funktionen, die dort eine quadratisch summierbare Ableitung besitzen.

Ein Vergleich mit der Definiton von $D(A)$ zeigt, daß im ersten und zweiten Fall $D(A^*)$ umfassender als $D(A)$, im dritten aber $D(A^*) = D(A)$ ist. Folglich ist im dritten Fall A ein selbstadjungierter (oder hypermaximaler) Operator.

Im ersten und zweiten Fall ist A ein abgeschlossener Operator. Zum Beweis zeigen wir, daß $A = A^{**}$ gilt. Da $A^{**} \subset A^*$ ist, ist A^{**} wiederum ein Differentationsoperator auf seinem Definitionsbereich $D(A^{**})$. Sei $x(t) \in D(A^{**})$. Wir erhalten im ersten Fall für eine beliebige Funktion $y(t) \in D(A^*)$ und im zweiten Fall für eine beliebige, außerhalb (α, β) verschwindende Funktion aus $D(A^*)$ durch partielle Integration

$$(A^{**}\,x, y) = \int\limits_\alpha^\beta i\,\frac{dx(t)}{dt}\,\overline{y(t)}\,dt = [x(\beta)\,\overline{y(\beta)} - x(\alpha)\,\overline{y(\alpha)}]\,i + \int\limits_\alpha^\beta x(t)\,\overline{\left(i\,\frac{dy(t)}{dt}\right)}\,dt\,.$$

Andererseits ist

$$(A^{**}\,x, y) = (x, A^*\,y) = \int\limits_\alpha^\beta x(t)\,\overline{\left(i\,\frac{dy(t)}{dt}\right)}\,dt\,.$$

Durch Vergleich dieser Ausdrücke erkennen wir

$$x(\beta)\,\overline{y(\beta)} - x(\alpha)\,\overline{y(\alpha)} = 0\,,$$

woraus sich im ersten Fall

$$x(1)\,\overline{y(1)} - x(0)\,\overline{y(0)} = 0$$

und im zweiten beim Grenzübergang $\beta \to \infty$

$$x(0)\,\overline{y(0)} = 0$$

ergibt. Da $y(0)$ und $y(1)$ völlig willkürlich sein können, ist die letzte Gleichung nur für

$$x(0) = x(1) = 0$$

möglich. Dann aber ist $x(t) \in D(A)$ und damit die Relation $D(A^{**}) \subset D(A)$ bewiesen. Demzufolge muß $D(A) = D(A^{**})$ sein.

Wir bestimmen die Defektindizes des Operators A. Die Gleichung $A^* x = i\,x$ nimmt in unserem Fall die Gestalt

$$i\,\frac{dx}{dt} = i\,x$$

an und besitzt die bis auf lineare Abhängigkeit eindeutige Lösung $x(t) = c\,e^t$. Analog besitzt die Gleichung

$$A^* x = -\,i\,x$$

die eindeutige Lösung

$$x(t) = c\,e^{-t}.$$

Im Falle eines endlichen Intervalls gehören beide Lösungen zum Raum $L_2(a, b)$, folglich sind beide Räume, N_i und N_{-i}, eindimensional, und der Operator besitzt die Defektindizes (1, 1). Im zweiten Fall gehört dem Raum $L_2[0, \infty)$ nur die Lösung $c\,e^{-t}$ der zweiten Gleichung an, der Unterraum N_i besteht nur aus dem Nullelement, und der Operator A hat die Defektindizes (0, 1). Mithin ist im zweiten Fall der Operator A maximal und besitzt keine selbstadjungierte Erweiterung.

Im ersten Fall konstruieren wir alle selbstadjungierten Erweiterungen des Operators A. Die Unterräume N_i und N_{-i} werden von den Elementen e^t bzw. e^{-t} erzeugt.

Wegen

$$\|e^t\| = \left(\int_0^1 e^{2t}\,dt\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{e^2-1}{2}}$$

und

$$\|e^{-t}\| = \left(\int_0^1 e^{-2t}\,dt\right)^{1/2} = \frac{1}{e}\sqrt{\frac{e^2-1}{2}}$$

besitzen die Elemente e^t und e^{1-t} gleiche Normen. Wir ordnen dem Element e^t das Element $e^{i\tau}\,e^{1-t}$ zu, wobei τ irgendeine reelle Zahl ist. Für jedes τ ist auf der aus den Funktionen der Form

$$y(t) = x(t) + c\,e^t + c\,e^{i\tau}\,e^{1-t} \tag{6}$$

mit $x(t) \in D(A)$ bestehenden linearen Mannigfaltigkeit D_τ der Operator A_τ mit Hilfe der Gleichung

$$A_\tau\,y = A\,x + i\,c\,e^t - i\,c\,e^{i\tau}\,e^{1-t}$$

definiert.

Dieser ist eine selbstadjungierte Erweiterung des Operators A. Der Definitionsbereich D_τ dieses Operators kann mit Hilfe von Randbedingungen angegeben werden. Wenn nämlich die Funktion $y(t)$ in der Form (6) darstellbar ist, so ist

$$y(0) = c + c\,e^{1+i\tau} = c\,(1 + e^{1+i\tau}),$$

$$y(1) = c\,e + c\,e^{i\tau} = c\,(e^{i\tau} + e).$$

Hieraus ergibt sich

$$\frac{y(0)}{y(1)} = \frac{1 + e^{1+i\tau}}{e^{i\tau} + e}.$$

Da die Transformation

$$\zeta = \frac{1 + e\,z}{z + e}$$

den Einheitskreis der komplexen Ebene in sich abbildet, können wir

$$\frac{1 + e^{1+i\tau}}{e^{i\tau} + e} = e^{i\sigma}$$

schreiben, wobei σ eine reelle Zahl ist. Deshalb ist

$$y(0) = e^{i\sigma}\,y(1).$$

Ist umgekehrt diese Bedingung erfüllt, so besitzt $y(t)$ die Form (6). Es sei $y(0) = e^{i\sigma}\,y(1) = \dfrac{1 + e^{1+i\tau}}{e^{i\tau} + e}\,y(1)$. Wir setzen

$$c = \frac{y(0)}{1 + e^{1+i\tau}} = \frac{y(1)}{e^{i\tau} + e}$$

und

$$x(t) = y(t) - c\,(e^t + e^{i\tau}\,e^{1-t}).$$

Dann ist

$$x(0) = y(0) - c\,(1 + e^{1+i\tau}) = y(0) - \frac{y(0)}{1 + e^{1+i\tau}}(1 + e^{1+i\tau}) = y(0) - y(0) = 0,$$

und wir finden analog $x(1) = 0$. Mithin ist

$$y(t) = x(t) + c\,(e^t + e^{i\tau}\,e^{1-t}),$$

wobei $x(t) \in D(A)$ ist, d. h., $y(t)$ besitzt die Form (6). Der Beweis ist damit abgeschlossen.

Somit besteht der Definitionsbereich D_τ der selbstadjungierten Erweiterung A_τ des Operators A aus genau den Funktionen $y(t)$ des Raumes $L_2[0, 1]$, die auf $[0, 1]$ eine quadratisch summierbare Ableitung besitzen und für die

$$y(0) = e^{i\sigma}\,y(1), \qquad e^{i\sigma} = \frac{1 + e^{1+i\tau}}{e^{i\tau} + e}$$

ist.

Der Parameter τ kann verschiedene Werte annehmen, und wir erhalten dadurch ein Kontinuum verschiedener selbstadjungierter Erweiterungen des Operators A. Wir bestimmen das Spektrum des Operators A_τ. Die Eigen-

funktionen des Operators stellen Lösungen der Randwertaufgabe

$$\begin{gathered} i\,\frac{dx}{dt} = \lambda\, x, \quad \lambda \text{ reell}, \\ x(0) = e^{i\sigma}\, x(1) \end{gathered} \tag{7}$$

dar. Die Lösungen sind die Funktionen $e^{-i\lambda t}$, die der Bedingung

$$1 = e^{i(\sigma-\lambda)}$$

genügen. Hieraus folgt

$$\sigma - \lambda = 2\,k\,\pi$$

oder

$$\lambda_k = \sigma - 2\,k\,\pi\,.$$

Folglich lauten die Eigenfunktionen

$$x_k(t) = e^{-i\lambda_k t} = e^{-i\sigma t}\, e^{2k\pi i t}\,.$$

Diese Eigenfunktionen sind offenbar normiert. Alle von λ_k verschiedenen Punkte der reellen Achse sind reguläre Punkte des Operators A_τ. Die allgemeine Lösung der Gleichung

$$i\,\frac{dx}{dt} - \lambda\, x = y$$

hat nämlich die Form

$$x = e^{-i\lambda t}\left(c - i\int_0^t e^{i\lambda\xi}\, y(\xi)\, d\xi\right),$$

und es braucht nur nachgewiesen zu werden, daß die Konstante c zur Bedingung $x(0) = e^{i\sigma}\, x(1)$ passend gewählt werden kann.

Das führt auf die Gleichung

$$c = e^{i\sigma}\left\{e^{-i\lambda}\left(c - i\int_0^1 e^{i\lambda\xi}\, y(\xi)\, d\xi\right)\right\},$$

die offenbar unter der Bedingung

$$e^{i(\sigma-\lambda)} \neq 1$$

(d. h., wenn $\lambda \neq \lambda_k$ ist) lösbar ist. Also besitzt der Operator A ein reines Punktspektrum

$$x = \int_{-\infty}^{\infty} dE_\lambda\, x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_{\lambda_n}\, x = e^{-i\sigma t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{2\pi n i t}\,, \tag{8}$$

$$A_\tau\, x = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dE_\lambda\, x = e^{-i\sigma t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n\, c_n\, e^{2\pi n i t} \tag{9}$$

mit $c_n = (x, x_n)$. Die Funktionen des Operators A_τ haben die Form

$$F(A_\tau)\, x = e^{-i\sigma t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\lambda_n)\, c_n\, e^{2\pi n i t}\,. \tag{10}$$

Insbesondere gestattet die Resolvente die Zerlegung

$$R_\lambda x = e^{-i\sigma t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{\sigma - 2 n \pi - \lambda} e^{2\pi n i t} . \tag{11}$$

Für $\sigma = 0$ gibt Gleichung (8) die Entwicklung einer quadratisch summierbaren Funktion in eine gewöhnliche FOURIER-Reihe an.

Wir wenden uns dem Fall eines unendlichen Intervalls $(-\infty, \infty)$ zu und betrachten erneut in $L_2(-\infty, \infty)$ den selbstadjungierten Operator $A = i\frac{d}{dt}$.

Wir weisen nach, daß dieser Operator unitär äquivalent dem Operator der Multiplikation mit der unabhängigen Veränderlichen im Raum $L_2(-\infty, \infty)$ ist. Dabei verstehen wir unter der unitären Äquivalenz der unbeschränkten Operatoren A und B folgendes: Es existiert ein unitärer Operator U mit $U\,D(A) = D(B)$ (und damit $D(A) = U^{-1} D(B)$) und

$$U\,A\,U^{-1} x = B\,x$$

für jedes $x \in D(B)$.

Zur Herleitung der unitären Äquivalenz der Operatoren $A = i \cdot \frac{d}{dt}$ und $B = t$ benutzen wir den folgenden bekannten Satz von PLANCHEREL, dessen Beweis z. B. in [35] zu finden ist.

Es sei $x(t)$ eine reelle oder komplexe Funktion des Raumes $L_2(-\infty, \infty)$. Wir setzen

$$y(t, a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} x(\tau)\, e^{it\tau}\, d\tau .$$

Dann konvergiert $y(t, a)$ für $a \to \infty$ auf $(-\infty, \infty)$ im Mittel gegen eine Funktion $y(t) \in L_2\,(-\infty, \infty)$ und die Funktion

$$x(t, a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} y(\tau)\, e^{-it\tau}\, d\tau$$

im Mittel gegen $x(t)$.

Die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ hängen auch über die Gleichungen

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \frac{e^{it\tau} - 1}{i\tau}\, d\tau ,$$

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) \frac{e^{-it\tau} - 1}{-i\tau}\, d\tau$$

zusammen. Außerdem ist

$$\|x(t)\| = \|y(t)\| .$$

Das Intervall $(-a, a)$ kann in den vorhergehenden Gleichungen durch ein Intervall $(-a, b)$ ersetzt werden, in dem unabhängig voneinander $a, b \to \infty$ streben.

Es sei U der durch die Gleichung

$$U\,x = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, e^{i\,t\,\tau}\, d\tau$$

definierte Operator in $L_2(-\infty, \infty)$. Das Integral verstehen wir als Grenzwert im Mittel von Integralen über endliche Intervalle. Der Operator U stellt gemäß dem Satz von PLANCHEREL eine umkehrbar eindeutige Abbildung von $L_2(-\infty, \infty)$ auf sich unter Erhaltung der Norm dar, d. h., er ist ein unitärer Operator. Der inverse Operator hat die Form

$$U^{-1}\,x = U^*\,x = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, e^{-i\,t\,\tau}\, d\tau\,.$$

Es sei $x(t)$ eine beliebige Funktion aus $D(A)$, d. h. $x(t) \in L_2(-\infty, \infty)$, und es existiere $\frac{dx(t)}{dt} \in L_2(-\infty, \infty)$. Dann[1] ist

$$y(t) = U\,x = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, e^{i\,t\,\tau}\, d\tau = \text{l.i.m.}\, \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \int\limits_{-a}^{a} x(\tau)\, e^{i\,t\,\tau}\, d\tau$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, \text{l.i.m.} \left[x(\tau)\, \frac{e^{i\,t\,\tau}}{i\,t}\Bigg|_{-a}^{a} - \frac{1}{i\,t} \int\limits_{-a}^{a} \frac{dx(\tau)}{d\tau}\, e^{i\,t\,\tau}\, d\tau \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, \frac{1}{i\,t}\, \text{l.i.m.}\, [x(a)\, e^{i\,a\,t} - x\,(-a)\, e^{-i\,a\,t}] - \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, \frac{1}{i\,t}\, \text{l.i.m.} \int\limits_{-a}^{a} \frac{dx(\tau)}{d\tau}\, e^{i\,t\,\tau}\, d\tau\,.$$

Auf Grund der Zugehörigkeit von $x(t)$ und $\frac{dx}{dt}$ zum Raum $L_2(-\infty, \infty)$ streben $x(a)$ und $x\,(-a)$ für $a \to \infty$ gegen Null, folglich ist der Grenzwert des ersten Summanden der rechten Seite der vorhergehenden Gleichung gleich Null. Neben $\frac{dx(t)}{dt}$ gehört auch die FOURIER-Transformierte dieser Funktion zu $L_2(-\infty, \infty)$. Deshalb ist

$$t\,y(t) = -\frac{1}{i\sqrt{2\,\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx(\tau)}{d\tau}\, e^{i\,t\,\tau}\, d\tau = z(t) \in L_2(-\infty, \infty)\,.$$

Folglich gilt

$$y(t) \in L_2(-\infty, \infty)\,, \qquad t\,y(t) \in L_2(-\infty, \infty)\,,$$

d. h.

$$y(t) \in D(B)\,.$$

[1]) Mit l.i.m. wird der Limes im Mittel bezeichnet.

Es sei umgekehrt $x(t) \in D(B)$. Dann ist für jedes endliche oder unendliche Intervall, das den Punkt $t = 0$ nicht enthält

$$\int_a^b |x(t)|\, dt \leqq \left(\int_a^b t^{-2}\, dt\right)^{1/2} \left(\int_a^b |t\, x(t)|^2\, dt\right)^{1/2} < \infty .$$

Demnach ist $x(t)$ auf $(-\infty, \infty)$ absolut integrierbar. Daher konvergiert das Integral

$$y(t) = U^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, e^{-it\tau}\, d\tau$$

absolut. Wir führen die Funktion

$$z(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tau\, x(\tau)\, e^{-it\tau}\, d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \tau\, x(\tau) \frac{e^{-it\tau} - 1}{-i\tau}\, d\tau$$

ein und erhalten

$$\int_0^t z(\tau)\, d\tau = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, (e^{-it\tau} - 1)\, d\tau + c = i\,(y(t) - y(0)) + c\,. \quad (12)$$

Das in dieser Gleichung auftretende uneigentliche Integral konvergiert absolut und gleichmäßig bezüglich t auf der gesamten reellen Achse. Aus (12) erhalten wir

$$y(t) = \frac{1}{i} \int_0^t z(\tau)\, d\tau + c\,, \quad (13)$$

wonach $\frac{dy(t)}{dt}$ existiert und $L_2(-\infty, \infty)$ angehört, d. h., es ist $y(t) \in D(A)$.

Damit haben wir bewiesen: Es ist $U x \in D(B)$ für $x \in D(A)$ und $U^{-1} x \in D(A)$ für $x \in D(B)$.

Ist $x \in D(B)$, so wird infolge (13)

$$U^{-1} x = y(t) = \frac{1}{i} \int_0^t z(\tau)\, d\tau + c\,.$$

Mithin gilt

$$A\, U^{-1} x = i \frac{dy}{dt} = z(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tau\, x(\tau)\, e^{-it\tau}\, d\tau = U^{-1} B\, x\,.$$

Hieraus folgt

$$U\, A\, U^{-1} x = B\, x\,,$$

und damit ist die unitäre Äquivalenz der Operatoren A und B bewiesen.

A und B seien beliebige unitär äquivalente Operatoren:

$$U\, A\, U^{-1} = B\,.$$

Ist E_λ, $-\infty < \lambda < \infty$, die Spektralfunktion des Operators A, so ist offensichtlich

$$\tilde{E}_\lambda = U E_\lambda U^{-1}$$

ebenfalls eine Zerlegung der Einheit. $\tilde{B}$ sei der zur Zerlegung $\tilde{E}_\lambda$ gehörige selbstadjungierte Operator. Wir bekommen

$$\tilde{B} x = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\tilde{E}_\lambda x = \lim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k \tilde{E}(\Delta_k) x = \lim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k U E(\Delta_k) U^{-1} x$$

$$= U \left(\lim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k E(\Delta_k) \right) U^{-1} x = U \left(\int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE_\lambda \right) U^{-1} x = U A U^{-1} x = B x \, .$$

Also ist

$$\tilde{E}_\lambda = U E_\lambda U^{-1}$$

die Spektralfunktion des zum Operator A unitär äquivalenten Operators B. Daraus folgt insbesondere, daß die Spektren der Operatoren A und B zusammenfallen. In unserem konkreten Beispiel mit $A = i \frac{d}{dt}$, $B = t$ erhalten wir, daß der Operator A ein rein stetiges, die gesamte reelle Achse ausfüllendes Spektrum besitzt.

Für die Funktionen des Operators A finden wir die Darstellung

$$F(A) x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{i \xi \tau} d\tau \right\} e^{-i t \xi} d\xi = U^{-1} F(B) U x \, ;$$

insbesondere kann die Spektralfunktion des Operators A in der Gestalt

$$E_\lambda x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\lambda} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{i \xi \tau} d\tau \right\} e^{-i t \xi} d\xi$$

dargestellt werden.

Die von uns oben hergeleitete unitäre Äquivalenz des Differentiationsoperators mit dem Operator der Multiplikation mit der unabhängigen Veränderlichen ist keine spezifische Besonderheit des Differentiationsoperators. Es zeigt sich nämlich, daß zu jedem selbstadjungierten Operator eine Zerlegung des gesamten Raumes in paarweise orthogonale invariante Unterräume existiert, so daß jeder aus dem ursprünglichen Operator durch Einschränkung auf einen solchen Unterraum entstehende Operator unitär äquivalent (genauer isomorph) zu dem Operator der Multiplikation mit der unabhängigen Veränderlichen im Raum der auf dem Intervall $(-\infty, \infty)$ mit einem Gewicht $\varrho(t)$ quadratisch summierbaren Funktionen ist.

KAPITEL VIII

EINIGE FRAGEN DER DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG IN LINEAREN NORMIERTEN RÄUMEN

In diesem Kapitel betrachten wir die Differentiation und Integration in linearen normierten Räumen und einige ihrer Anwendungen.

§ 1. Differentiation und Integration abstrakter Funktionen von Zahlen

E sei ein linearer normierter Raum und R eine Punktmenge auf der Zahlengeraden. Einen im allgemeinen nichtlinearen Operator $x = x(t)$, der R in E abbildet, nennen wir im weiteren *abstrakte Funktion der Zahl* t. Beispiele solcher Funktionen gibt es in der Analysis und ihren Anwendungen viele. Es genügt, einige Funktionen von Zahlen in der Differentialgeometrie, die einparametrigen Gesamtheiten der Lösungen von Differentialgleichungen, Operatorfamilien wie z. B. Integraloperatoren, die von einem Parameter abhängen, und anderes zu nennen. Im weiteren werden wir der Einfachheit halber annehmen, daß R ein Intervall $[a, b]$ der Zahlengeraden ist.

Die abstrakten Funktionen einer Zahl können addiert und mit einer reellen Zahl multipliziert werden, d. h., sie bilden einen linearen Raum.

Eine Funktion $x(t)$ heißt *stetig im Punkt* t_0 des Intervalls $[a, b]$, wenn für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(t_0, \varepsilon)$ mit

$$||x(t) - x(t_0)|| < \varepsilon$$

für $t \in [a, b]$ und $|t - t_0| < \delta$ existiert.

Eine Funktion, die in jedem Punkt des Intervalls $[a, b]$ stetig ist, wird wie gewöhnlich *stetig auf diesem Intervall* genannt. Die Addition von Funktionen und die Multiplikation mit einer Zahl führen offenbar nicht aus der Klasse der stetigen Funktionen heraus.

Eine Funktion $x(t)$ heißt *gleichmäßig stetig* auf $[a, b]$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zahl δ bestimmt werden kann, so daß für $t_1, t_2 \in [a, b]$ und $|t_1 - t_2| < \delta$ unabhängig von der Lage der Punkte t_1 und t_2 auf dem Intervall $[a, b]$

$$||x(t_1) - x(t_2)|| < \varepsilon$$

wird.

Hilfssatz 1. *Eine auf dem Intervall* $[a, b]$ *stetige Funktion* $x(t)$, $t \in [a, b]$, $x \in E$, *ist gleichmäßig stetig auf diesem Intervall.*

Wir betrachten die auf dem Quadrat $a \leqq t, \tau \leqq b$ durch die Gleichung

$$\varphi(t, \tau) = ||x(t) - x(\tau)||$$

definierte Funktion $\varphi(t, \tau)$. Diese Funktion $\varphi(t, \tau)$ ist stetig auf diesem Quadrat und folglich gleichmäßig stetig auf ihm. Deshalb gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$|\varphi(t_1, \tau_1) - \varphi(t_2, \tau_2)| < \varepsilon \tag{1}$$

für $|t_1 - t_2| < \delta$, $|\tau_1 - \tau_2| < \delta$ und unabhängig von der Lage der Punkte (t_1, τ_1) und (t_2, τ_2) im Quadrat $a \leqq t, \tau \leqq b$. Wir setzen

$$\tau_1 = t_1\,, \quad \tau_2 = t_2$$

mit

$$|t_1 - t_2| < \delta\,.$$

Wir berücksichtigen

$$\varphi(t_1, t_2) = \|x(t_2) - x(t_2)\| = 0$$

und bekommen aus (1) für $|t_1 - t_2| < \delta$

$$|\varphi(t_1, t_2)| = \|x(t_1) - x(t_2)\| < \varepsilon\,,$$

und damit ist die gleichmäßige Stetigkeit von $x(t)$ bewiesen.

Man kann leicht zeigen, daß eine auf dem Intervall $[a, b]$ stetige Funktion $x(t)$ dort auch beschränkt ist (d. h., die Wertmenge der Funktion $x(t)$, $t \in [a, b]$, ist eine beschränkte Menge des Raumes E).

Differentiation. Wir betrachten die Funktion $x = x(t)$ mit $x \in E$ und $t \in [a, b]$.

Die Ableitung $x'(t)$ definieren wir durch

$$\frac{d}{dt}\,x(t) = x'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\,[x\,(t + \Delta t) - x(t)]\,, \tag{2}$$

falls der Grenzwert der rechten Seite existiert. Es ergibt sich

$$x'(t) = \frac{1}{\Delta t}\,[x\,(t + \Delta t) - x(t)] - \alpha(t, \Delta t)\,,$$

dabei konvergiert

$$\alpha(t, \Delta t) \to 0 \quad \text{mit} \quad \Delta t \to 0\,.$$

Deshalb gilt

$$x\,(t + \Delta t) - x(t) = x'(t)\,\Delta t + \alpha(t, \Delta t)\,\Delta t\,. \tag{3}$$

Für $\Delta t \to 0$ strebt die rechte Seite der Gleichung (3) gegen 0. Hieraus folgt: Wenn $x(t)$ in t eine Ableitung hat, dann ist $x(t)$ im Punkt t stetig.

Man erkennt leicht folgende Eigenschaften der Differentiation:

1. $[x(t) + y(t)]' = x'(t) + y'(t)$.
2. $[\lambda\, x(t)]' = \lambda\, x'(t)$ für jede Zahl λ.

3. Für die Elemente $x \in E_x$ sei eine linksseitige (rechtsseitige) Multiplikation mit Elementen $y \in E_y$ definiert. Sie sei stetig und distributiv bezüglich der

Addition und vertauschbar mit der Multiplikation von Zahlenfaktoren. Dann gilt

$$[y\, x(t)]' = y\, x'(t)\,, \tag{4}$$

d. h., der konstante Faktor kann vor das Differentiationszeichen gezogen werden.

Die Eigenschaften 1. und 2. sind klar, 3. folgt aus Stetigkeit und Distributivität der linksseitigen Multiplikation, und zwar ist

$$y\, x'(t) = y \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} [x\,(t + \Delta t) - x(t)] = \lim_{\Delta t \to 0} y \left\{\frac{1}{\Delta t} [x\,(t + \Delta t) - x(t)]\right\}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} [y\, x\,(t + \Delta t) - y\, x(t)] = \frac{d}{dt} [y\, x(t)]\,.$$

Analog erhält man

$$[x(t)\, y]' = x'(t)\, y \tag{5}$$

bei rechtsseitiger Multiplikation.

Beispiel. Es sei $x = x(t)$ mit $x \in E_x$ und A ein Operator aus $(E_x \to E_y)$:

$$[A\, x(t)]' = A\, x'(t)\,. \tag{6}$$

Ist $A = A(t) \in (E_x \to E_y)$ und $x \in E_x$, dann ergibt sich

$$[A(t)\, x]' = A'(t)\, x\,. \tag{7}$$

Insbesondere gilt für ein lineares Funktional

$$\{f[x(t)]\}' = f[x'(t)]\,, \tag{8}$$

$$\{f(t)\,(x)\}' = f'(t)\,(x)\,. \tag{9}$$

Ableitungen höherer Ordnung. Wir wollen nun Ableitungen höherer Ordnung definieren. Man kann zwei Definitionen der n-ten Ableitung einer abstrakten Funktion $x = x(t)$ geben, wie man dies auch bei gewöhnlichen Funktionen kennt.[1])

1. Es ist

$$\Delta_{\Delta t}^n\, x(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} x\,(t + k\,\Delta t)$$

die *n-te Differenz* von $x(t)$ im Punkt t. Weiter heißt

$$\delta_{\Delta t}^n\, x(t) = \Delta_{\Delta t}^n\, x\left(t - \frac{n}{2}\Delta t\right)$$

n-te zentrale Differenz.

Der Ausdruck

$$x^{(n)}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{(\Delta t)^n}\, \delta_{\Delta t}^n\, x(t) \tag{10}$$

[1]) Siehe Anhang IV.

soll — unter der Voraussetzung, daß dieser Grenzwert existiert — *n-te Differenzenableitung* der Funktion $x(t)$ im Punkt t genannt werden.

Ist der Grenzübergang in der Formel (10) in der Umgebung eines jeden Punktes t gleichmäßig, so heißt $x^{(n)}(t)$ eine *gleichmäßige n-te Differenzenableitung.*

2. Die *n-te Ableitung* $x^{(n)}(t)_0$ wird durch n-malige sukzessive Differentiation der Funktion $x(t)$ definiert

$$x'(t)_0 = \frac{d}{dt}\, x(t)\,, \qquad x''(t)_0 = \frac{d}{dt}\,[x'(t)_0], \ldots, \qquad x^{(n)}(t)_0 = \frac{d}{dt}\,[x^{(n-1)}(t)_0]\,.$$

Satz 1. *Wenn in einer Umgebung eines Punktes t die stetige n-te Ableitung $x^{(n)}(t)_0$ existiert, dann gibt es in dieser Umgebung auch die gleichmäßige n-te Differenzenableitung $x^{(n)}(t)$, und es gilt*

$$x^{(n)}(t) = x^{(n)}(t)_0\,.$$

Gibt es umgekehrt in einer Umgebung eines Punktes t die gleichmäßig stetige, gleichmäßige Differenzenableitung $x^{(n)}(t)$, so existiert in dieser Umgebung auch die n-te Ableitung $x^{(n)}(t)_0$, und es gilt wieder $x^{(n)}(t) = x^{(n)}(t_0)$.

Diese Aussagen gelten auch für Funktionen, deren Wertevorrat aus Zahlen besteht[1]). Der Übergang zu abstrakten Funktionen geschieht mit einer Methode, die in der Funktionalanalysis häufig angewandt wird. Wir führen dies für die erste Aussage durch.

Für ein beliebiges lineares Funktional $f \in E^*$ ist

$$\varphi(t) = f[x(t)]$$

eine Funktion, deren Definitionsbereich und Wertevorrat aus Zahlen bestehen.

Für sie erhält man wegen (8)

$$\begin{aligned} f[x'(t)_0] &= \{f[x(t)]\}' = \varphi'(t)\,, \\ f[x''(t)_0] &= \{f[x'(t)_0]\}' = \varphi''(t)\,, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f[x^n(t_0)] &= \varphi^n(t)\,. \end{aligned}$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned} f\left[\frac{1}{(\Delta t)^n}\,\delta^n_{\Delta t}\,x(t)\right] &= \frac{1}{(\Delta t)^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\varphi\left(t + \left(k - \frac{n}{2}\right)\Delta t\right) \\ &= \frac{1}{(\Delta t)^n}\,\delta^n_{\Delta t}\,\varphi(t) = \varphi^{(n)}\,(t + \vartheta\,\Delta t) = f[x^{(n)}\,(t + \vartheta\,\Delta t)_0]^{1)}\,, \end{aligned}$$

wobei $-\frac{n}{2} \leqq \vartheta \leqq \frac{n}{2}$ ist. Da $x^{(n)}(t)_0$ nach Voraussetzung in einer Umgebung des Punktes t stetig ist, so ist zu vorgegebenem ε ($\varepsilon > 0$)

$$||x^{(n)}\,(t + \vartheta\,\Delta t)_0 - x^{(n)}(t)_0|| \leqq \varepsilon_{\Delta t}\,,$$

---

[1]) S. Anhang IV.

wobei $\varepsilon_{\Delta t} \to 0$ geht für $\Delta t \to 0$, und zwar gleichmäßig in einer Umgebung des Punktes t.

Daraus ergibt sich

$$\left| f\left[\frac{1}{(\Delta t)^n}\, \delta^n_{\Delta t}\, x(t)\right] - f\,[x^{(n)}(t)_0]\right| \leqq \varepsilon_{\Delta t}\, \|f\|\,. \tag{11}$$

Die Ungleichung (11) gilt für beliebiges $f \in E^*$, deshalb ist

$$\left\| \frac{1}{(\Delta t)^n}\, \delta^n_{\Delta t}\, x(t) - x^{(n)}(t)_0 \right\| \leqq \varepsilon_{\Delta t}$$

und folglich

$$x^{(n)}(t)_0 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{(\Delta t)^n}\, \delta^n_{\Delta t}\, x(t)\,.$$

Dabei ist die Konvergenz in einer Umgebung eines jeden Punktes t gleichmäßig, q.e.d.

Partielle Ableitungen. Wir führen den Begriff der partiellen Ableitung einer abstrakten Funktion ein.

Dazu betrachten wir eine Funktion von n reellen Veränderlichen $t_1, t_2, \ldots, t_n$ mit einem Wertevorrat, der in einem linearen normierten Raum E liegt: $x = x(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in E$. Man kann $t_1, t_2, \ldots, t_n$ als Komponenten des n-dimensionalen Vektors $\bar{t} = \sum_{i=1}^{n} t_i\, e_i$ auffassen, wo die e_i orthonormale Basisvektoren, d. h. n-dimensionale paarweise orthogonale Einheitsvektoren sind.

Wir definieren die *n-te partielle Differenzenableitung*

$$\frac{\partial^n}{\partial t_1\, \partial t_2 \ldots \partial t_n}\, x(t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

im Punkt $\bar{t}_0 = \sum_{i=1}^{n} t_i^0\, e_i$.

Dazu bilden wir die n-te partielle Differenz

$$\Delta^n_{t_1, t_2, \ldots, t_n; \Delta t}\, x(t_0) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k} (-1)^{n-k}\, x\,[\bar{t}_0 + \Delta t\,(e_{i_1} + e_{i_2} + \cdots + e_{i_k})].$$

Hierbei ist $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ eine Teilmenge von $(1, 2, \ldots, n)$, für die gilt $0 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqq n$.

Die Summe wird über alle derartigen Teilmengen erstreckt. Die *zentrale n-te partielle Differenz* im Punkt t_0

$$\delta^n_{t_1, t_2, \ldots, t_n; \Delta t}\, x(\bar{t}_0)$$

ist die n-te partielle Differenz im Punkt

$$\bar{\tau}_0 = \bar{t}_0 - \frac{1}{2}\, \Delta t \sum_{i=1}^{n} e_i\,.$$

Es gilt also

$$\delta^n_{t_1, t_2, \ldots, t_n; \Delta t}\, x(\bar{t}_0) = \Delta^n_{t_1, t_2, \ldots, t_n; \Delta t}\, x\left(\bar{t}_0 - \frac{1}{2}\, \Delta t \sum_{i=1}^{n} e_i\right).$$

Dann heißt der Limes für $\Delta t \to 0$ von

$$\frac{1}{(\Delta t)^n} \delta^n_{t_1, t_2, \ldots, t_n; \Delta t} x(\bar{t}_0),$$

falls er existiert, *n-te partielle Differenzenableitung*

$$\frac{\partial^n}{\partial t_1 \partial t_2 \ldots \partial t_n} x(t_1^0, t_2^0, \ldots, t_n^0)$$

der Funktion f im Punkt

$$\bar{t}_0 = (t_1^0, t_2^0, \ldots, t_n^0).$$

Parallel hierzu kann man die *n-te partielle Ableitung* definieren. Sie ist das Resultat nacheinander ausgeführter Differentiationen der Funktion $x(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ nach t_{k_n}, nach $t_{k_{n-1}}$ und schließlich nach t_{k_1}, wo $k_1, k_2, \ldots, k_n$ eine beliebige Permutation der Indizes $1, 2, \ldots, n$ ist. Es muß natürlich vorausgesetzt werden, daß die nacheinander erhaltenen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial t_{k_n}} x(t_1, t_2, \ldots, t_n), \frac{\partial}{\partial t_{k_{n-1}}}\left(\frac{\partial}{\partial t_{k_n}} x(t_1, t_2, \ldots, t_n)\right),$$
$$\ldots, \frac{\partial}{\partial t_{k_1}}\left\{\frac{\partial}{\partial t_{k_2}}\left[\ldots \frac{\partial}{\partial t_{k_n}} x(t_1, t_2, \ldots, t_n) \ldots\right]\right\}$$

in einer Umgebung von $\bar{t}_0$ existieren.

Satz 2. *Wenn in der Umgebung des Punktes*

$$t_0 = (t_1^0, t_2^0, \ldots, t_n^0)$$

eine n-te partielle Ableitung der Funktion $x(\bar{t})$ existiert und diese Ableitung in $\bar{t}_0$ stetig ist, so existiert in t_0 auch jede n-te partielle Differenzenableitung. Beide Ableitungen stimmen überein.

f sei ein beliebiges lineares Funktional aus E^*. Dann ist

$$\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n) = f[x(t_1, t_2, \ldots, t_n)]$$

eine gewöhnliche Funktion von $t_1, t_2, \ldots, t_n$; deshalb[1]) ist für eine beliebige Permutation $k_1, k_2, \ldots, k_n$ der Indizes $1, 2, \ldots, n$

$$\frac{1}{(\Delta t)^n} \delta^n_{t_1, t_2, \ldots, t_n; \Delta t} \varphi(t_1^0, \ldots, t_n^0) = \frac{\partial}{\partial t_{k_1}}\left\{\ldots \frac{\partial}{\partial t_{k_n}} \varphi(t_1^0 + \theta_1 \Delta t, \ldots, t_n^0 + \theta_n \Delta t) \ldots\right\},$$
$$0 < \theta_i < 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Folglich ist

$$f\left[\frac{1}{(\Delta t)^n} \delta^n_{t_1, t_2, \ldots, t_n; \Delta t} x(t_1^0, \ldots, t_n^0)\right] = \frac{1}{(\Delta t)^n} \delta^n_{t_1, t_2, \ldots, t_n; \Delta t} \varphi(t_1^0, \ldots, t_n^0)$$
$$= \frac{\partial}{\partial t_{k_1}}\left\{\ldots \frac{\partial}{\partial t_{k_n}} \varphi(t_1^0 + \theta_1 \Delta t, \ldots, t_n^0 + \theta_n \Delta t) \ldots\right\}$$
$$= f\left[\frac{\partial}{\partial t_{k_1}}\left\{\ldots \frac{\partial}{\partial t_{k_n}} x(t_1^0 + \theta_1 \Delta t, \ldots \ldots)\right\}\right],$$

[1]) Siehe Anhang IV.

da das lineare Funktional f vor das Differentiationszeichen gezogen werden kann.

Nach Voraussetzung ist die n-te partielle Ableitung von $x(\bar{t})$ stetig im Punkt $\bar{t}_0$, daraus folgt

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t_{k_1}}\left\{\cdots\frac{\partial}{\partial t_{k_n}}x\,(t_1^0+\theta_1\,\Delta t,\ldots,t_n^0+\theta_n\,\Delta t\ldots\right\}\right.$$
$$\left.-\frac{\partial}{\partial t_{k_1}}\left\{\cdots\frac{\partial}{\partial t_{k_n}}x(t_1^0,\ldots,t_n^0)\ldots\right\}\right\|\leqq\varepsilon_{\Delta t}\,,$$

wobei $\varepsilon_{\Delta t}\to 0$ geht für $\Delta t\to 0$. Es gilt also

$$\left|f\left[\frac{1}{(\Delta t)^n}\delta^n_{t_1,t_2,\ldots,t_n;\,\Delta t}\,x(\bar{t}_0)\right]-f\left[\frac{\partial}{\partial t_{k_1}}\left\{\cdots\frac{\partial}{\partial t_{k_n}}x(\bar{t}_0)\ldots\right\}\right]\right|$$
$$=\left|f\left[\frac{\partial}{\partial t_{k_1}}\left\{\cdots\frac{\partial}{\partial t_{k_n}}x\,(t_1^0+\theta_1\,\Delta t,\ldots,t_n^0+\theta_n\,\Delta t)\ldots\right\}\right]\right.$$
$$\left.-f\left[\frac{\partial}{\partial t_{k_1}}\left\{\cdots\frac{\partial}{\partial t_{k_n}}x(t_1^0,\ldots,t_n^0)\ldots\right\}\right]\right|$$
$$\leqq\|f\|\left\|\frac{\partial}{\partial t_{k_1}}\left\{\cdots\frac{\partial}{\partial t_{k_n}}x\,(t_1^0+\theta_1\,\Delta t,\ldots,t_n^0+\theta_n\,\Delta t)\ldots\right\}\right.$$
$$\left.-\frac{\partial}{\partial t_{k_1}}\left\{\cdots\frac{\partial}{\partial t_{k_n}}x(t_1^0,\ldots,t_n^0)\ldots\right\}\right\|\leqq\|f\|\,\varepsilon_{\Delta t}\,.$$

Diese Ungleichung ist für jedes $f\in E^*$ richtig, also ist

$$\left\|\frac{1}{(\Delta t)^n}\,\delta^n_{t_1,t_2,\ldots,t_n;\,\Delta t}\,x(\bar{t}_0)-\frac{\partial}{\partial t_{k_1}}\left\{\cdots\frac{\partial}{\partial t_{k_n}}x(\bar{t}_0)\ldots\right\}\right\|\leqq\varepsilon_{\Delta t}\,.$$

Hieraus ergibt sich, daß

$$\frac{1}{(\Delta t)^n}\,\delta^n_{t_1,t_2,\ldots,t_n;\,\Delta t}\,x(\bar{t}_0)\to\frac{\partial}{\partial t_{k_1}}\left\{\cdots\frac{\partial}{\partial t_{k_n}}x(\bar{t}_0)\ldots\right\}$$

strebt für $\Delta t\to 0$, und wir haben damit die Existenz des Grenzwertes für den Ausdruck

$$\frac{1}{(\Delta t)^n}\,\delta^n_{t_1,t_2,\ldots,t_n;\,\Delta t}\,x(\bar{t}_0)$$

und seine Gleichheit mit der n-ten partiellen Ableitung bewiesen.

Folgerung. *Zwei n-te partielle Ableitungen, die verschiedenen Permutationen der Indizes $1, 2, \ldots, n$ entsprechen, stimmen an den Punkten, wo sie beide stetig sind, überein. Das heißt, die n-te partielle Ableitung hängt nicht von der Reihenfolge der Differentiation ab.*

In diesem Falle gilt die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t_{k_1}}\left\{\cdots\frac{\partial}{\partial t_{k_n}}x(t_1,t_2,\ldots,t_n)\ldots\right\}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{(\Delta t)^n}\,\delta^n_{t_1,t_2,\ldots,t_n;\,\Delta t}\,x(t_1,\ldots,t_n)\,.$$

Ihre rechte Seite hängt aber nicht von der Permutation $k_1,\ldots,k_n$ ab.

Wenn wir im folgenden von der n-ten partiellen Ableitung in einem gewissen Gebiet sprechen, werden wir annehmen, daß sie auch stetig in diesem Gebiet ist. Deshalb liefern die beiden Definitionen dasselbe, und wir werden diese Ableitung durch das Symbol

$$\frac{\partial^n}{\partial t_1\,\partial t_2\ldots\partial t_n}x(t_1,\ldots,t_n)$$

bezeichnen.

Integration. Oben betrachteten wir in der Spektraltheorie abstrakte Integrale vom STIELTJES-Typ. Dort war der Integrand eine gewöhnliche reelle oder komplexe Funktion einer reellen Veränderlichen und die integrierende Funktion abstrakt. Hier behandeln wir eine Integration, bei der umgekehrt die zu integrierende Funktion abstrakt, die Integration aber über eine reelle Veränderliche ausgeführt wird. Wie bereits in der Spektraltheorie beschränken wir uns auf den Fall RIEMANNscher Integrale stetiger Funktionen.

$x = x(t)$, $a \leqq t \leqq b$, $x \in E$, sei eine abstrakte Funktion. Wir betrachten alle möglichen Zerlegungen

$$A = [t_0, t_1, \ldots, t_n]$$

des Intervalls $[a, b]$ in Abschnitte $[t_i, t_{i+1}]$ mit

$$t_0 = a = t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b\,.$$

Eine Zerlegung $B = [s_0, s_1, \ldots, s_m]$ heißt Verfeinerung der Zerlegung $A = [t_0, t_1, \ldots, t_n]$, wenn jeder Abschnitt $[s_k, s_{k+1}]$ Teil eines Abschnittes $[t_i, t_{i+1}]$ ist. Bei der Zerlegung B wird jeder Abschnitt $[t_i, t_{i+1}]$ der Zerlegung A selbst in eine Reihe von Abschnitten $[s_k, s_{k+1}]$ der Zerlegung B unterteilt. Besitzen alle Abschnitte $[t_i, t_{i+1}]$ der Zerlegung A eine Länge, die kleiner als δ ist, $t_{i+1} - t_i \leqq \delta$, so heißt A eine *δ-Zerlegung* des Intervalls $[a, b]$ und wird mit A_δ bezeichnet.

Als Integralsumme $S(A, x(t))$ der abstrakten Funktion $x(t)$ bezüglich der Zerlegung $A = [t_0, t_1, \ldots, t_n]$ bezeichnen wir die Summe

$$S(A, x(t)) = \sum_{i=0}^{n-1} x(t_i)\,(t_{i+1} - t_i)\,. \tag{12}$$

Wir betrachten eine Funktion $x(t)$, $t \in [a, b]$, $x \in E$, wobei E ein vollständiger Raum ist, und eine Folge von δ_n-Zerlegungen $\{A_{\delta_n}\}$ des Intervalls $[a, b]$, wobei für $n \to \infty$ $\delta_n \to 0$ strebt. Wir bilden die Integralsummen $S(A_{\delta_n}, x(t))$. Besitzen für $n \to \infty$ diese Summen den Grenzwert

$$S = \lim_n S(A_{\delta_n}, x(t))\,,$$

wobei der Grenzwert S nicht von der Auswahl des Zerlegungssystems A_{δ_n} abhängen darf, so nennt man diesen Grenzwert das RIEMANN*sche Integral* der Funktion $x(t)$ über dem Intervall $[a, b]$ und bezeichnet ihn mit $\int\limits_a^b x(t)\,dt$.

Satz 3. *Ist $x(t)$ auf dem Intervall $[a, b]$ stetig, so existiert das* RIEMANN*sche Integral* $\int_a^b x(t)\,dt$.

Der Beweis des Satzes gründet sich auf die zwei folgenden Hilfssätze.

Hilfssatz 2. *Ist eine Zerlegung B des Intervalls $[a, b]$ eine Verfeinerung einer δ-Zerlegung $A = A_\delta$, so gilt*

$$\|S(A, x(t)) \to S(B, x(t))\| \leqq \omega(\delta)\,(b - a) \tag{13}$$

mit

$$\omega(\delta) = \sup_{|\tau_1 - \tau_2| \leqq \delta} \|x(\tau_1) - x(\tau_2)\|\,. \tag{14}$$

Wenn der Punkt t im Abschnitt $[t_i, t_{i+1}]$ der δ-Zerlegung A liegt, so ist

$$|t - t_i| \leqq |t_{i+1} - t_i| \leqq \delta\,.$$

Daher wird infolge (14)

$$\|x(t) - x(t_i)\| \leqq \omega(\delta)\,. \tag{15}$$

n sei die Anzahl der Abschnitte $[t_i, t_{i+1}]$ der Zerlegung A und m die Anzahl der Abschnitte $[s_j, s_{j+1}]$ der Zerlegung B. Da die Zerlegung B eine Verfeinerung von A darstellt, fällt jeder der Punkte t_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, mit einem s_j zusammen, $s_{k_i} = t_i$ (hier ist $0 = k_0 < k_1 < \cdots < k_n = m$, $m > n$). Damit zerfällt der Abschnitt $[t_i, t_{i+1}]$ der Zerlegung A in $k_{i+1} - k_i$ Abschnitte $[s_j, s_{j+1}]$ der Zerlegung B, wobei $j = k_i, k_i + 1, \ldots, k_{i+1} - 1$ ist. Für diese Werte j gilt wegen (15)

$$\|x(s_j) - x(t_i)\| \leqq \omega(\delta)\,.$$

Deshalb ist

$$S(A, x(t)) = \sum_{i=0}^{n-1} x(t_i)\,(t_{i+1} - t_i) = \sum_{i=0}^{n-1} x(t_i) \sum_{j=k_i}^{k_{i+1}-1} (s_{j+1} - s_j)\,,$$

$$S(B, x(t)) = \sum_{j+1}^{n-1} x(s_j)\,(s_{j+1} - s_j) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=k_i}^{k_{i+1}-1} x(s_j)\,(s_{j+1} - s_j)\,,$$

$$\begin{aligned}\|S(A, x(t)) - S(B, x(t))\| &= \left\| \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=k}^{k_{i+1}-1} [x(t_i) - x(s_j)]\,(s_{j+1} - s_j) \right\| \\ &\leqq \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=k_i}^{k_{i+1}-1} \|x(t_i) - x(s_j)\|\,(s_{j+1} - s_j) \\ &\leqq \omega(\delta) \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=k_i}^{k_{i+1}-1} (s_{j+1} - s_j) = \omega(\delta)\,(b - a)\,.\end{aligned} \tag{16}$$

Der Beweis ist damit abgeschlossen.

Hilfssatz 3. *Es sei A_δ bzw. A_ε eine beliebige δ- bzw. ε-Zerlegung des Intervalls $[a, b]$. Dann ist*

$$\|S(A_\delta, x(t)) - S(A_\varepsilon, x(t))\| \leqq (\omega(\delta) + \omega(\varepsilon))\,(b - a)\,.$$

Man kann immer eine Zerlegung B des Intervalls $[a, b]$ angeben, die gleichzeitig eine Verfeinerung von A_δ und von A_ε ist. Daher ist auf Grund von (13)

$$\|S(A_\delta, x(t)) - S(B, x(t))\| \leqq \omega(\delta)\,(b-a)\,,$$
$$\|S(A_\varepsilon, x(t)) - S(B, x(t))\| \leqq \omega(\varepsilon)\,(b-a)\,,$$

und daraus ergibt sich

$$\|S(A_\delta, x(t)) - S(A_\varepsilon, x(t))\| \leqq (\omega(\delta) + \omega(\varepsilon))\,(b-a)\,,$$

womit der Beweis beendet ist.

Wir beweisen nun den Satz. Wir betrachten eine Folge von δ_n-Zerlegungen $\{A_{\delta_n}\}$ des Intervalls $[a, b]$, für die für $n \to \infty$ $\delta_n \to 0$ strebt. Für die entsprechenden Integralsummen $S(A_{\delta_n}, x(t))$ gilt nach Hilfssatz 3 die Ungleichung

$$\|S(A_{\delta n}, x(t)) - S(A_{\delta_{n+p}}, x(t))\| \leqq (\omega(\delta_n) + \omega(\delta_{n+p}))\,(b-a)\,.$$

Die rechte Seite der Ungleichung strebt für $n \to \infty$ auf Grund der gleichmäßigen Stetigkeit der Funktion $x(t)$ gegen Null. Damit konvergiert die Folge $\{S(A_{\delta_n}, x(t))\}$ in sich. Da aber $S(A_{\delta_n}, x(t)) \in E$ und E ein vollständiger Raum ist, besitzt diese Folge in E einen Grenzwert S.

Es sei nun eine andere Folge von ε_n-Zerlegungen $\{A_{\varepsilon_n}\}$ des Intervalls $[a, b]$ mit $\varepsilon_n \to 0$ gegeben. Auf Grund der vorangegangenen Überlegungen konvergiert $\{S(A_{\varepsilon_n}, x(t))\}$ für $n \to \infty$ gegen einen Grenzwert S_ε. Zu zeigen ist nun $S_\varepsilon = S$.

Wir vereinigen beide Folgen der Zerlegungen zur Folge $A_{\delta_1}, A_{\varepsilon_1}, A_{\delta_2}, A_{\varepsilon_2}, \ldots$. Die dieser Folge entsprechenden Integralsummen

$$S(A_{\delta_1}, x(t))\,, \quad S(A_{\varepsilon_1}, x(t)), \ldots$$

bilden eine konvergente Folge, deren Grenzwert $S_{\delta+\varepsilon}$ den Grenzwerten S und S_ε der Folgen $\{S(A_{\delta_n}, x(t))\}$ und $\{S(A_{\varepsilon_n}, x(t))\}$ gleich ist. Demzufolge ist

$$S = S_\varepsilon = S_{\delta+\varepsilon}\,.$$

Der Beweis ist hiermit abgeschlossen.

Wir nennen S das Integral von $x(t)$ über $[a, b]$ und bezeichnen es mit

$$\int_a^b x(t)\,dt\,.$$

Eigenschaften der Integration.

1. $$\int_a^b [x(t) + y(t)]\,dt = \int_a^b x(t)\,dt + \int_a^b y(t)\,dt\,.$$

2. Ist c ein beliebiger Punkt zwischen a und b, so gilt

$$\int_a^b x(t)\,dt = \int_a^c x(t)\,dt + \int_c^b x(t)\,dt\,.$$

3. Für einen konstanten Zahlenfaktor λ gilt

$$\int_a^b \lambda\, x(t)\,dt = \lambda \int_a^b x(t)\,dt\,.$$

Diese Eigenschaften sind evident.

4.
$$\left\| \int_a^b x(t)\, dt \right\| \leqq \int_a^b \|x(t)\|\, dt\,. \tag{17}$$

Denn für eine Zerlegung $A_\delta = (t_0, t_1, \ldots, t_n)$ gilt

$$\|S(A_\delta, x(t))\| = \left\| \sum_{i=0}^{n-1} x(t_i)\,(t_{i+1} - t_i) \right\| \leqq \sum_{i=0}^{n-1} \|x(t_i)\|\,(t_{i+1} - t_i) = S(A_\delta, \|x(t)\|)\,. \tag{18}$$

Für $\delta \to 0$ streben die Integralsummen gegen die Integrale

$$\int_a^b x(t)\, dt \quad \text{und} \quad \int_a^b \|x(t)\|\, dt\,,$$

und die Ungleichung (18) geht in (17) über, q.e.d.

5. Wenn für die Elemente $x \in E_x$ eine rechts- (oder links-)seitige Multiplikation mit Elementen $y \in E_y$ (s. S. 289) definiert ist, dann gilt

$$\int_a^b x(t)\, y\, dt = \int_a^b x(t)\, dt\, y \tag{19}$$

(einen konstanten Faktor y kann man hinter das Integralzeichen ziehen). Denn wir haben für eine δ-Zerlegung $A_\delta = [t_0, t_1, \ldots, t_n]$

$$\begin{aligned} S(A_\delta, x(t)\, y) &= \sum_{i=0}^{n-1} x(t_i)\, y\,(t_{i+1} - t_i) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} x(t_i)\,(t_{i+1} - t_i) \right) y = S(A_\delta, x(t))\, y\,. \end{aligned} \tag{20}$$

Für $\delta \to 0$ geht Gleichung (20) in (19) über.

Bei linksseitiger Multiplikation gilt analog

$$\int_a^b y\, x(t)\, dt = y \int_a^b x(t)\, dt\,. \tag{21}$$

Beispiele. 1. Ist A ein linearer Operator, der E_x in E_y abbildet, und $x(t) \in E_x$, so gilt

$$\int_a^b A\, x(t)\, dt = A \int_a^b x(t)\, dt\,.$$

2. Ist $A = A(t)$ ein Operator aus $(E_x \to E_y)$, der stetig von t abhängt, und ist $x \in E_x$ so gilt

$$\int_a^b A(t)\, x\, dt = \left(\int_a^b A(t)\, dt \right) x\,.$$

Im ersten Beispiel ist der Operator A ein konstanter linksseitiger, im zweiten ist x ein konstanter rechtsseitiger Faktor.

Ist insbesondere f ein lineares Funktional aus E^*, so gilt

$$f\left(\int_a^b x(t)\, dt \right) = \int_a^b f(x(t)\, dt)\,, \quad \int_a^b f(t)\, x\, dt = \left(\int_a^b f(t)\, dt \right) x\,. \tag{22}$$

6. Besitzt die Funktion $x = x(t)$ mit $x \in E$ und $t \in [a, b]$ eine stetige Ableitung nach t, $x'(t) = \frac{d}{dt} x(t)$, so gilt

$$\int_a^b x'(t)\, dt = x(b) - x(a) . \tag{23}$$

Wir erhalten nämlich für ein beliebiges lineares Funktional f nach (22)

$$f\left(\int_a^b x'(t)\, dt\right) = \int_a^b f[x'(t)]\, dt = \int_a^b \frac{d}{dt} \{f[x(t)]\}\, dt .$$

$f[x(t)]$ ist jedoch eine Funktion von t, deren Wertevorrat aus Zahlen besteht. Deshalb hat man

$$\int_a^b \frac{d}{dt} f[x(t)]\, dt = f\,[x(b)] - f[x(a)] .$$

Also ist

$$f\left(\int_a^b x'(t)\, dt\right) = f[x(b)] - f[x(a)] . \tag{24}$$

Die Gleichung (24) gilt für ein beliebiges lineares Funktional $f \in E^*$. Damit ist aber (23) bewiesen.

Wir behandeln abschließend Integrale mit variabler oberer Grenze. $x(t)$ sei auf $[a, b]$ stetig und $a < t < b$.

Dann existiert

$$y(t) = \int_a^t x(\tau)\, d\tau ,$$

wobei $y(t)$ eine abstrakte Funktion von t ist.

7. Ein Integral mit variabler oberer Grenze einer stetigen abstrakten Funktion $x(t)$ ist eine differenzierbare abstrakte Funktion der oberen Grenze, und es gilt

$$\left(\int_a^t x(\tau)\, d\tau\right)' = x(t) .$$

Offensichtlich ist

$$y\,(t + \Delta t) - y(t) = \int_t^{t+\Delta t} x(\tau)\, d\tau$$

und

$$x(t) = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} x(t)\, d\tau .$$

Hieraus folgt

$$\frac{y\,(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} - x(t) = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} [x(\tau) - x(t)]\, d\tau .$$

Für ein gegebenes beliebiges $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ derart, daß $\|x(t_1) - x(t_2)\| < \varepsilon$ ist für $|t_1 - t_2| < \delta$. Daraus ergibt sich für $|\Delta t| < \delta$ die Beziehung

$$\left\|\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} - x(t)\right\| \leqq \frac{1}{|\Delta t|}\left|\int_t^{t+\Delta t} \|x(\tau) - x(t)\|\, d\tau\right| < \varepsilon \frac{1}{|\Delta t|}\left|\int_t^{t+\Delta t} d\tau\right| = \varepsilon .$$

Diese Ungleichung sagt aus, daß

$$y'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}$$

existiert und daß

$$y'(t) = x(t)$$

ist.

Lösung von Differentialgleichungen. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) . \tag{25}$$

$x = x(t)$ und $f(t, x)$ sind Elemente eines normierten Raumes E, und es sei $t \in [a, b]$. Wir setzen voraus, daß $f(t, x)$ in t stetig und in x der LIPSCHITZ-Bedingung

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leqq L\, \|x_1 - x_2\| \tag{26}$$

genügt.

Wir bezeichnen mit $C^E[a, b]$ den Raum der stetigen Funktionen $x(t)$ mit $t \in [a, b]$ und $x(t) \in E$. In $C^E[a, b]$ führen wir eine Norm ein, indem wir

$$\|x\|_C = \max_{a \leqq t \leqq b} \|x(t)\|$$

setzen.

Mit E ist auch $C^E[a, b]$ ein vollständiger Raum. Diese Behauptung beweist man ebenso wie jene für den Spezialfall $E = R$ und $C^E[a, b] = C[0, 1]$.

Neben der Gleichung (25) betrachten wir

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau , \quad a \leqq t_0 \leqq t \leqq t_0 + \delta \leqq b . \tag{27}$$

Wir bezeichnen die rechte Seite dieser Gleichung mit $A_t(x)$. A_t ist ein Operator, der $x = x(t)$ aus $C^E[t_0, t_0 + \delta]$ in ein Element desselben Raumes überführt. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \|A_t[x(t)] - A_t[y(t)]\| &= \left\|\int_{t_0}^{t} [f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, y(\tau))]\, d\tau\right\| \\ &\leqq \int_{t_0}^{t_0+\delta} \|f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, y(\tau))\|\, d\tau . \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich nach (26)

$$\begin{aligned} \|A(x) - A(y)\|_C &\leqq L \int_{t_0}^{t_0+\delta} \|x(\tau) - y(\tau)\|\, d\tau \\ &\leqq L\, \delta \max_t \|x(t) - y(t)\| = L\, \delta\, \|x - y\|_C . \end{aligned} \tag{28}$$

Wenn $L\delta < 1$ ist, dann liefert der Operator A nach (28) eine kontrahierende Abbildung des Raumes $C^E[a, b]$ in sich, und folglich existiert genau eine Lösung von (27) (s. § 7).

Die Gleichung (27) ist äquivalent zu (25) für den Anfangswert $x(t_0) = x_0$. Folglich hat (25) genau eine Lösung in dem Intervall $[t_0, t_0 + \delta]$ mit $x(t_0) = x_0$.

Insbesondere hat diese Gleichung für einen beliebigen Anfangswert $x(a) = x_0$ eine einzige Lösung $x(t)$ auf dem Intervall $[a, a + \delta]$. $x(t)$ kann auf das ganze Intervall $[a, b]$ fortgesetzt werden. Ist nämlich $a + \delta < b$ und $x(a + \delta) = x_1$, so konstruieren wir durch Wiederholung dieses Prozesses eine Lösung auf dem Intervall $[a + \delta, a + 2\delta]$ mit dem Anfangswert x_1 usw.

Beispiele. 1. Ist E der n-dimensionale Raum, so erhalten wir den bekannten Existenzsatz für ein System von n Differentialgleichungen.

2. Ist E einer der Räume l_p, c, m usw., so erhalten wir den Existenzsatz für eine Lösung der entsprechenden Klassen unendlicher Differentialgleichungssysteme.

§ 2. Differenzenschemata und der Satz von Lax

Bei der numerischen Lösung von Randwertaufgaben der mathematischen Physik nach dem Differenzenverfahren treffen wir auf die Schwierigkeit, daß in einigen Fällen keine Konvergenz vorliegt, wenn die Differenzen der unabhängigen Veränderlichen in beliebiger Form gegen Null streben. Außerdem können sich bei der Lösung einer Differenzenrandwertaufgabe während der fortlaufenden Berechnung der unbekannten Funktionswerte in den Gitterpunkten in so hohem Maße Fehler anhäufen, daß es nicht möglich ist, die Lösung der Differentialgleichung näherungsweise durch die der Differenzengleichung zu ersetzen. So werden wir, wenn wir bei der Lösung der Cauchyschen Aufgabe die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

durch die Differenzengleichung

$$u_{t\bar{t}} = u_{x\bar{x}}$$

ersetzen, wobei $u_{t\bar{t}}$ und $u_{x\bar{x}}$ die zweiten symmetrischen Differenzen bezüglich der entsprechenden Variablen sind, nur dann Konvergenz erhalten, wenn das Verhältnis der Differenzen der unabhängigen Veränderlichen $\Delta t/\Delta x$ nicht größer als Eins ist. Ersetzen wir die Randwertaufgabe der Wärmeleitung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \qquad 0 \leq x \leq l,$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0$$

durch das Differenzenschema

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta t} = \frac{u_{m+1}^n - 2\,u_m^n + u_{m-1}^n}{(\Delta x)^2}\,,$$

$$u_m^0 = \varphi\,(m\,\Delta x)\,, \quad u_0^n = u_M^n = 0 \quad \begin{pmatrix} m = 1, 2, \ldots, M \\ n = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix},$$

in dem $u_k^n = u\,(k\,\Delta x,\, n\,\Delta t)$ ist, und berechnen sukzessiv u_m^{n+1} aus u_m^n, so stellen wir für $\frac{2\,\Delta x}{(\Delta x)^2} > 1$ eine solche Fehleranhäufung fest, daß die Anwendung des angegebenen Schemas unmöglich wird.

Man hat erkannt, daß diese beiden Erscheinungen eng miteinander verknüpft sind. Weiter unten bringen wir für den einfachsten Fall die Resultate von LAX [32] in dieser Richtung.

Es sei $x = x(t)$, $0 \leqq t \leqq T$, eine abstrakte Funktion, deren Werte in einem BANACH-Raum E liegen, und A ein linearer Operator, der in diesem Raum einen überall dichten Definitionsbereich $D(A)$ besitzt. Der Operator A kann auch unbeschränkt sein. Es sei weiter x_0 ein festes Element des Raumes E. Wir behandeln die Aufgabe

$$\frac{dx}{dt} = A\,x\,, \quad 0 \leqq t \leqq T\,, \tag{1}$$

$$x(0) = x_0\,. \tag{2}$$

Als Lösung dieser Aufgabe bezeichnen wir jede abstrakte Funktion $x(t)$, für die

1. $x(t) \in D(A)$ für alle $t \in [0, T]$ ist,
2. der Differenzenquotient

$$\frac{x\,(t + h) - x(t)}{h}$$

für $h \to 0$ gleichmäßig auf dem ganzen Intervall $[0, T]$ gegen $x'(t)$ konvergiert,

3. $x(t)$ der Gleichung (1) und der Anfangsbedingung (2) genügt.

Für einige x_0 existiere eindeutig die Lösung der Aufgabe (1)—(2). Die Menge $D(R)$ dieser x_0 ist, wie man leicht sieht, eine lineare Mannigfaltigkeit. Für jedes t entspricht einem Element $x_0 \in D(R)$ eindeutig ein Element $x(t)$, das den Bedingungen 1—3 genügt. Wir gelangen zu einem Operator $R_0(t)$, der durch die Gleichung

$$x(t) = R_0(t)\,x_0\,, \quad R_0(0)\,x_0 = x_0 \qquad (0 \leqq t \leqq T)$$

definiert ist und die Lösung der betrachteten Aufgabe angibt. Auf Grund der Linearität des Operators A ist der Operator $R_0(t)$ für alle t ebenfalls linear. Wir nehmen außerdem an, daß für $t \to 0$, $x \in D(R)$, gilt: $R_0(t)\,x \to x$. Wir sagen, die *Aufgabe sei „korrekt gestellt“*, wenn $D(R)$ in E überall dicht ist und die Operatorfamilie $R_0(t)$ auf $D(R)$ bezüglich t gleichmäßig beschränkt ist. Diese Definition der Korrektheit stimmt offensichtlich mit der in der mathematischen Physik üblichen überein.

Unter den getroffenen Voraussetzungen kann der Operator $R_0(t)$ bei jedem t stetig zu einem linearen, auf ganz E definierten Operator $R(t)$ fortgesetzt werden. Die abstrakte Funktion $x(t) = R(t)\, x_0$ nennen wir die durch den Anfangswert $x_0 \in D(R)$ bestimmte verallgemeinerte Lösung der Aufgabe (1)—(2). Die Operatorfamilie der $R(t)$ ist auf dem Intervall $[0, T]$ ebenfalls gleichmäßig beschränkt. Außerdem strebt für $t \to +0$ $R(t) \to I$ im Sinne der punktweisen Konvergenz.

Wir treffen noch eine Annahme. Wir wollen, wenn wir ausgehend vom Anfangswert x_0 die Lösung $x(t)$ im Punkt $t = t_0$ bestimmen und danach mit $x(t_0)$ als Anfangswert $x(t)$ für $t > t_0$ finden, zum selben Resultat kommen wie beim Aufsuchen von $x(t)$, unmittelbar von x_0 ausgehend. In bezug auf den Operator $R(t)$ bedeutet das

$$R\,(t - t_0)\, R(t_0) = R(t)$$

oder

$$R(t_1)\, R(t_2) = R\,(t_1 + t_2) \tag{3}$$

für alle $t_1, t_2 > 0$.

Diese Voraussetzung ist in der Mehrzahl der für die Anwendung wichtigen Fälle erfüllt und folgt aus dem Kausalitätsprinzip, wonach die folgenden Zustände eines physikalischen Systems völlig durch seine vorangehenden bestimmt sind.

Man kann Bedingungen angeben, die dem Operator A auferlegt werden müssen, damit Gleichung (3) erfüllt ist. Dazu s. z. B. [13].

Wir führen den Begriff der Approximation mit endlichen Differenzen ein. $x_1, x_2, \ldots, x_N$ sei ein System von Punkten des Raumes E, die wir als Näherungswerte der Funktion $x(t)$ ansehen können, und zwar sei $x_n \approx x(n\, \Delta t)$, $n = 1, 2, \ldots, N$; $N\, \Delta t = T$. Wir nehmen an, daß zur Bestimmung der Punkte eine Operatorgleichung vorliege, die der Einfachheit halber nur zwei benachbarte Punkte verknüpfe. Da x_n ein Näherungswert von $x\,(n\, \Delta t)$ ist, muß natürlich der in die Gleichung eingehende, x_n und x_{n+1} verknüpfende Operator von Δt abhängen. Wir müssen zusätzlich voraussetzen, daß die Gleichung bezüglich x_{n+1} auflösbar ist. Dann erhalten wir für gegebenes x_0 eine Rekursionsformel

$$x_{n+1} = C(\Delta t)\, x_n\,, \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1\,, \tag{4}$$

in der $C(\Delta t)$ ein beschränkter linearer Operator ist, der *Differenzenapproximation* der Aufgabe (1)—(2) genannt wird. Da

$$\frac{x\,((n+1)\, \Delta t) - x\,(n\, \Delta t)}{\Delta t} = \frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t} = \frac{C(\Delta t)\, x_n - x_n}{\Delta t} = \frac{C(\Delta t) - I}{\Delta t}\, x_n$$

ist, muß $\dfrac{C(\Delta t) - I}{\Delta t}$ die Ableitung $\dfrac{dx}{dt}$ approximieren. Andererseits ist infolge (1)

$$\frac{dx}{dt} = A\, x\,.$$

Sollen die Beziehungen (4) die Randwertaufgabe approximieren, so muß also $\dfrac{C(\Delta t) - I}{\Delta t}$ notwendig den Operator A in irgendeinem Sinne approximieren.

Wir sagen daher, die Differenzenapproximation (4) der Aufgabe (1)—(2) genüge der *Verträglichkeitsbedingung*, wenn gleichmäßig in $t \in [0, T]$

$$\left\| \left(\frac{C(\Delta t) - I}{\Delta t} - A \right) x(t) \right\| \to 0$$

strebt für $\Delta t \to 0$ und eine Menge L von genauen Lösungen $x(t)$, für die die entsprechende Menge der Anfangswerte x_0 in E überall dicht liegt.

Es sei für gegebenes x_0

$$x_{k+1} = C(\Delta t)\, x_k\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, N-1\,, \tag{4}$$

eine Differenzenapproximation der Randwertaufgabe (1)—(2). Durch schrittweise Anwendung der Gleichung (4) für $k = 0, 1, \ldots, n-1$ erhalten wir

$$x_n = [C(\Delta t)]^n\, x_0\,. \tag{5}$$

Da dieser Punkt x_n einen Näherungswert der genauen Lösung $x(t) = R(t)\, x_0$ für $t = n\, \Delta t$ darstellt, definieren wir: Die Differenzenapproximation (4) der Aufgabe (1)—(2) heißt konvergent, wenn für eine beliebige Nullfolge $\{\Delta_k t\}$ und jedes $x_0 \in E$ gilt

$$\|[C(\Delta_k t)]\, x_0^{n_k} - R(t)\, x_0\| \to 0$$

für $k \to \infty$ und $n_k\, \Delta_k t \to t,\ 0 \leqq t \leqq T$.

Die Differenzenapproximation heißt *stabil*, wenn für eine beliebige Nullfolge $\{\Delta_k t\}$ die Menge der Operatoren

$$[C(\Delta_k t)]^n\,, \quad n = 1, 2, \ldots; \quad 0 \leqq n\, \Delta_k t \leqq T\,,$$

der Norm nach im Raum der Operatoren beschränkt ist. Ist die Differenzenapproximation stabil, so sind alle Näherungswerte x_n der genauen Lösung $x\,(n\, \Delta t)$ für jeden festen Anfangswert x_0 gleichmäßig beschränkt.

Es gilt der folgende grundlegende Satz.

Satz (LAX). *Gegeben sei eine korrekt gestellte Aufgabe* (1)—(2) *und eine dazugehörige der Verträglichkeitsbedingung genügende Differenzenapproximation* (4). *Notwendig und hinreichend für die Konvergenz der Differenzenapproximation ist ihre Stabilität.*

Notwendigkeit. Es sei $\{[C(\Delta_j t)]^n\}$ mit $\Delta_j t \to 0,\ 0 \leqq n\, \Delta_j\, t \leqq T$, eine unbeschränkte Menge des Raumes $(E \to E)$. Auf Grund der Bemerkung zum Satz von BANACH-STEINHAUS existiert eine Teilfolge $\{[C(\Delta_k t)]^{n_k}\}$ und ein Element x_0, so daß $\{[C(\Delta / t)]^{n_k}\, x_0\}$ eine unbeschränkte Folge von Elementen des Raumes E wird.

Da $0 \leqq n_k\, \Delta_k t \leqq T$ ist, kann aus der Folge $\{n_k\, \Delta_k t\}$ eine gegen eine Zahl $t_0 \in [0, T]$ konvergierende Teilfolge herausgegriffen werden. Dadurch erhalten wir

$$\|[C(\Delta_{k_i} t)]^{n_{k_i}}\, x_0\| \to \infty\,, \quad n_{k_i}\, \Delta_{k_i} t \to t_0\,.$$

Andererseits gilt wegen der vorausgesetzten Konvergenz der Approximation

$$||[C(\Delta_{k_i}t)]^{n_{k_i}} x_0 - R(t_0)\, x_0|| \to 0\,,$$

woraus

$$||[C(\Delta_{k_i}t)]^{n_{k_i}} x_0|| \to ||R(t_0)\, x_0|| = c$$

folgt. c ist eine endliche Zahl. Wir haben damit einen Widerspruch erhalten. Folglich ist $\{[C\,(\Delta_j t)]^n\}$ eine beschränkte Menge im Raum der Operatoren. Die Notwendigkeit ist damit bewiesen.

Hinlänglichkeit. $x(t) = R(t)\, x_0$ sei eine zu der in der Definition der Verträglichkeit auftretenden Mannigfaltigkeit L gehörende exakte Lösung der Randwertaufgabe. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta_1 > 0$ mit

$$\left\|\left(\frac{C(\Delta t) - I}{\Delta t} - A\right) x(t)\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für $0 < \Delta t < \delta_1$ und jedes t aus $[0, T]$.

Weiter gilt nach der Definition der exakten Lösung für $0 < \Delta t < \delta_2$

$$\left\|\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} - A\, x(t)\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

gleichmäßig in $[0, T]$ oder unter Berücksichtigung von

$$x\,(t + \Delta t) = R\,(t + \Delta t)\, x_0 = R(\Delta t)\, R(t)\, x_0 = R(\Delta t)\, x(t)$$

für $0 < \Delta t < \delta_2$ auch

$$\left\|\left(\frac{R(\Delta t) - I}{\Delta t} - A\right) x(t)\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

gleichmäßig in $[0, T]$. Daraus folgt für $0 < \Delta t < \delta = \min\,(\delta_1, \delta_2)$

$$||[C(\Delta t) - R(\Delta t)]\, x(t)|| < \varepsilon\, \Delta t \tag{6}$$

gleichzeitig für alle t aus $[0, T]$.

x_0 sei ein Anfangswert, der die betrachtete Lösung $x(t)$ bestimmt. Wir setzen

$$z_k = \{[C(\Delta_k t)]_{n_k} - R\,(n_k\, \Delta_k t)\}\, x_0\,,$$

wobei $\{\Delta_k t\}$ eine Nullfolge ist und $n_k\, \Delta_k t \to t$ strebt. Eine einfache Rechnung unter Berücksichtigung der Gleichung

$$R(t_1)\, R(t_2) = R\,(t_1 + t_2)\,, \qquad t_1, t_2 > 0\,,$$

liefert

$$z_k = \sum_{m=0}^{n_k-1} \{[C(\Delta_k t)]^{m+1}\, R\,[(n_k - (m+1))\, \Delta_k t] - [C(\Delta_k t]^m\, R\,[(n_k - m)\, \Delta_k t]\}\, x_0$$

$$= \sum_{m=0}^{n_k-1} [C(\Delta_k t)]^m\, \{C(\Delta_k t) - R(\Delta_k t)\}\, R\,[(n_k - (m+1))\, \Delta_k t]\, x_0\,.$$

Hieraus ergibt sich

$$||z_k|| \leqq \sum_{m=0}^{n_k-1} ||C(\Delta_k t)||^m \, ||\{C(\Delta_k t) - R(\Delta_k t)\}\, R\,[(n_k - (m+1))\,\Delta_k t]\, x_0|| . \quad (7)$$

Wegen der vorausgesetzten Stabilität der Approximation läßt sich eine Konstante K mit

$$||C(\Delta_k t)||^m \leqq K \quad (8)$$

finden. Dann ergeben (6) und (8) auf (7) angewandt

$$||z_k|| \leqq \sum_{m=0}^{n_k-1} K\,\varepsilon\,\Delta_k t = K\,\varepsilon\, n_k\,\Delta_k t \leqq K\,\varepsilon\, T .$$

Wegen des beliebigen ε folgt daraus

$$||z_k|| \to 0 \quad \text{für} \quad \Delta_k t \to 0 , \quad n_k\,\Delta_k t \to t .$$

Weiter erhalten wir

$$||\{[C(\Delta_k t)]^{n_k} - R(t)\}\, x_0|| \leqq ||\{[C(\Delta_k t)]^{n_k} - R\,(n_k\,\Delta_k t)\}\, x_0|| + ||[R\,(n_k\,\Delta_k t) - R(t)]\, x_0|| = ||z_k|| + ||[R\,(n_k\,\Delta_k t) - R(t)]\, x_0|| . \quad (9)$$

Wir betrachten den letzten Summanden. Es ist

$$R\,(n_k\,\Delta_k t) - R(t) = \begin{cases} [R(\tau) - I]\, R(t) & \text{für} \quad \tau = n_k\,\Delta_k t - t > 0 , \\ -[R(\tau) - I]\, R(\tilde{t}) & \text{für} \quad \tau = t - n_k\,\Delta_k t > 0 , \\ & \phantom{\text{für}} \quad \tilde{t} = n_k\,\Delta_k t . \end{cases}$$

In beiden Fällen strebt für $n_k\,\Delta_k t \to t$

$$[R(\tau) - I] \to 0 ,$$

und $R(t)$ oder $R(\tilde{t})$ ist beschränkt. Daher ist für $t < n_k\,\Delta_k t$

$$||[R\,(n_k\,\Delta_k t) - R(t)]\, x_0|| \leqq ||R(t)||\; ||[R(\tau) - I]\, x_0|| < \varepsilon\, M , \quad (10)$$

worin $\varepsilon \to 0$ strebt für $\tau \to 0$ und

$$M = \sup_t ||R(t)||$$

ist. Eine analoge Abschätzung gilt für $t > n_k\,\Delta_k t$. Folglich erhalten wir aus (9) und (10)

$$||\{[C(\Delta_k t)]^{n_k} - R(t)\}\, x_0|| \leqq ||z_k|| + \varepsilon\, M$$

und da beide Summanden auf der rechten Seite für $n_k\,\Delta_k t \to t$ hinreichend klein gehalten werden können, strebt für die Elemente x_0, die Anfangswerte der Lösungen der Mannigfaltigkeit L darstellen,

$$\{C[(\Delta_k t)]^{n_k} - R(t)\}\, x_0 \to 0 .$$

Für jedes Element x des Raumes E kann

$$\{[C(\Delta_k t)]^{n_k} - R(t)\}\, x = \{[C(\Delta_k t)]^{n_k} - R(t)\}\, x_0 + [C(\Delta_k t)]^{n_k}(x - x_0) - R(t)(x - x_0)$$

geschrieben werden, und alle drei Summanden rechts können hinreichend klein werden, der erste auf Grund des eben Bewiesenen und die zwei anderen deswegen, weil die Elemente x_0 in E überall dicht liegen und die Mengen $\{[C(\Delta_k t)]^{n_k}\}$ und $\{R(t)\}$ beschränkt sind. Somit ist überall in E für $\Delta_k t \to 0$, $n_k \Delta_k t \to t$,

$$\{[C(\Delta_k t)]^{n_k} - R(t)\}\, x \to 0\,.$$

Die Hinlänglichkeit ist damit bewiesen.

Als Anwendungsbeispiel für den Satz von LAX betrachten wir die Lösung der CAUCHYschen Aufgabe für die Wärmeleitungsgleichung nach der Differenzenmethode:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\,, \quad 0 \leqq \xi \leqq a,\ 0 \leqq t \leqq T\,,$$

$$u(0, t) = u(a, t) = 0\,, \qquad u(\xi, 0) = \varphi(\xi)\,. \tag{11}$$

Als grundlegenden BANACH-Raum wählen wir den Raum $C_0[0, a]$ der auf dem Intervall $[0, a]$ stetigen und in den Eckpunkten dieses Intervalls verschwindenden Funktionen. Dann kann eine stetige Funktion $u(\xi, t)$ zweier Veränderlicher mit $u(0, t) = u(a, t) = 0$ als eine einparametrige Familie

$$u_t(\xi) = x(t)$$

von Elementen des Raumes $C_0[0, a]$ angesehen werden, und die Randwertaufgabe (11) nimmt die Form

$$\frac{dx}{dt} = A\,x\,, \qquad x(0) = \varphi \tag{12}$$

an. A ist dabei der auf der Menge $D(A)$ der zweimal stetig differenzierbaren und in $\xi = 0$ und $\xi = a$ verschwindenden Funktionen des Raumes $C_0[0, a]$ definierte Differentiationsoperator

$$A = c^2 \frac{d^2}{d\xi^2}\,.$$

Als approximierende Randwertaufgabe wählen wir das System

$$\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} = c^2 \frac{u_{j+1}^n - 2\,u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta \xi)^2}\,, \tag{13}$$

$$j = 1, 2, \ldots, J-1,\ n = 1, 2, \ldots, N,\ J\,\Delta\xi = a,\ N\,\Delta t = T\,,$$

und die Randbedingungen

$$u_0^{(n)} = u_J^{(n)} = 0\,, \qquad u_j^0 = \varphi(j\,\Delta\xi)\,. \tag{14}$$

Die Lösungen des Systems (13) sind ursprünglich nur in den Gitterpunkten, d. h. in den Punkten der Form $(j\,\Delta\xi, n\,\Delta t)$ erklärt. Durch lineare Interpolation definieren wir sie zusätzlich in allen restlichen Punkten des Rechtecks $0 \leqq \xi \leqq a$,

$0 \leqq t \leqq T$ und bezeichnen diese Lösungen mit $\tilde{u}(\xi, t)$. Wiederum werden wir die $\tilde{u}(\xi, n\,\Delta t)$ als Elemente x_n des Raumes $C_0\,[0, a]$ ansehen und sie als Näherungswerte der Lösung $x(t)$ im Punkt $t = n\,\Delta t$ auffassen. Nimmt man an, daß $\Delta\xi$ und Δt nicht unabhängig sind, sondern daß $\Delta\xi = g(\Delta t)$ ist mit $g(\alpha) \to 0$ für $\alpha \to 0$, so kann die approximierende Randwertaufgabe als Rekursionsformel

$$x_{n+1} = C(\Delta t)\, x_n\,, \qquad x_0 = \varphi\,, \\ n = 0, 1, 2, \ldots, N-1\,, \tag{15}$$

geschrieben werden. Die Aufgabe (11) und folglich auch (12) ist bekanntlich korrekt gestellt. Für hinreichend glatte Funktionen konvergieren die Differenzenquotienten gleichmäßig im Rechteck $0 \leqq \xi \leqq a$, $0 \leqq t \leqq T$ gegen die Ableitung; für solche Funktionen gilt für $\Delta t \to 0$

$$\left\|\left(\frac{C(\Delta t) - I}{\Delta t} - A\right) x(t)\right\| \to 0\,,$$

demnach sind auch die Verträglichkeitsbedingungen erfüllt.

Für die Lösungen der Differenzenrandwertaufgabe gilt ein Extremalprinzip:

Der größte (kleinste) Wert der Lösung in den inneren Gitterpunkten kann nicht größer werden (kleiner sein) als der größte (kleinste) Wert der Lösung in den Randpunkten.

Den Beweis führen wir indirekt. Es sei

$$\mu = u_{j_0}^{n_0}$$

der maximale Wert der Lösung, den sie in einem inneren Punkt annimmt. Wir setzen dabei voraus, daß n_0 und j_0 die kleinsten Werte der Indizes n und j sind, für die $u_j^n = \mu$ gilt. Gleichung (13) erhält für diese Werte die Gestalt

$$\frac{u_{j_0}^{n_0} - u_{j_0}^{n_0-1}}{\Delta t} = c^2\, \frac{u_{j_0+1}^{n_0} - 2\,u_{j_0}^{n_0} + u_{j_0-1}^{n_0}}{(\Delta\xi)^2}\,.$$

Diese Gleichung ist jedoch nicht erfüllbar, da ihre linke Seite wegen

$$u_{j_0}^{n_0} > u_{j_0}^{n_0-1}$$

positiv ist und die rechte wegen

$$u_{j_0}^{n_0} \geqq u_{j_0+1}^{n_0}$$

und

$$u_{j_0}^{n_0} > u_{j_0-1}^{n_0}$$

negativ. Der auftretende Widerspruch bestätigt das Extremalprinzip.

Das Extremalprinzip ergibt, daß die Funktionen $\tilde{u}(\xi, t)$ den größten und kleinsten Wert auf dem Rand des Rechtecks $0 \leqq \xi \leqq a$, $0 \leqq t \leqq T$ annehmen.

Wird jetzt Gleichung (15) in der Form

$$x_n = [C(\Delta t)]^n\, \varphi$$

geschrieben, so folgt

$$\sup_\xi |x_n(\xi)| = \|[C(\Delta t)]^n\, \varphi\| \leqq \sup_\xi |\varphi(\xi)| = \|\varphi\|\,,$$

woraus sich $||[C(\Delta t)]^n|| \leqq 1$ für alle Δt und n ergibt. Also ist die Approximation stabil. Nach dem Satz von LAX folgt hieraus, daß die Lösungen der Differenzenrandwertaufgabe gegen die Lösung der Randwertaufgabe der Differentialgleichung konvergieren.

§ 3. Das Differential einer abstrakten Funktion

Definitionen. E_x und E_y seien lineare normierte Räume, $y = f(x)$ sei eine in E_x erklärte abstrakte Funktion, deren Wertebereich in E_y liegt.

In Analogie zur Definition des Differentials einer Funktion von endlich vielen Veränderlichen geben wir zwei Definitionen des Differentials einer abstrakten Funktion an.

Das starke Differential (FRÉCHETsches Differential). Es sei h ein beliebiges Element des Raumes E_x, und es möge ein (i. a. von x abhängiger) linearer Operator $l \in (E_x \to E_y)$ existieren, für den aus

$$f(x + h) - f(x) = l\,h + \omega(x, h) \tag{1}$$

folgt

$$\frac{||\omega(x, h)||}{||h||} \to 0 \quad \text{für} \quad ||h|| \to 0\,. \tag{2}$$

In diesem Falle heißt $l\,h$ das dem Zuwachs h entsprechende *starke* oder FRÉCHET*sche Differential* der Funktion $f(x)$ im Punkt x. Es wird mit $df(x, h)$ bezeichnet.

Den im allgemeinen von x abhängenden Operator l bezeichnen wir mit $f'(x)$. Dann ist

$$df(x, h) = f'(x)\,h\,, \quad f'(x) \in (E_x \to E_y)\,. \tag{3}$$

Der Operator $f'(x)$ kann als eine Funktion von x angesehen werden, die auf der Punktmenge $\{x\} \subset E_x$ definiert ist, auf der $f(x)$ differenzierbar ist, und deren Wertebereich in $(E_x \to E_y)$ liegt.

Wir nennen $f'(x)$ die *erste starke Ableitung* oder FRÉCHET*sche Ableitung* der Funktion $f(x)$ im Punkt x. Gleichung (1) kann in der Form

$$f(x + h) - f(x) = f'(x)\,h + o(||h||) \tag{4}$$

geschrieben werden. Der erste Summand der rechten Seite dieser Gleichung ist eine lineare Funktion von h. Sie approximiert $f(x + h) - f(x)$ bis auf Größen von höherer Ordnung als $||h||$.

Das schwache Differential (GATEAUXsches Differential). Als *schwaches Differential* der Funktion $f(x)$ im Punkt x wird der Ausdruck

$$Df(x, h) = \frac{d}{dt} f(x + t\,h)\Big|_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\,h) - f(x)}{t}$$

bezeichnet. Voraussetzung ist, daß der auf der rechten Seite der Gleichung stehende Grenzwert, der im Sinne der Normkonvergenz zu verstehen ist, existiert.[1])

Beispiele. 1. Es sei $E_x = E_y = C[a, b]$ und

$$f(x) = \int_a^b K(t, s)\, g(s, x(s))\, ds\,.$$

Der Kern $K(t, s)$ ist im Quadrat $a \leqq t, s \leqq b$ stetig; $g(u, v)$ ist eine im Streifen $a \leqq u \leqq b$, $-\infty < v < +\infty$ definierte und stetige Funktion. Dann ist $f(x)$ eine in $C[a, b]$ definierte abstrakte Funktion. Ihre Werte liegen in demselben Raum.

Wir nehmen an, die Funktion $g(u, v)$ wäre nicht nur stetig, sondern besitze die im Streifen $a \leqq u \leqq b$, $-\infty < v < +\infty$ gleichmäßig stetige partielle Ableitung $g_v(u, v)$. Dann ist $f(x)$ eine stark differenzierbare Funktion. Für eine beliebige Funktion $h(s) \in C[a, b]$ gilt

$$f(x+h) - f(x) = \int_a^b K(t, s)\, g(s, x(s) + h(s))\, ds - \int_a^b K(t, s)\, g(s, x(s))\, ds$$

$$= \int_a^b K(t, s)\, [g(s, x(s) + h(s)) - g(s, x(s))]\, ds\,.$$

Nach dem Satz von Lagrange ist

$$g(s, x(s) + h(s)) - g(s, x(s)) = g_v(s, x(s) + \theta(s)\, h(s))\, h(s)$$

mit $0 \leqq \theta(s) \leqq 1$. Weiter wird

$$g_v(s, x(s) + \theta(s)\, h(s)) = g_v(s, x(s)) + \alpha(s, x(s), \theta(s)\, h(s))^{2)}\,.$$

Wenn $\|h\| \to 0$, d. h. $h(s) \to 0$ gleichmäßig auf $[a, b]$ konvergiert, so konvergiert auch $\alpha(s, x(s), \theta(s)\, h(s)) \to 0$ gleichmäßig auf $[a, b]$, da eine im abgeschlossenen beschränkten Bereich $a \leqq s \leqq b$, $|x| \leqq c_1$, $|u| \leqq c_2$ stetige Funktion dort gleichmäßig stetig ist. Deshalb ist

$$f(x+h) - f(x) = \int_a^b K(t, s)\, g_v(s, x(s))\, h(s)\, ds$$

$$+ \int_a^b K(t, s)\, \alpha(s, x(s), \theta(s)\, h(s))\, ds = l\,h + \omega(x, h)$$

mit

$$l\,h = \int_a^b K(t, s)\, g_v(s, x(s))\, h(s)\, ds$$

und

$$\omega(x, h) = \int_a^b K(t, s)\, \alpha(s, x(s), \theta(s)\, h(s))\, h(s)\, ds\,.$$

Dabei gilt

$$\|\omega(x, h)\| = \max_t \left| \int_a^b K(t, s)\, \alpha(s, x(s), \theta(s)\, h(s))\, h(s)\, ds \right|$$

$$\leqq \max_{t, s} |K(t, s)|\, \|\alpha(s, x(s), \theta(s)\, h(s))\|\, (b-a)\, \|h\| = c\, \|\alpha(s, x(s), \theta(s)\, h(s))\|\, \|h\|\,,$$

---

[1]) Manchmal heißt der Ausdruck

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\,h) - f(x)}{t}$$

schwaches Differential, wobei der Grenzwert im Sinne der schwachen Konvergenz der Elemente zu verstehen ist. Das Gateauxsche Differential ist homogen, seine Additivität wird jedoch nicht vorausgesetzt.

[2]) $\alpha(s, x, u) = g_v(s, x + u) - g_v(s, x)$.

und daraus folgt für $||h|| \to 0$

$$\frac{||\omega(x, h)||}{||h||} \leqq c\,||\alpha(s, x(s), \theta(s)\,h(s))|| \to 0\,.$$

Folglich ist $f(x)$ nach Fréchet differenzierbar und

$$df(x, h) = \int_a^b K(t, s)\,g_v(s, x(s))\,h(s)\,ds\,.$$

2. Wir untersuchen im Raum $C^1[a, b]$ der stetig differenzierbaren Funktionen $y(t)$, $a \leqq t \leqq b$, mit der Norm

$$||y|| = \max_t\,(|y(t)|, |y'(t)|)$$

das Funktional der einfachsten Variationsaufgabe

$$J\{y\} = \int_a^b F(t, y(t), y'(t))\,dt\,.$$

Die beiden Definitionen des Differentials entsprechen den beiden bekannten Definitionen der Variation.

Analog verhält es sich mit anderen Funktionalen der Variationsrechnung. Der Begriff des Differentials einer abstrakten Funktion ist gerade in der Variationsrechnung entstanden.

Satz 1. *Existiert das* Fréchet*sche Differential, dann existiert das schwache Differential, und es ist* $df(x, h) = Df(x, h)$.

Beweis. Es ist

$$f(x + t\,h) - f(x) = df(x, t\,h) + \omega(x, t\,h) = t\,df(x, h) + \omega(x, t\,h)\,.$$

Nach (2) wird $||\omega(x, t\,h)|| = o(||t\,h||) = o(|t|\,||h||) = o(t)$ für $t \to 0$ von höherer als erster Ordnung klein. Darum strebt

$$\frac{f(x + t\,h) - f(x)}{t} = df(x, h) + \frac{\omega(x, t\,h)}{t} \to df(x, h)$$

für $t \to 0$. Also ist

$$Df(x, h) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\,h) - f(x)}{t} = df(x, h)\,.$$

Damit haben wir bewiesen, daß das schwache Differential existiert und gleich dem Fréchetschen Differential ist.

$Df(x, h)$ braucht nicht linear in h zu sein. Ist dies aber der Fall, so folgt $Df(x, h) = L\,h = f^{\langle\rangle}(x)\,h$, wobei $f^{\langle\rangle}(x)$ ein linearer Operator bezüglich h und $f^{\langle\rangle}(x) \in (E_x \to E_y)$ ist. Wir nennen dann $f^{\langle\rangle}(x)$ die *schwache Ableitung der Funktion* $f(x)$ *im Punkt* x.

Satz 2. *Existiert in* $||x - x_0|| \leqq r$ *das schwache Differential* $Df(x, h)$ *und ist es gleichmäßig stetig in* x *und stetig in* h, *so gibt es in dieser Umgebung das* Fréchet*sche Differential* $df(x, h)$, *und es gilt* $df(x, h) = Df(x, h)$.

Beweis. Ist $||h|| < r(x)$, wobei $r(x)$ der Radius einer Kugel um x ist, die ganz in der Kugel $||x - x_0|| < r$ liegt, so existiert in allen Punkten $x_t = x + t\,h$,

$0 \leqq t \leqq 1$, $Df(x, h)$. Da

$$Df(x_t, h) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(x_t + \Delta t\, h) - f(x_t)}{\Delta t}$$

und

$$x_t + \Delta t\, h = x + (t + \Delta t)\, h = x_{t+\Delta t}$$

ist, so folgt

$$Df(x_t, h) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(x_{t+\Delta t}) - f(x_t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt} f(x_t) = \frac{d}{dt} f(x + t\, h)\,.$$

Wir zeigen die Additivität von $Df(x, h)$ in bezug auf h:

$$Df(x, h_1 + h_2) = Df(x, h_1) + Df(x, h_2)\,. \tag{5}$$

Zunächst bemerken wir, daß aus der vorausgesetzten Stetigkeit der Funktion

$$Df(x_t, h) = \frac{d}{dt} f(x + t\, h)$$

folgt

$$f(x + t\, h_1) - f(x) = \int_0^t \frac{d}{d\tau} f(x + \tau\, h_1)\, d\tau$$

$$= \int_0^t Df(x + \tau\, h_1, h_1)\, d\tau = t\, Df(x, h_1) + \omega_1\,, \tag{6}$$

wobei

$$\omega_1 = \int_0^t [Df(x + \tau\, h_1, h_1) - Df(x, h_1)]\, d\tau$$

gesetzt wurde. Entsprechend erhalten wir

$$f(x + t\,(h_1 + h_2)) - f(x) = t\, Df(x, h_1 + h_2) + \omega_2 \tag{7}$$

mit

$$\omega_2 = \int_0^t [Df(x + \tau\,(h_1 + h_2), h_1 + h_2) - Df(x, h_1 + h_2)]\, d\tau\,,$$

sowie

$$f(x + t\,(h_1 + h_2)) - f(x + t\, h_1) = t\, Df(x, h_2) + \omega_3 \tag{8}$$

mit

$$\omega_3 = \int_0^t [Df(x + t\, h_1 + \tau\, h_2, h_2) - Df(x, h_2)]\, d\tau\,.$$

Da $Df(x, h)$ stetig in x ist, ergibt sich für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ bei hinreichend kleinem $t > 0$ und $0 \leqq \tau \leqq t$

$$\|Df(x + \tau\, h_1, h_1) - Df(x, h_1)\| < \frac{\varepsilon}{3}\,,$$

$$\|Df(x + \tau\,(h_1 + h_2), h_1 + h_2) - Df(x, h_1 + h_2)\| < \frac{\varepsilon}{3}\,,$$

$$\|Df(x + t\, h_1 + \tau\, h_2, h_2) - Df(x, h_2)\| < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Also folgt

$$||\omega_1|| = \left\| \int_0^t [Df(x + \tau h_1, h_1) - Df(x, h_1)]\, d\tau \right\| < \frac{\varepsilon}{3} t$$

und entsprechend

$$||\omega_3|| < \frac{\varepsilon}{3} t\,, \qquad ||\omega_3|| < \frac{\varepsilon}{3} t\,.$$

Aus (6), (7) und (8) ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= [f(x + t h_1) - f(x)] + [f(x + t(h_1 + h_2)) - f(x + t h_1)] \\ &\quad - [f(x + t(h_1 + h_2)) - f(x)] \\ &= t\,[Df(x, h_1) + Df(x, h_2) - Df(x, h_1 + h_2)] + \omega_1 + \omega_2 - \omega_3\,, \end{aligned}$$

d. h.

$$Df(x, h_1) + Df(x, h_2) - Df(x, h_1 + h_2) = \frac{1}{t}(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3)$$

und damit

$$||Df(x, h_1) + Df(x, h_2) - Df(x, h_1 + h_2)|| \leqq \frac{1}{t}(||\omega_1|| + ||\omega_2|| + ||\omega_3||) < \varepsilon\,.$$

Weil aber ε beliebig gewählt war, wird

$$||Df(x, h_1) + Df(x, h_2) - Df(x, h_1 + h_2)|| = 0\,,$$

womit (5) bewiesen ist.

Außerdem war $Df(x, h)$ stetig in h vorausgesetzt. Dann ist $Df(x, h)$ aber ein linearer und beschränkter Operator in bezug auf h: $Df(x, h) = f^{\langle\prime\rangle}(x)\, h$, und mit $Df(x, h)$ ist auch $f^{\langle\prime\rangle}(x)$ gleichmäßig stetig in x.

Wir beweisen nun, daß

$$f(x + h) - f(x) = f^{\langle\prime\rangle}(x)\, h + o(||h||) \tag{4'}$$

ist. Dann stimmt nämlich $Df(x, h)$ als der in h lineare Anteil des Zuwachses $f(x + h) - f(x)$ mit $df(x, h)$ überein. Wir erhalten

$$\begin{aligned} f(x + h) - f(x) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x + t h)\, dt = \int_0^1 Df(x + t h, h)\, dt \\ &= \left\{ \int_0^1 f^{\langle\prime\rangle}(x + t h)\, dt \right\} h = f^{\langle\prime\rangle}(x)\, h + \omega \end{aligned} \tag{9}$$

mit

$$\omega = \left\{ \int_0^1 [f^{\langle\prime\rangle}(x + t h) - f^{\langle\prime\rangle}(x)]\, dt \right\} h\,.$$

Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $f^{\langle\prime\rangle}(x)$ geht für $0 \leqq t \leqq 1$

$$||f^{\langle\prime\rangle}(x + t h) - f^{\langle\prime\rangle}(x)|| = \alpha(||h||) \to 0 \quad \text{für} \quad ||h|| \to 0\,.$$

Daraus folgert man

$$||\omega|| \leqq \left\| \int_0^1 [f^{\langle\prime\rangle}(x + t\,h) - f^{\langle\prime\rangle}(x)]\,dt \right\| \, ||h||$$

$$\leqq \int_0^1 ||f^{\langle\prime\rangle}(x + t\,h) - f^{\langle\prime\rangle}(x)\,||dt\,||h|| = \alpha(||h||)\,||h||\,,$$

und (4′) ist bewiesen. Somit haben wir

$$Df(x, h) = df(x, h) \qquad \text{und} \qquad f^{\langle\prime\rangle}(x) = f'(x)$$

gefunden, q.e.d.

Im folgenden werden wir stets voraussetzen, daß für alle betrachteten differenzierbaren Funktionen $Df(x, h) = df(x, h)$ ist.

Bemerkung. Wenn in der Umgebung $||x - x_0|| < r$ von x_0 die Ungleichung

$$||f'(x)|| \leqq L$$

gilt und x_1, x_2 dieser Umgebung angehören, dann folgt daraus

$$||f(x_2) - f(x_1)|| \leqq L\,||x_2 - x_1||\,.$$

Da der Bereich $||x - x_0|| < r$ konvex ist, gehört mit x_1 und x_2 auch die Strecke

$$x_t = (1 - t)\,x_1 + t\,x_2\,, \qquad 0 \leqq t \leqq 1\,,$$

zu dieser Umgebung. Danach ist

$$||f'(x)|| \leqq L\,.$$

Weil aber

$$f(x_2) - f(x_1) = \int_0^1 f'(x_t)\,(x_2 - x_1)\,dt$$

gilt, so folgt

$$||f(x_2) - f(x_1)|| \leqq \int_0^1 ||f'(x_t)||\,dt\,||x_2 - x_1|| \leqq L\,||x_2 - x_1||\,.$$

§ 4. Ein Satz über den inversen Operator. Das Newtonsche Verfahren

Mit Hilfe des Begriffs der Ableitung eines Operators kann ein lokaler Satz über die Existenz des inversen Operators bewiesen werden, der analog ist zum Satz über die Existenz der Umkehrfunktion einer monotonen Funktion mit nicht verschwindender Ableitung.

Satz 1. *Ein Operator $y = f(x)$ sei in einer Umgebung eines Punktes x_0 des Raumes E_x definiert und bilde diese Umgebung in einen Raum E_y ab. Die Voraussetzungen sind:*

1. $f(x_0) = y_0$;

2. *die Ableitung $f'(x)$ existiert in der erwähnten Umgebung des Punktes x_0 und ist dort beschränkt und stetig;*

3. $[f'(x_0)]^{-1}$ *existiert.*

Behauptung: Dann existiert in einer Umgebung des Punktes y_0 der inverse Operator $x = f^{-1}(y)$, nimmt im Punkt y_0 den Wert x_0 an und ist stetig in der Umgebung von y_0.

Wir betrachten die Gleichung

$$x = A(x; y) \tag{1}$$

mit

$$A(x; y) = x - [f'(x_0)]^{-1} (f(x) - y)\,. \tag{2}$$

y spielt die Rolle eines Parameters.

Hat für gegebenes $y \in E_y$ Gleichung (1) die Lösung x, so ist $f(x) = y$ und umgekehrt. Für den Existenzbeweis der Lösung von Gleichung (1) verwenden wir das Prinzip der kontrahierenden Abbildungen.

Wir erhalten für festes $y \in E_y$

$$A'(x; y) = I - [f'(x_0)]^{-1} f'(x) = [f'(x_0)]^{-1} \left(f'(x_0) - f(x)\right),$$

und daraus folgt für $||x - x_0|| \leqq r$

$$||A'(x; y)|| \leqq ||[f'(x_0)^{-1}||\, ||f'(x_0) - f(x)|| \leqq q(r)\,,$$

worin für $r \to 0$ infolge der vorausgesetzten Stetigkeit von $f'(x)$ $q(r) \to 0$ strebt. Daher genügt der Operator $A(x; y)$ einer LIPSCHITZ-Bedingung bezüglich der Veränderlichen x:

$$||A(x_1; y) - A(x_2; y)|| \leqq q(r)\, ||x_1 - x_2||\,, \quad x_1, x_2 \in \bar{S}(x_0, r)\,. \tag{3}$$

Wir schätzen die Differenz $A(x_0; y) - x_0$ ab und erhalten

$$\begin{aligned} ||A(x_0; y) - x_0|| &= ||[f'(x_0)]^{-1} (f(x_0) - y)|| \\ &= ||[f'(x_0)]^{-1} (y - y_0)|| \leqq ||[f'(x_0)]^{-1}||\, ||y - y_0||\,, \end{aligned}$$

d. h.

$$||A(x_0; y) - x_0|| \leqq ||[f'(x_0)]^{-1}||\, ||y - y_0||\,. \tag{4}$$

Weiter ist auf Grund der Ungleichungen (3) und (4)

$$\begin{aligned} ||A(x; y) - x_0|| &\leqq ||A(x; y) - A(x_0; y)|| \\ &+ ||A(x_0; y) - x_0|| \leqq q(r)||x - x_0|| + ||[f'(x_0)]^{-1}||\, ||y - y_0||\,. \end{aligned}$$

Wir wählen nun r_x so, daß $q = q(r_x) < 1$ und betrachten ein y aus der Kugel

$$||y - y_0|| < r_y = (1 - q)\, r_x / ||[f'(x_0)]^{-1}||\,.$$

Dann ergibt die vorige Ungleichung

$$||A(x; y) - x_0|| \leqq q\, ||x - x_0|| + \frac{1 - q}{||[f'(x_0)]^{-1}||} ||[f'(x_0)]^{-1}||\, r_x \leqq r_x\,,$$

d. h., der Operator A stellt kontrahierende Abbildungen der Kugel $||x - x_0|| \leqq r_x$ in sich dar. Deswegen entspricht jedem y, $||y - y_0|| < r_y$, eindeutig ein x mit $||x - x_0|| < r_x$ und $f(x) = y$. Dadurch wird auf der Kugel $||y - y_0|| < r_y$ der inverse Operator $x = \varphi(y)$ definiert, und seine Werte liegen in der Kugel $||x - x_0|| < r_x$. Es ist $\varphi(y_0) = x_0$.

Aus der Ungleichung (3) folgt

$$\begin{aligned}||\varphi(y_1) - \varphi(y_2)|| &= ||x_2 - x_1|| = ||A(x_1; y_1) - A(x_2; y_2)|| \\ &\leqq ||A(x_1; y_1) - A(x_1; y_2)|| + ||A(x_1; y_2) - A(x_2; y_2)|| \\ &\leqq ||[f'(x_0)]^{-1}||\, ||y_1 - y_2|| + q\, ||x_1 - x_2|| \,.\end{aligned}$$

Hieraus entsteht

$$(1 - q)\, ||\varphi(y_1) - \varphi(y_2)|| \leqq ||[f'(x_0)]^{-1}||\, ||y_1 - y_2||$$

oder

$$||\varphi(y_1) - \varphi(y_2)|| \leqq \frac{||[f'(x_0)]^{-1}||}{1 - q}\, ||y_1 - y_2|| \,, \tag{5}$$

d. h., der inverse Operator $\varphi(y)$ genügt in der Kugel $||y - y_0|| < r_y$ einer LIPSCHITZ-Bedingung und ist folglich stetig.

Der Satz ist damit bewiesen.

Entsprechend dem Prinzip der kontrahierenden Abbildungen kann der inverse Operator $\varphi(y)$ als Grenzwert einer Folge von Operatoren $\varphi_n(y)$ erhalten werden. Diese Operatoren sind durch

$$\varphi_0(y) = x_0 \,,$$
$$\varphi_n(y) = A(\varphi_{n-1}(y); y) \qquad (||y - y_0|| < r_y \,, \quad n = 1, 2, \ldots) \tag{6}$$

bestimmt. Da $A(x; y)$ auf der Gesamtheit der Veränderlichen stetig ist, kann durch vollständige Induktion nachgewiesen werden, daß alle Näherungen $\varphi_n(y)$ stetige Funktionen von y sind.

Weiter zeigt die Abschätzung

$$||\varphi(y) - \varphi_n(y)|| \leqq \frac{q^n}{1 - q}\, ||\varphi_1(y) - \varphi_0(y)|| \leqq \frac{q^n}{1 - q}\, ||[f'(x_0)]^{-1}||\, ||f(x_0) - y|| \,,$$

daß die Konvergenz der Folge $\varphi_n(y)$ gegen den Grenzoperator $\varphi(y)$ in der Kugel $||y - y_0|| < r_y$ gleichmäßig erfolgt.

Beispiel. Wir betrachten im Raum $C\,[0, 1]$ die nichtlineare Integralgleichung

$$x(t) - \int_0^1 K(t, s, x(s))\, ds = y(t) \,, \tag{7}$$

deren Kern $K(t, s, u)$ im Bereich $0 \leqq t,\ s \leqq 1,\ -\infty < u < +\infty$, stetig ist und dort eine stetige Ableitung $K_u(t, s, u)$ besitzt. Außerdem gelte

a) $K(t, s, 0) \equiv 0$ und $K_u(t, s, 0) \not\equiv 0$;

b) 1 ist kein Eigenwert des Kernes $K_u(t, s, 0)$, d. h., die lineare Integralgleichung

$$z(t) - \int_0^1 K_u(t, s, 0)\, z(s)\, ds = 0$$

besitzt keine nichttriviale Lösung.

Schreibt man die Gleichung (7) in der Form

$$f(x) = y \,, \tag{8}$$

so gilt, wie man leicht beweisen kann,

1. $f(0) = 0$;
2. die Ableitung $f'(x)$ existiert in einer Umgebung von Null und hat die Form

$$f'(x)\,h = h(t) - \int_0^1 K_u(t, s, x(s))\,h(s)\,ds\,;$$

aus diesem Grunde ist sie in dieser Umgebung beschränkt und stetig;

3. wegen b) existiert $[f'(0)]^{-1}$.

Dann besitzt nach dem soeben bewiesenen Satz die Gleichung (7) für alle hinreichend kleinen rechten Seiten $y(t)$ eine eindeutige Lösung, die mit der Methode der sukzessiven Näherungen gewonnen werden kann.

Das Newtonsche Verfahren. Ein weiteres Beispiel der Anwendung des Begriffs der verallgemeinerten Ableitungen abstrakter Funktionen stellt das Newtonsche Verfahren zur Lösung von Operatorgleichungen dar. Bekanntlich besteht die Newtonsche Methode für eine Skalargleichung $f(x) = 0$ in der Bestimmung einer Folge von Näherungslösungen nach der Gleichung

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\,.$$

Erfüllen die Funktion $f(x)$ und ihre Ableitungen einige Bedingungen, so konvergieren die Näherungslösungen x_n gegen einen Grenzwert, und dieser ist eine Lösung der Gleichung.

L. W. Kantorowitsch hat gezeigt, daß das Newtonsche Verfahren auf Operatorgleichungen übertragen werden kann. Wir betrachten hier diese Übertragung, wobei wir zur Vereinfachung des Beweises ziemlich starke Einschränkungen machen werden.[1])

Es sei die Gleichung

$$f(x) = 0 \tag{9}$$

gegeben, wo $f(x)$ eine in einem Banach-Raum E_x definierte abstrakte Funktion ist, deren Werte in einem Banach-Raum E_y liegen. Wir nehmen an, daß in einer Kugel $S(x_0, r)$ mit dem Mittelpunkt x_0, den wir als Näherungswert für die Lösung der Gleichung (1) verwenden, die Funktion $f(x)$ stark differenzierbar ist und ihre Ableitung $f'(x)$ der Lipschitz-Bedingung

$$||f'(x) - f'(\xi)|| \leqq L\,||x - \xi||| \tag{10}$$

genügt.

Existiert außerdem $[f'(x)]^{-1}$, so können wir in Analogie zum skalaren Fall die aufeinanderfolgenden Näherungen nach der Gleichung

$$x_{n+1} = x_n - [f'(x_n)]^{-1} f(x_n)$$

konstruieren. Diese Gleichung hat jedoch den Nachteil, daß sie sukzessiv die Kenntnis der inversen Operatoren $[f'(x_n)]^{-1}$ erfordert, d. h., sie verlangt im Grunde genommen die Lösung der linearen Operatorgleichungen

$$f'(x_n)\,h = g\,.$$

[1]) Zur ausführlicheren Behandlung auch bei weniger starken Einschränkungen s. [14].

Um das zu vermeiden, wurde von KANTOROWITSCH eine Modifikation des NEWTONschen Verfahrens vorgeschlagen, nach der die Folge der Näherungen nach der Gleichung

$$x_{n+1} = x_n - [f'(x_0)]^{-1} f(x_n) \tag{11}$$

bestimmt wird. Für jedes n tritt hier ein und derselbe inverse Operator auf.

Wir beschäftigen uns nur mit dem *modifizierten* NEWTON*schen Verfahren.*

Wir führen folgende Konstanten ein:

$$M_0 = ||[f'(x_0)]^{-1}||, \qquad \eta_0 = ||[f'(x_0)]^{-1} f(x_0)||.$$

Satz 2. *Ist*

$$h_0 = M_0 \eta_0 L \leqq \frac{1}{4}$$

und t_0 *die kleinere Wurzel der Gleichung*

$$h_0 t^2 - t + 1 = 0,$$

so besitzt die Gleichung $f(x) = 0$ *in der Kugel*

$$||x - x_0|| \leqq t_0 \eta_0$$

eine eindeutige Lösung x^*, *und die nach Gleichung* (11) *bestimmte Näherungsfolge konvergiert gegen diese Lösung.*

Wir betrachten den Operator

$$A x = x - [f'(x_0)]^{-1} f(x).$$

Dieser Operator bildet die Kugel $||x - x_0|| < t_0 \eta_0$ in sich ab. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} A x - x_0 &= x - x_0 - [f'(x_0)]^{-1} f(x) \\ &= [f'(x_0)]^{-1} \{f'(x_0)(x - x_0) - f(x) + f(x_0)\} - [f'(x_0)]^{-1} f(x_0). \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$||A x - x_0|| \leqq ||[f'(x_0)]^{-1}||\, ||f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)|| + ||[f'(x_0)]^{-1} f(x_0)||,$$

d. h.

$$||A x - x_0|| \leqq M_0 ||f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)|| + \eta_0.$$

Wir betrachten die Funktion

$$\varphi(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

Es gilt[1])

$$\varphi'(x) = f'(x) - f'(x_0).$$

Es sei $x \in S(x_0, t_0, \eta_0)$; dann ist

$$||\varphi'(x)|| = ||f'(x) - f'(x_0)|| \leqq L ||x - x_0|| \leqq L t_0 \eta_0.$$

Deshalb wird

$$||\varphi(x)|| = ||\varphi(x) - \varphi(x_0)|| \leqq L t_0 \eta_0 ||x - x_0|| \leqq L (t_0 \eta_0)^2.$$

---

[1]) Die Ableitung des linearen Operators $U x = f'(x_0) x$ ist gleich $f'(x_0)$.

Somit besteht, sofern $x \in S(x_0, t_0, \eta_0)$ ist, die Beziehung

$$||A\,x - x_0|| \leqq M_0\,L\,t_0^2\,\eta_0^2 + \eta_0\,(M_0\,L\,\eta_0\,t_0^2 + 1) = \eta_0\,(\eta_0\,t_0^2 + 1) = \eta_0\,t_0\,,$$

d. h., der Operator A führt die Kugel $||x - x_0|| \leqq t_0\,\eta_0$ in sich über.

Wir zeigen: Der Operator A erzeugt in dieser Kugel eine kontrahierende Abbildung.

Für $x \in S(x_0, t_0, \eta_0)$ ist

$$A'(x) = I - [f'(x_0)]^{-1} f'(x) = [f'(x_0)]^{-1}\,(f'(x_0) - f'(x))$$

und deshalb

$$||A'(x)|| \leqq M_0\,||f'(x) - f'(x_0)|| \leqq M_0\,L\,||x - x_0|| \leqq M_0\,L\,\eta_0\,t_0\,.$$

Da t_0 die kleinere Wurzel der Gleichung $h_0\,t^2 - t + 1 = 0$ ist, muß

$$t_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\,h_0}}{2\,h_0}$$

sein.

Folglich ist

$$||A'(x)|| \leqq M_0\,L\,\eta_0\,t_0 = h_0\,\frac{1 - \sqrt{1 - 4\,h_0}}{2\,h_0} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\,h_0}}{2} < q < 1\,.$$

Daraus folgt

$$||A\,x - A\,\xi|| \leqq q\,||x - \xi||\,, \tag{12}$$

und die Behauptung ist bewiesen.

Somit erzeugt der Operator A eine kontrahierende Abbildung der Kugel $S(x_0, t_0, \eta_0)$ in sich und besitzt deshalb in dieser Kugel einen eindeutigen Fixpunkt x^*. Für diesen gilt

$$x^* = x^* - [f'(x_0)]^{-1} f(x^*)\,,$$

d. h., x^* ist Lösung der Gleichung (9)

$$f(x^*) = 0\,.$$

Der Punkt x^* ist Grenzwert der Näherungsfolge

$$x_{n+1} = A\,x_n = x_n - [f'(x_0)]^{-1} f(x_n)\,. \tag{11}$$

Der Satz ist damit vollständig bewiesen.

Bemerkungen 1. Die Bedingung $h_0 \leqq \frac{1}{4}$ kann man erfüllen, indem man die Anfangsnäherung x_0 der Lösung hinreichend nahe wählt.

2. Die Konvergenzgeschwindigkeit der Näherungsfolge wird im modifizierten NEWTON-Verfahren durch die aus (12) leicht herleitbare Ungleichung

$$||x_n - x^*|| \leqq \frac{q^n}{1 - q}\,||[f'(x_0)]^{-1} f(x_0)||$$

bestimmt. Beim ursprünglichen (nicht modifizierten) NEWTON-Verfahren ist die Konvergenzgeschwindigkeit höher, und zwar ist

$$||x_n - x^*|| \leqq \frac{1}{2^{n-1}}\,(2\,h_0)^{2^n - 1}\,\eta_0\,.$$

Weiteres darüber s. [15].

Beispiel. Wir betrachten die nichtlineare HAMMERSTEINsche Integralgleichung

$$x(t) - \int_0^1 K(t, s)\, g(s, x(s))\, ds = 0\,, \tag{13}$$

deren Kern $K(t, s)$ auf der Gesamtheit der Veränderlichen im Quadrat $0 \leqq t,\ s \leqq 1$ stetig ist; die Funktion $g(s, u)$ ist im Streifen $0 \leqq s \leqq 1,\ -\infty < u < +\infty$ stetig und besitzt die stetige Ableitung $g_u(s, u)$, die bezüglich der zweiten Veränderlichen der LIPSCHITZ-Bedingung

$$|g_u(s, u_1) - g_u(s, u_2)| \leqq \lambda\, |u_1 - u_2|$$

genügt. Dann bildet die abstrakte Funktion

$$f(x) = x(t) - \int_0^1 K(t, s)\, g(s, x(s))\, ds$$

den Raum $C\,[0, 1]$ in sich ab. Sie ist stark differenzierbar, wobei

$$f'(x)\, h = h(t) - \int_0^1 K(t, s)\, g_u\,(s, x(s))\, h(s)\, ds$$

ist, und die Ableitung $f'(x)$ genügt ebenfalls einer LIPSCHITZ-Bedingung

$$\|f'(x) - f'(\xi)\| \leqq a\, \lambda\, \|x - \xi\|$$

mit $a = \sup\limits_{t,s} |K(t, s)|$.

Ist 1 kein Eigenwert der linearen Integralgleichung

$$h(t) - \lambda \int_0^1 K(t, s)\, g_u(s, x_0(s))\, h(s)\, ds = 0 \tag{14}$$

und

$$M_0 = \sup_t \int_0^1 |R_0(t, s, 1)|\, ds\,,$$

wobei $R_0(t, s, \lambda)$ die Resolvente der Gleichung (14) bedeutet, so konvergiert unter der Bedingung

$$h_0 = L\, M_0\, \eta_0 \leqq \frac{1}{4}$$

mit

$$\eta_0 = \sup_t \int_0^1 |R_0(t, s, 1)| \left| x_0(s) - \int_0^1 K(s, \sigma)\, g(\sigma, x_0(\sigma))\, d\sigma \right| ds$$

das NEWTON-Verfahren für die Gleichung (13) mit der Anfangsnäherung $x_0(t)$ gegen eine Lösung dieser Gleichung.

§ 5. Homogene Formen und Polynome

Multiplikation von Elementen. Häufig hat man es mit einer Multiplikation zu tun, bei der Faktoren und Produkt Elemente aus verschiedenen Räumen sind.

Wir betrachten drei lineare Räume E_x, E_y und E_z und führen eine Multiplikation ein, die je zwei beliebigen Elementen $x \in E_x$ und $y \in E_y$ ein Element

$z = x\,y \in E_z$ zuordnet. Diese Multiplikation soll die folgenden Eigenschaften haben:

1. $(x_1 + x_2)\,y = x_1\,y + x_2\,y$,
2. $x\,(y_1 + y_2) = x\,y_1 + x\,y_2$ und
3. für $x_n \to x$ und $y_n \to y$ soll $x_n\,y_n \to x\,y$ gehen.

Die Multiplikation $x\,y$ ist für festes x eine bezüglich y additive und stetige Operation. Sie ist somit eine lineare Operation, die auf E_y definiert ist, und deren Wertevorrat in E_z liegt. Ebenso ist die Multiplikation $x\,y$ für festes y eine lineare Operation, die E_x in E_z abbildet. Hieraus folgt, daß

$$(\lambda\,x)\,y = \lambda\,(x\,y) \qquad \text{und} \qquad x\,(\lambda\,y) = \lambda\,(x\,y)$$

gelten.

Beispiele. 1. A bzw. B seien lineare Operatoren, die E_x in E_y bzw. E_y in E_z abbilden. Dann ist $B\,A$ ein linearer Operator, der E_x in E_z abbildet.

2. Wenn $x(t)$ eine Funktion aus $L_p[0, 1]$ und $y(t)$ aus $L_q[0, 1]$ ist, dann ist ihr Produkt

$$z(t) = x(t)\,y(t)$$

ein Element aus $L_r[0, 1]$, wobei $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ ist, wie aus der Hölderschen Ungleichung unmittelbar folgt.

3. Das innere Produkt zweier Elemente x und y eines reellen Hilbert-Raumes kann man als Produkt von x mit y auffassen: $x \in H$, $y \in H$, $x\,y = (x, y)$ aus $R = (-\infty, \infty)$.

4. Wenn $x \in E_x$ und A ein linearer Operator aus $(E_x \to E_y)$ ist, so kann $A\,x \in E_y$ als Produkt von A mit x angesehen werden.

Man prüft leicht nach, daß für die angeführten Beispiele alle Eigenschaften der oben erklärten Multiplikation erfüllt sind.

Satz. *Sind E_x, E_y und E_z lineare normierte Räume und ist $x\,y = z$ erklärt ($x \in E_x$, $y \in E_y$, $z \in E_z$), so existiert eine positive Konstante M derart, daß*

$$\|x\,y\| \leqq N\,\|x\|\,\|y\|\;(x \in E_x,\, y \in E_y)$$

ist.

Wir nehmen das Gegenteil an. Dann kann man für jede natürliche Zahl n Elemente $x_n \in E_x$ und $y_n \in E_y$ finden, so daß

$$\|x_n\,y_n\| > n^2\,\|x_n\|\,\|y_n\|$$

ist. Wir setzen

$$x_n^0 = \frac{1}{n\,\|x_n\|}\,x_n\,, \qquad y_n^0 = \frac{1}{n\,\|y_n\|}\,y_n$$

und erhalten

$$\|x_n^0\,y_n^0\| = \frac{1}{n^2}\,\frac{1}{\|x_n\|\,\|y_n\|}\,\|x_n\,y_n\| > 1\,.$$

Andererseits ist

$$\|x_n^0\| = \frac{1}{n}\,, \qquad \|y_n^0\| = \frac{1}{n}\,.$$

Somit streben $\|x_n^0\|$ und $\|y_n^0\|$ gegen Null, während $\|x_n^0\,y_n^0\|$ größer als 1 bleibt. Dies ist aber ein Widerspruch zur Stetigkeit der Multiplikation.

n-gliedrige Linearformen. $E_1, E_2, \ldots, E_n, E$ seien lineare normierte Räume. Eine Funktion $a(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ mit $h_i \in E_i$ und Wertebereich in E heißt *n-gliedrige Linearform,* wenn sie linear und homogen in jeder der Veränderlichen $h_1, h_2, \ldots, h_n$ ist.

Wir vereinbaren $a(h_1, h_2, \ldots, h_n) = a\, h_1\, h_2 \ldots h_n$ zu schreiben. Als Norm von a werden wir die Zahl

$$||a|| = \sup \frac{||a\, h_1\, h_2 \ldots h_n||}{||h_1||\, ||h_2|| \ldots ||h_n||} \tag{1}$$

bezeichnen[1]). Offenbar ist

$$||a\, h_1\, h_2 \ldots h_n|| \leqq ||a||\, ||h_1||\, ||h_2|| \ldots ||h_n||\,.$$

Ist

$$a\, h_1 \ldots h_n = b\, h_1 \ldots h_n$$

für beliebige $h_1, h_2, \ldots, h_n$, so soll $a = b$ sein. Die Gesamtheit der Formen $a = a\, h_1 \ldots h_n$ mit $h_i \in E_i$ und $a\, h_1 \ldots h_n \in E$ bildet einen linearen normierten Raum, wenn man die Summe und die Multiplikation mit einem Skalar im gewöhnlichen Sinne auffaßt und die Norm von a durch die Gleichung (1) definiert. Man kann also die Form $a\, h_1 \ldots h_n$ wie folgt interpretieren:

$$a\, h_1 \ldots h_{n-1} \in (E_n \to E)\,,$$

$$a\, h_1 \ldots h_{n-2} \in [E_{n-1} \to (E_n \to E)]\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a\, h_1\, (E_2 \to [E_3 \to \cdots \to (E_n \to E) \ldots])\,,$$

$$a \in (E_1 \to \{E_2 \to [E_3 \to \cdots \to (E_n \to E) \ldots]\})\,.$$

$a\, h_1\, h_2 \ldots h_n$ ist somit als ein von links nach rechts gebildetes Produkt der Elemente $a\, h_1, h_2, \ldots, h_n$ aufzufassen:

$$a\, h_1\, h_2 \ldots h_n = \{ \ldots [(a\, h_1)\, h_2]\, h_3 \ldots\}\, h_n\,.$$

Eine Form heißt *symmetrisch,* wenn $E_1 = E_2 = \cdots = E_n$ und $a\, h_1\, h_2 \ldots h_n = a\, h_{i_1}\, h_{i_2} \ldots h_{i_n}$ gilt, wo $i_1, i_2, \ldots, i_n$ eine beliebige Permutation der Indizes $1, 2, \ldots, n$ ist.

Als Beispiel einer symmetrischen Form führen wir die Bilinearform $(A\, x, y)$ an, wobei A ein selbstadjungierter Operator auf dem reellen HILBERT-Raum ist.

Jeder Form $a\, h_1\, h_2 \ldots h_n$ kann eine symmetrische Form

$$S\, a\, h_1\, h_2 \ldots h_n = \frac{1}{n!} \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_n)} a\, h_{i_1}\, h_{i_2} \ldots h_{i_n} \tag{2}$$

zugeordnet werden. Die Summe wird über alle Permutationen $i_1, i_2, \ldots, i_n$ der Indizes $1, 2, \ldots, n$ erstreckt. Die Form $S\, a\, h_1\, h_2 \ldots h_n$ ist offensichtlich symmetrisch. Wenn $a\, h_1\, h_2 \ldots h_n$ schon symmetrisch ist, dann gilt $S\, a = a$.

[1]) Auf Grund des Satzes von BANACH-STEINHAUS ist eine n-gliedrige Linearform, die bezüglich jeder Veränderlichen stetig ist, in bezug auf die Gesamtheit der Veränderlichen stetig.

Die Form $a\,h \ldots h$, welche man aus der symmetrischen Form $a\,h_1 \ldots h_n$ für $h_1 = \cdots = h_n = h$ erhält, heißt eine *homogene Form n-ten Grades*. Eine homogene Form zweiten Grades nennt man *quadratisch* (s. § 1, Kap. VII).

Wir führen für sie die abkürzende Bezeichnung

$$a\,\underbrace{h \ldots h}_{n\text{-mal}} = a\,h^n$$

ein.

Eigenschaften von n-gliedrigen homogenen Linearformen:

1. Es gilt

$$a(t\,h)^n = t^n\,a\,h^n\,.$$

2. Wenn a eine symmetrische Form ist, so ist $a\,h_1\,h_2 \ldots h_n$ distributiv und kommutativ in bezug auf jedes Paar von Faktoren. Deshalb erhält man z. B. nach dem polynomischen Lehrsatz

$$a\,(t_1\,h_1 + t_2\,h_2 + \cdots + t_k\,h_k)^n$$

$$= \sum_{n_1 + \cdots + n_k = n} \frac{n!}{n_1! \ldots n_k!}\, t_1^{n_1} \ldots t_k^{n_k}\, a\,h_1^{n_1} \ldots h_k^{n_k}\,. \tag{3}$$

3. Es gilt $\dfrac{\partial^n}{\partial t_1\,\partial t_2 \ldots \partial t_n}\{a\,(t_1\,h_1 + \cdots + t_n\,h_n)^n\} = n!\,a\,h_1 \ldots h_n\,.$ $\qquad (4)$

Denn der Operator $\dfrac{\partial^n}{\partial t_1\,\partial t_2 \ldots \partial t_n}$ macht alle Summenglieder auf der rechten Seite der Gleichung (3) mit $k < n$ zu Null, ausgenommen ist nur der Summand, der alle Faktoren $t_1, t_2, \ldots, t_n$ enthält, d. h. das Glied mit $n_1 = n_2 = \cdots = n_n = 1$. Es ist gleich $n!\,t_1 \ldots t_n\,a\,h_1 \ldots h_n$, und folglich gilt (4).

4. Wenn die Gleichung

$$a\,h^n = b\,h^n \tag{5}$$

für beliebige $h \in E$ gilt, dann stimmen die zugehörigen linearen Formen

$$a\,h_1\,h_2 \ldots h_n \qquad \text{und} \qquad b\,h_1\,h_2 \ldots h_n \tag{6}$$

für alle $h_1, h_2, \ldots, h_n \in E$ überein, d. h., es ist $a = b$.

Wegen (5) ist nämlich für beliebige $h_1, h_2, \ldots, h_n$

$$a\,(t_1\,h_1 + t_2\,h_2 + \cdots + t_n\,h_n)^n = b\,(t_1\,h_1 + t_2\,h_2 + \cdots + t_n\,h_n)^n\,,$$

woraus sich

$$\frac{\partial^n}{\partial t_1 \ldots \partial t_n}\,a\,(t_1\,h_1 + \cdots + t_n\,h_n)^n = \frac{\partial^n}{\partial t_1 \ldots \partial t_n}\,b\,(t_1\,h_1 + \cdots + t_n\,h_n)^n$$

ergibt. Mit Rücksicht auf (4) erhalten wir dann (6).

5. Wenn ein linearer Operator $A \in (E_y \to E_z)$ und eine homogene Form n-ten Grades $a\,h^n$ mit $h \in E_x$ und $a\,h^n \in E_y$ vorgegeben sind, dann ist auch $A(a\,h^n)$ eine homogene Form n-ten Grades.

Es sei $a\,h_1\,h_2 \ldots h_n$ die zugehörige symmetrische lineare Form. Da $A(a\,h_1\,h_2 \ldots h_n)$ linear von jedem der h_i abhängt, so ist $A(a\,h_1 \ldots h_n)$ eine n-gliedrige lineare Form bezüglich $h_1, h_2, \ldots, h_n$ mit einem Wertevorrat in E_z. Diese Form ist symmetrisch. Darum ist $A(a\,h^n)$ eine homogene Form n-ten Grades.

6. Das Produkt $(a_n\,h^n)\,(b_m\,h^m)$ der homogenen Formen $a_n\,h^n$ und $b_m\,h^m$ n-ten bzw. m-ten Grades ist eine homogene Form vom Grade $n + m$.

Das Produkt $(a_n\,h_1 \ldots h_n)\,(b_m\,h_{n+1} \ldots h_{n+m})$ der entsprechenden n- bzw. m-gliedrigen linearen Formen ist eine lineare Form von $n + m$ Veränderlichen. Wir betrachten jetzt die zugehörige symmetrische Form $c_{n+m}\,h_1 \ldots h_{n+m} = S[(a_n\,h_1 \ldots h_n)\,(b_m\,h_{n+1} \ldots h_{n+m})]$ und setzen $h_1 = \cdots = h_{n+m} = h$. Wir erhalten die homogene Form $(n + m)$-ten Grades $c_{n+m}\,h^{n+m}$. Sie ist wegen (2) gleich $(a_n\,h^n)\,(b_m\,h^m)$.

Polynome. Eine Summe $P_n(h) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\,h^k$ von homogenen Formen mit $h \in E_x$, $a_n \neq 0$, wobei alle $a_k\,h^k$ Elemente des Raumes E_y sind, heißt *Polynom n-ten Grades in h.*

Wir führen einige einfache Eigenschaften der Polynome an.

1. Wenn

$$y = P_n(h) = \sum_{k=0}^{n} a_k\,h^k \in E_y\,, \qquad z = Q_m(h) = \sum_{l=0}^{m} b_l\,h^l \in E_z$$

Polynome vom Grade n bzw. m in h sind und ein Produkt von zwei beliebigen Elementen aus E_y und E_z definiert ist, dann ist

$$y\,z = P_n(h)\;Q_m(h)$$

ein Polynom vom Grade $\leqq n + m$ in h.

Wegen der Distributivität der Multiplikation ist nämlich

$$y\,z = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\,h^k\right)\left(\sum_{l=0}^{m} b_l\,h^l\right) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m} (a_k\,h^k)\,(b_l\,h^l)\,.$$

Jeder Summand $(a_k\,h^k)\,(b_l\,h^l)$ ist nach Eigenschaft 6 homogener Formen eine Form vom Grade $k + l \leqq n + m$. Also ist das Produkt $y\,z$ ein Polynom höchstens $(n + m)$-ten Grades in h.

2. Es seien $P_n(h)$ und $Q_m(g)$ Polynome n-ten Grades in h bzw. m-ten Grades in g. Für $h = Q_m(g)$ ist $P_n(h) = P_n\big(Q_m(g)\big)$ ein Polynom vom Grade $\leqq n\,m$ in g.

Wir beweisen dies durch Induktion nach n. Für $n = 1$ ist

$$P_1(h) = a_1\,h + a_0$$

mit a_1 als linearem Operator bezüglich h. Wenn

$$Q_m(g) = \sum_{k=0}^{m} b_k\,g^k$$

gilt, dann ist wegen Eigenschaft 5 homogener Formen

$$a_1 h + a_0 = a_1 Q_m(g) + a_0 = \sum_{l=0}^{m} a_1 b_l g^l + a_0$$

ein Polynom vom Grade $\leqq m$ in g. Die Behauptung ist also für $n = 1$ richtig. Sie gelte nun für alle Polynome $P_k(h)$ mit $k \leqq n - 1$.

Wir betrachten ein Polynom $P_n(h) = \sum_{k=0}^{n} a_k h^k$ und erhalten

$$P_n(h) = P_{n-1}(h) + a_n h^n = P_{n-1}(h) + (a_n h^{n-1}) h .$$

$P_{n-1}(h)$ ist ein Polynom $(n - 1)$-ten Grades in h. Ist

$$h = Q_m(g) ,$$

so gilt nach der Induktionsannahme

$$P_{n-1}(h) = R_{(n-1)\,m}(g) \qquad \text{und} \qquad a_n h^{n-1} = R^*_{(n-1)\,m}(g) ,$$

$R_{(n-1)\,m}(g)$ und $R^*_{(n-1)\,m}(g)$ sind hierbei Polynome vom Grade $\leqq (n - 1)\, m$ in g; daraus folgt

$$P_n(h) = R_{(n-1)\,m}(g) + R^*_{(n-1)\,m}(g)\, Q_m(g) .$$

Wegen Polynomeigenschaft 1 ist ein Produkt zweier Polynome $R^*_{(n-1)\,m}(g)\, Q_m(g)$ ein Polynom $R_{n\,m}(g)$ vom Grad $\leqq n\, m$ in g. Also ergibt sich für $P_n(h)$

$$P_n(h) = P_n[Q_m(g)] = R_{(n-1)\,m}(g) + R_{n\,m}(g) = T_{n\,m}(g) ,$$

und $T_{n\,m}(g)$ ist ein Polynom höchstens $n\,m$-ten Grades in g, q.e.d.

§ 6. Differentiale und Ableitungen höherer Ordnung

Bezeichnungen. E_x und E_y seien lineare normierte Räume, $y = f(x)$ sei eine auf E_x definierte abstrakte Funktion, deren Werte in E_y liegen.

Es möge $x \in E_x$, $y_1 = y_1(x) \in E_y$ und $y_2 = y_2(x) \in E_y$ sein. Die symbolische Gleichung

$$y_1(x) \underset{n}{\overset{x}{=}} y_2(x)$$

soll

$$||y_1(x) - y_2(x)|| = o\,(||x||^n)$$

bedeuten ($y_1(x)$ ist gleich $y_2(x)$ bis auf Größen in $||x||$ von der Ordnung größer als n).

Folgende Behauptungen können bewiesen werden:

1. Wenn $y_1(x) \underset{n}{\overset{x}{=}} y_2(x)$ und $y_2(x) \underset{n}{\overset{x}{=}} y_3(x)$ ist, so ist $y_1(x) \underset{n}{\overset{x}{=}} y_3(x)$.

2. Wenn $y_1(x) \underset{n}{\overset{x}{=}} y_2(x)$, $x = f(\xi)$ und $||\xi|| = O\,(||x||)$ ist, so gilt $y_1 \underset{n}{\overset{\xi}{=}} y_2$.

3. Sind $P(h)$ und $Q(h)$ solche Polynome in h, deren erste n Koeffizienten gleich sind, d. h.

$$P(h) - Q(h) = \sum_{k=n+1}^{p} a_k h^k ,$$

so gilt

$$P(h) \overset{h}{\underset{n}{=}} Q(h) .$$

Wir nehmen an, daß die in den folgenden Formeln auftretenden Multiplikationen sinnvoll sind.

4. Falls $||A(x)||$ in einer Umgebung von $x = 0$ beschränkt und $y_1(x) \overset{x}{\underset{n}{=}} y_2(x)$ ist, so gilt $A(x)\, y_1(x) \overset{x}{\underset{n}{=}} A(x)\, y_2(x)$. Analog ist

$$y_1(x)\, A(x) \overset{x}{\underset{n}{=}} y_2(x)\, A(x) .$$

5. Für $y(x) \overset{x}{\underset{n}{=}} y_1(x)$, $z(x) \overset{x}{\underset{n}{=}} z_1(x)$ wird

$$y(x)\, z(x) \overset{x}{\underset{n}{=}} y_1(x)\, z_1(x) .$$

Tatsächlich gilt auf Grund der Eigenschaft 4

$$y(x)\, z(x) \overset{x}{\underset{n}{=}} y(x)\, z_1(x) \overset{x}{\underset{n}{=}} y_1(x)\, z_1(x) .$$

Hieraus und aus der Eigenschaft 1 folgt die Eigenschaft 5.

Die Taylorsche Formel. Wir haben das Fréchetsche Differential erster Ordnung definiert, indem wir eine Approximation der Funktion $f(x + h)$ durch ein Polynom ersten Grades in h betrachteten.

Es existiere nun ein Polynom

$$P_n(h) = a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_n h^n$$

vom Grade n in h derart, daß

$$f(x + h) - f(x) \overset{h}{\underset{n}{=}} P_n(h) \tag{1}$$

ist. D. h., es sei

$$f(x + h) - f(x) = P_n(h) + \omega_n(h)$$

mit

$$||\omega_n(h)|| \leqq \varepsilon(||h||)\, ||h||^n , \tag{2}$$

und es gehe

$$\varepsilon(||h||) \to 0 \quad \text{für} \quad ||h|| \to 0 .$$

Das Polynom $P_n(h)$ heißt Taylor*sche Summe vom Grade n* für die Funktion f. Das mit $n!$ multiplizierte n-te Glied heißt *n-tes* Fréchet*sches Differential der Funktion $f(x)$ im Punkt x,* und die Funktion $f(x)$ selbst heißt *n-mal differenzierbar*.

Wir bezeichnen das n-te FRÉCHETsche Differential mit $d^n f(x, h)$, und es ist dann

$$d^n f(x, h) = n!\, a_n\, h^n .$$

Die zu $d^n f(x, h)$ gehörige symmetrische n-gliedrige lineare Form lautet $d^n f(x, h_1, \ldots, h_n) = n!\, a_n\, h_1 \ldots h_n$. Diese lineare Form $n!\, a_n$ heißt *n-te FRÉCHETsche Ableitung der Funktion $f(x)$ im Punkt x* und wird mit $f^{(n)}(x)$ bezeichnet. Somit ist

$$d^n f(x, h) = f^{(n)}(x)\, h^n .$$

Die Formel (1) lautet

$$f(x + h) - f(x) \overset{h}{\underset{n}{=}} f'(x)\, h + \frac{1}{2} f''(x)\, h^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x)\, h^n .$$

Wir beweisen

$$d^n f(x, h) = \frac{d^n}{dt^n} f(x + t\, h)\Big|_{t=0} . \tag{3}$$

Aus (1) folgt

$$f(x + t\, h) = f(x) + \sum_{k=1}^{n-1} t^k\, a_k\, h^k + t^n\, a_n\, h^n + \omega(x; t\, h)$$

mit

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|\omega(x; t\, h)\|}{t^n} = 0 .$$

Wir erhalten

$$\frac{d^n}{dt^n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} t^k\, a_k\, h^k \right) = 0 ,$$

$$\frac{d^n}{dt^n} (t^n\, a_n\, h^n) = n!\, a_n\, h^n$$

und schließlich

$$\frac{d^n}{dt^n}\, \omega(x; t\, h)\big|_{t=0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\delta^n_{\Delta t} \omega(x; t\, h)}{(\Delta t)^n}\Big|_{t=0}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{(\Delta t)^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k}\, \omega\left(x; \left(k - \frac{n}{2}\right) \Delta t\, h\right).$$

Wegen (2) strebt für $\Delta t \to 0$

$$\frac{\omega\left(x; \left(k - \frac{n}{2}\right) \Delta t\, h\right)}{(\Delta t)^n} \to 0 ,$$

daraus folgt

$$\frac{d^n}{dt^n} \omega(x; t\, h)\Big|_{t=0} = 0 .$$

Somit haben wir

$$d^n f(x, h) = n!\, a_n\, h^n = \frac{d^n}{dt^n} f(x + t\, h)\Big|_{t=0}$$

erhalten.

Wenn $d^n f(x, h)$ in einem gewissen Gebiet existiert und die Relation (2) (in der $\omega_n(h)$ noch von x abhängig ist) gleichmäßig für alle x in diesem Gebiet erfüllt ist, wollen wir $d^n f(x, h)$ ein *gleichmäßiges* FRÉCHET*sches Differential* nennen. In diesem Falle steht auf der rechten Seite von (3) die gleichmäßige Differenzenableitung.

Wir bringen jetzt eine andere Definition des n-ten Differentials. In einer Umgebung des Punktes x existiere das erste Differential $df(x, h) = f'(x)\, h$. Die Funktion $f'(x)$ und damit folglich auch $df(x)\, h$ seien ihrerseits wieder nach x differenzierbar. Wir gelangen so zum *zweiten Differential*

$$d[df(x, h), h_1] = d[f'(x)\, h, h_1] = df'(x, h_1)\, h\,.$$

Wenn wir

$$df'(x, h_1) = f''(x)_0\, h_1$$

schreiben, dann soll $f''(x)_0$ *zweite Ableitung* heißen, und wir erhalten nach (3)

$$\begin{aligned} d[df(x, h), h_1] = f''(x)_0\, h_1\, h &= \frac{d}{dt_1} df\,(x + t_1\, h_1, h)]\Big|_{t_1=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial t_1}\left[\frac{\partial}{\partial t} f\,(x + t\, h + t_1\, h_1)\Big|_{t=0}\right]\Big|_{t_1=0} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial t_1\, \partial t} f\,(x + t\, h + t_1\, h_1)\Big|_{t_1=t=0}\,. \end{aligned}$$

Analog wird das *n-te Differential* definiert, und zwar unter der Voraussetzung, daß das $(n-1)$-te Differential

$$d\{d[\ldots(df(x, h_1))\, h_2 \ldots]\, h_{n-1}\} = f^{(n-1)}(x)_0\, h_{n-1}\, h_{n-2} \ldots h_1$$

existiert und daß es als Funktion von x differenzierbar ist, d. h., es sei $f^{(n-1)}(x)_0$ differenzierbar. Wir erhalten schließlich

$$\begin{aligned} d\{d[d(\ldots(df(x, h_1)\, h_2)\ldots)\, h_{n-1}]\, h_n\} &= d(f^{(n-1)}(x)_0\, h_{n-1}\, h_{n-2} \ldots h_1, h_n) \\ &= df^{(n-1)}(x, h_n)\, h_{n-1}\, h_{n-2} \ldots h_1\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Schreiben wir für $df^{(n-1)}(x, h_n) = f^{(n)}(x)_0\, h_n$, so erhalten wir die *n-te Ableitung* $f^{(n)}(x)_0$ und

$$d\{d[d(\ldots(df(x, h_1))\, h_2 \ldots)\, h_{n-1}]\, h_n\} = f^{(n)}(x)_0\, h_n\, h_{n-1} \ldots h_1\,.$$

Aus Gleichung (4) wird

$$\begin{aligned} d^n f(x; h_n, h_{n-1}, \ldots, h_1) &= f^{(n)}(x)_0\, h_n\, h_{n-1} \ldots h_1 \\ &= \frac{\partial^n}{\partial t_1\, \partial t_2 \ldots \partial t_n} f\left(x + \sum_{i=1}^{n} t_i\, h_i\right)\Bigg|_{t_1=t_2=\ldots=t_n=0}\,. \end{aligned}$$

Setzen wir $h_1 = h_2 = \cdots = h_n = h$, so erhalten wir

$$d^n f(x, h)_0 = f^{(n)}(x)_0\, h^n = \frac{d^n}{dt_n} f\,(x + t\, h)\Big|_{t=0}\,. \tag{5}$$

Aus der Gleichheit der n-ten Ableitung und der stetigen gleichmäßigen Differenzenableitung *n-ter* Ordnung sowie aus den Formeln (3) und (5) folgt:

Wenn in einem Gebiet G ein n-tes gleichmäßiges FRÉCHETsches *Differential $d^n f(x, h)$ existiert und stetig in x ist, dann gibt es in G auch das n-te Differential $d^n f(x, h)_0$, und es gilt*

$$d^n f(x, h)_0 = d^n f(x, h) ,$$

oder

$$f^{(n)}(x)_0 = f^{(n)}(x) .$$

Es existiere nun umgekehrt das n-te Differential

$$d^n f(x, h)_0 = f^{(n)}(x)_0 \, h^n ,$$

und $f^{(n)}(x)_0$ sei gleichmäßig stetig in x in einem Gebiet G. Dann existiert in G auch das n-te gleichmäßige FRÉCHETsche *Differential, und es stimmt in G mit dem n-ten Differential überein.*

Wir beweisen diesen Satz durch Induktion. Für $n = 1$ ist die Aussage trivial. Der Satz gelte nun für $n - 1$. Weil

$$f^{(n)}(x)_0 = [f'(x)_0]^{(n-1)}$$

ist, erhalten wir

$$f'(x + h)_0 = f'(x)_0 + f''(x)_0 \, h + \frac{1}{2!} f'''(x)_0 \, h^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} f^{(n)}(x)_0 \, h^{n-1} + \omega(x; h) ,$$

wobei

$$||\omega(x; h)|| \leqq \varepsilon_{n-1} (||h||) \, ||h||^{n-1}$$

ist und

$$\varepsilon_{n-1}(||h||) \to 0$$

konvergiert für $||h|| \to 0$.

Daraus folgt für $0 \leqq t \leqq 1$

$$f'(x + t\,h)_0 = f'(x)_0 + t\,f''(x)_0 \, h + \frac{1}{2!} t^2 f'''(x)_0 \, h^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} f^{(n)}(x)_0 \, h^{n-1} + \omega(x; t\,h) ,$$

dabei ist

$$||\omega(x; t\,h)|| \leqq \varepsilon_{n-1}(t\,||h||) \, t^{n-1} \, ||h||^{n-1} \leqq \varepsilon_{n-1}(t\,||h||) \, ||h||^{n-1} .$$

Weiter ist

$$f(x + h) - f(x) = \int_0^1 f'(x + t\,h)_0 \, h \, dt$$

$$= \int_0^1 \left\{ f'(x)_0 + t\,f''(x)_0 \, h + \frac{1}{2!} t^2 f'''(x)_0 \, h^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} f^{(n)}(x)_0 \, h^{n-1} \right\} h \, dt + R_n$$

mit

$$R_n = \int_0^1 \omega(x; t\,h) \, h \, dt .$$

Also folgt

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)_0\, h + \frac{1}{2!} f''(x)_0\, h^2$$
$$+ \frac{1}{3!} f'''(x)_0\, h^3 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x)_0\, h^n + R_n$$

mit

$$||R_n|| \leqq \int_0^1 ||\omega\,(x; t\,h)||\; ||h||\, dt \leqq \varepsilon_n\,(||h||)\; ||h||^n\,,$$

$$\varepsilon_n(u) \to 0 \qquad \text{für} \qquad u \to 0\,.$$

Somit ist die Summe auf der rechten Seite des letzten Ausdrucks für $f(x+h)$ eine TAYLOR-Summe für die Funktion $f(x)$, und es gilt

$$f^{(n)}(x)_0\, h^n = d^n f(x, h)\,,$$

d. h.

$$d^n f(x, h)_0 = d^n f(x, h)\,.$$

Wir untersuchen jetzt die n-te Ableitung einer *mittelbaren* Funktion und eines Produkts.

1. Es sei $y = \varphi(x)$, $z = \psi(y)$, $x \in E_x$, $y \in E_y$, $z \in E_z$, und $z = \psi(\varphi(x)) = f(x)$. Weiter sei $y_0 = \varphi(x_0)$, $z_0 = \psi(y_0) = f(x_0)$. Wenn $\psi(y)$ und $\varphi(x)$ in den Punkten x_0 bzw. y_0 n-mal differenzierbar sind, dann ist auch $f(x)$ in x_0 n-mal differenzierbar.

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es in E_x ein Polynom n-ten Grades $P_n(h)$ derart, daß

$$\varphi\,(x_0 + h) - \varphi(x_0) \overset{h}{\underset{n}{=}} P_n(h)$$

ist. Andererseits existiert in E_y ein Polynom n-ten Grades $Q_n(g)$, so daß

$$\psi\,(y_0 + g) - \psi(y_0) \overset{g}{\underset{n}{=}} Q_n(g)$$

gilt. Setzen wir

$$g = \varphi\,(x_0 + h) - \varphi(x_0)\,,$$

dann erhalten wir

$$\varphi\,(x_0 + h) = \varphi(x_0) + g = y_0 + g$$

und

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \psi[\varphi\,(x_0 + h)] - \psi[\varphi(x_0)] \overset{g}{\underset{n}{=}} Q_n(g)\,. \tag{6}$$

Für g gilt aber

$$g = \varphi\,(x_0 + h) - \varphi(x_0) \overset{h}{\underset{n}{=}} P_n(h)$$

und somit

$$Q_n(g) \overset{h}{\underset{n}{=}} Q_n(P_n(h))\,.$$

Wegen Eigenschaft 2 für Polynome ist $Q_n(P_n(h))$ ein Polynom in h. Es kann mit der erforderlichen Genauigkeit durch ein Polynom $R_n(h)$ vom Grade n in h

approximiert werden:

$$Q_n(g) \overset{h}{\underset{n}{=}} Q_n[P_n(h)] \overset{h}{\underset{n}{=}} R_n(h) . \tag{7}$$

Weil die Funktion φ im Punkt x_0 differenzierbar ist, folgt

$$||g|| = ||\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)|| = O(||h||) .$$

Darum kann das Symbol $\overset{g}{\underset{n}{=}}$ durch $\overset{h}{\underset{n}{=}}$ ersetzt werden, und die Gleichung (6) nimmt die Form

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \overset{h}{\underset{n}{=}} Q_n(g)$$

an.

Hieraus und aus (7) folgt

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \overset{h}{\underset{n}{=}} R_n(h) . \tag{8}$$

Weil somit ein Polynom $R_n(h)$ die Relation (8) erfüllt, gilt unser Satz.

Sind $\varphi(x)$ und $\psi(y)$ n-mal stetig nach x differenzierbar, so ist es auch

$$f(x) = \psi[\varphi(x)] .$$

In diesem Falle sind die Koeffizienten der Polynome $P_n(h)$ und $Q_n(h)$ stetige Funktionen von x. Folglich sind auch die Koeffizienten des Polynoms $Q_n(P_n(h))$ stetige Funktionen von h und demzufolge auch die des Polynoms $R_n(h)$.

2. *Es sei $x \in E_x$, $y = f(x) \in E_y$, $z = \varphi(x) \in E_z$ und für die Elemente $y \in E_y$ und $z \in E_z$ sei ein Produkt definiert, das in E_u liegt. Wenn $f(x)$ und $\varphi(x)$ n-mal stetig differenzierbar sind, dann ist auch $F(x) = f(x)\,\varphi(x)$ n-mal stetig differenzierbar.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist

$$f(x + h) \overset{h}{\underset{n}{=}} f(x) + P_n(h) \quad \text{und} \quad \varphi(x + h) \overset{h}{\underset{n}{=}} \varphi(x) + Q_n(h)$$

mit

$$P_n(h) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)\, h^k \quad \text{und} \quad Q_n(h) = \sum_{k=1}^{n} b_k(x)\, h^k$$

und stetigen Funktionen $a_k(x)$ und $b_k(x)$. Daraus ergibt sich

$$f(x + h)\,\varphi(x + h) \overset{h}{\underset{n}{=}} f(x)\,\varphi(x) + [f(x)\,Q_n(h) + P_n(h)\,\varphi(x) + P_n(h)\,Q_n(h)] .$$

Der in den Klammern stehende Ausdruck ist ein Polynom mit stetigen Koeffizienten. Wir vernachlässigen die Glieder, die h in höherer als n-ter Potenz enthalten und bekommen $R_n(h) = \sum_{k=1}^{n} c_k(x)\, h^k$ mit stetigen $c_k(x)$. Somit ist

$$f(x)\,Q_n(h) + P_n(h)\,\varphi(x) + P_n(h)\,Q_n(h) \overset{h}{\underset{n}{=}} R_n(h)$$

und

$$f(x + h)\,\varphi(x + h) \overset{h}{\underset{n}{=}} f(x)\,\varphi(x) + R_n(h) . \tag{9}$$

Diese Gleichung zeigt, daß $F(x) = f(x)\,\varphi(x)$ eine n-mal stetig differenzierbare Funktion von x ist.

Zum Abschluß bemerken wir, daß für Funktionale, die in linearen komplexen Räumen definiert sind, schon aus der Existenz des ersten Differentials in einer Umgebung eines Punktes die Existenz aller Differentiale höherer Ordnung in dieser Umgebung folgt. Man kann ein Funktional auch durch eine „TAYLOR-Reihe“ darstellen.

§ 7. Differentiation der Funktionen von zwei Variablen

Wir untersuchen eine Funktion von zwei Veränderlichen $\varphi(x, y)$ mit $x \in E_x$, $y \in E_y$, $\varphi(x, y) \in E_z$. Man kann (x, y) als Element der direkten Summe $E_x \oplus E_y$ ansehen. Die Funktion $\varphi(x, y)$ heißt *n-mal differenzierbar im Punkt* (x_0, y_0), wenn die Beziehung

$$\varphi(x_0 + h, y_0 + g) - \varphi(x_0, y_0) \overset{(h, g)}{\underset{n}{=}} a_1(h, g) + a_2(h, g)^2 + \cdots + a_n(h, g)^n$$

besteht. Hierbei sind $a_k(h, g)^k$ homogene Formen des Elementes $(h, g) \in E_x \oplus E_y$ vom Grade k. Offenbar ist $a_k(h, g)^k$ eine Summe von linearen Formen der Gestalt $a_k\, h_1\, h_2 \ldots h_k$, wo jedes der h_i gleich h oder g ist.

Satz. *Wenn $\varphi(x, y)$ und $y = f(x)$ in (x_0, y_0) bzw. x_0 n-mal differenzierbar sind mit $y_0 = f(x_0)$, dann ist $\varphi(x, f(x))$ eine n-mal differenzierbare Funktion von x in $x = x_0$.*

Beweis. Ist

$$g = f(x_0 + h) - f(x_0)\,,$$

so folgt

$$f(x_0 + h) = y_0 + g$$

und

$$g \overset{h}{\underset{n}{=}} P_n(h) = a_1\, h + a_2\, h^2 + \cdots + a_n\, h^n\,. \tag{1}$$

Dann ist

$$||g|| = O(||h||)$$

und also auch

$$||(h, g)|| = ||h|| + ||g|| = O(||h||)\,. \tag{2}$$

Da $\varphi(x, y)$ eine n-mal differenzierbare Funktion ist, so folgt

$$\varphi(x_0 + h, y_0 + g) - \varphi(x_0, y_0) \overset{h}{\underset{n}{=}} A_1(h, g) + A_2(h, g)^2 + \cdots + A_n(h, g)^n\,, \tag{3}$$

denn wegen (2) können wir in (3) das Symbol $\overset{(h, g)}{\underset{n}{=}}$ durch $\overset{h}{\underset{n}{=}}$ ersetzen. Weil aus (1)

$$A_k(h, g) \overset{h}{\underset{n}{=}} A_k(h, P_n(h))^k$$

folgt, ergibt sich

$$\varphi(x_0 + h, y_0 + g) - \varphi(x_0, y_0) \overset{h}{\underset{n}{=}} \sum_{k=1}^{n} A_k(h, P_n(h))^k\,. \tag{4}$$

$A_k(h, P_n(h))^k$ ist eine Summe von Gliedern der Form $a_k\, h_1\, h_2 \ldots h_k$, wo ein jedes der h_i gleich h oder gleich $P_n(h)$ ist. Also ist $A_k(h, P_n(h))^k$ und folglich auch die ganze Summe in (4) ein Polynom in h. Lassen wir die Glieder von höherem als n-tem Grade in h fort, so erhalten wir ein Polynom $R_n(h)$, für das

$$R_n(h) \overset{h}{\underset{n}{=}} \sum_{k=1}^{n} A_k(h, P_n(h))^k$$

gilt. Somit ist

$$\varphi\,(x_0 + h, y_0 + g) - \varphi(x_0, y_0) \overset{h}{\underset{n}{=}} R_n(h)\,,$$

q.e.d.

Wir führen nun den Begriff der *partiellen Ableitungen* einer Funktion von zwei Veränderlichen ein. Es ist

$$d\varphi[(x_0, y_0); (h, g)] = A_1(h, g) = a_1\, h + a_2\, g\,,$$

$$d^2\varphi[(x_0, y_0); (h, g)] = A_2(h, g)^2 = a_{11}\, h^2 + a_{12}\, h\, g + a_{21}\, g\, h + a_{22}\, g^2$$

usw. Mit den Bezeichnungen

$$a_1 = \varphi_x(x_0, y_0)\,, \qquad a_2 = \varphi_y(x_0, y_0)\,,$$

$$a_{11} = \varphi_{xx}(x_0, y_0)\,, \qquad a_{12} = \varphi_{xy}(x_0, y_0)\,,$$

$$a_{21} = \varphi_{yx}(x_0, y_0)\,, \qquad a_{22} = \varphi_{yy}(y_0, x_0)$$

erhalten wir

$$a_1\, h = \varphi_x\, h = \frac{d}{dt}\,\varphi\,(x_0 + t\, h, y_0)_{t=0}\,,$$

$$a_2\, g = \varphi_y\, g = \frac{d}{dt}\,\varphi\,(x_0, y_0 + t\, g)_{t=0}\,,$$

$$a_{11}\, h^2 = \varphi_{xx}\, h^2 = \frac{d^2}{dt^2}\,\varphi\,(x_0 + t\, h, y_0)_{t=0}\,,$$

$$a_{12}\, h\, g = \varphi_{xy}\, h\, g = \frac{\partial^2}{\partial t_1\, \partial t_2}\,\varphi\,(x_0 + t_1\, h, y_0 + t_2\, g)_{t_1=t_2=0}\,,$$

$$a_{21}\, g\, h = \varphi_{yx}\, g\, h = \frac{\partial^2}{\partial t_2\, \partial t_1}\,\varphi\,(x_0 + t_1\, h, y_0 + t_2\, g)_{t_1=t_2=0}\,,$$

$$a_{22}\, g^2 = \varphi_{yy}\, g^2 = \frac{d^2}{dt^2}\,\varphi\,(x_0, y_0 + t\, g)_{t=0}$$

usw.

Hat $\varphi(x, y)$ ein stetiges zweites Differential, so gilt $a_{12}\, h\, g = a_{21}\, g\, h$, denn die Operationen $\frac{\partial}{\partial t_1}$ und $\frac{\partial}{\partial t_2}$ sind vertauschbar, wenn $\frac{\partial^2}{\partial t_1\, \partial t_2}\,\varphi\,(x_0 + t_1\, h, y_0 + t_2\, g)$ eine stetige Funktion von t_1 und t_2 ist.

§ 8. Sätze über implizite Funktionen

Wir betrachten die direkte Summe $E_x \oplus E_y$ der Räume E_x und E_y sowie einen Operator $\varphi(x, y)$, der $E_x \oplus E_y$ in E_z überführt:

Es sei also $x \in E_x$, $y \in E_y$, $\varphi(x, y) \in E_z$ und

1. $\varphi(x_0, y_0) = 0\,,$ (1)

2. in einer Umgebung des Punktes (x_0, y_0) sei $\varphi(x, y)$ stetig und habe eine stetige Ableitung $\varphi_y(x, y)$ und

3. existiere $[\varphi_y(x_0, y_0)]^{-1}$.

Satz 1. *Sind die Voraussetzungen* 1—3 *erfüllt, so gibt es positive Konstanten δ und ε und einen Operator $y = f(x)$, $x \in E_x$, $y \in E_y$, der in der Umgebung $||x - x_0|| < \delta$ von x_0 definiert ist, so daß*

$$y = f(x) \tag{2}$$

in einer gewissen Umgebung von x_0 mit

$$\varphi(x, y) = 0 \tag{3}$$

äquivalent ist. D. h., jedes Element (x, y) mit $||x - x_0|| < \delta$, das (2) *genügt, erfüllt auch die Gleichung* (3), *und umgekehrt befriedigt jedes Element (x, y) aus $||x - x_0|| < \delta$, $||y - y_0|| < \varepsilon$, das* (3) *genügt, auch* (2). *Der Operator $f(x)$ ist stetig in x, und es gilt $f(x_0) = y_0$.*

Beweis. Gleichung (3) ist mit der folgenden Gleichung gleichbedeutend:

$$y = A(x, y)\,, \tag{4}$$

der Operator A ist durch die Gleichung

$$A(x, y) = y - [\varphi_y(x_0, y_0)]^{-1}\,\varphi(x, y) \tag{5}$$

bestimmt. Für den Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis der Lösung von Gleichung (4) wenden wir das Prinzip der kontrahierenden Abbildungen an.

Wegen

$$\frac{\partial A(x, y)}{\partial y} = I - [\varphi_y(x_0, y_0)]^{-1}\,\varphi_y(x, y) = [\varphi_y(x_0, y_0)]^{-1}\,\{\varphi_y(x_0, y_0) - \varphi_y(x, y)\}$$

ist

$$\left\|\frac{\partial A(x, y)}{\partial y}\right\| \leqq q(r) \qquad (||x - x_0|| \leqq r,\ ||y - y_0|| \leqq r)\,,$$

wobei infolge der angenommenen Stetigkeit von $\varphi_y(x, y)$

$$q(r) \to 0 \qquad \text{für} \qquad r \to 0 \tag{6}$$

strebt.

Deshalb genügt der Operator $A(x, y)$ einer LIPSCHITZ-Bedingung bezüglich y:

$$||A(x, y_1) - A(x, y_2)|| \leqq q(r)\,||y_1 - y_2||\,, \tag{7}$$

$$||x - x_0|| \leqq r\,, \qquad ||y_i - y_0|| \leqq r\,, \qquad i = 1, 2\,.$$

Weiter ist, da $\varphi(x, y)$ stetig und $\varphi(x_0, y_0) = 0$ ist,

$$||A(x, y_0) - y_0|| \leqq ||[\varphi_y(x_0, y_0)]^{-1}|| \, ||\varphi(x, y_0)|| \leqq p(r)$$
$$(||x - x_0|| \leqq r)$$

mit

$$p(r) \to 0 \quad \text{für} \quad r \to 0\,. \tag{8}$$

Wir wählen ein genügend kleines $\varepsilon > 0$, so daß $q(\varepsilon) = q < 1$ wird. Das ist auf Grund von (6) möglich. Aus der Ungleichung (7) folgt, daß für $||x - x_0|| \leqq \varepsilon$ der Operator $A(x, y)$ auf der Kugel $||y - y_0|| \leqq \varepsilon$ des Raumes E_y ein Kontraktionsoperator ist. Wir wählen jetzt ein $\delta \leqq \varepsilon$ so klein, daß

$$p(\delta) \leqq (1 - q)\,\varepsilon$$

wird. Dann bildet der Operator $A(x, y)$ für $||x - x_0|| \leqq \delta$ die Kugel $||y - y_0|| < \varepsilon$ in sich ab, und Gleichung (4) besitzt eine eindeutige Lösung in der Kugel $||y - y_0|| \leqq \varepsilon$. Wir bezeichnen diese Lösung mit $y = f(x)$ und sehen $y_0 = f(x_0)$.

Es ist jetzt nur noch die Stetigkeit des Operators $f(x)$ nachzuweisen. Wir bekommen

$$f(x) = A(x, f(x))$$

und daraus

$$\begin{aligned}||f(x) - f(x_0)|| &\leqq ||A(x, f(x)) - A(x, f(x_0))|| + ||A(x, f(x_0)) - A(x_0, f(x_0))|| \\ &\leqq q\, ||f(x) - f(x_0)|| + ||[\varphi_y(x_0, y_0)]^{-1}|| \, ||\varphi(x, y_0)||\,.\end{aligned}$$

Folglich ist

$$||f(x) - f(x_0)|| \leqq \frac{1}{1 - q}\, ||[\varphi_y(x_0, y_0)]^{-1}|| \, ||\varphi(x, y_0)||\,. \tag{9}$$

Der Operator $f(x)$ ist also stetig im Punkt x_0. Analog wird der Beweis für die anderen Punkte der Umgebung $||x - x_0|| \leqq \delta$ geführt.

Der Satz ist damit bewiesen.

Bemerkung 1. Nach dem Prinzip der kontrahierenden Abbildungen kann der Operator $f(x)$ als Grenzwert der Operatorenfolge $y = f_k(x)$ mit $||x - x_0|| \leqq \delta$, $||f_k(x) - y_0|| \leqq \varepsilon$ erhalten werden, die durch die Gleichungen

$$\begin{gathered} f_0(x) \equiv y_0\,, \\ f_k(x) = f_{k-1}(x) - [\varphi_y(x_0, y_0)]^{-1}\, \varphi(x, f_{k-1}(x))\,, \\ k = 1, 2, \ldots\,, \end{gathered} \tag{10}$$

bestimmt wird. Dabei gilt die folgende Abschätzung für die Konvergenzgeschwindigkeit:

$$||f(x) - f_k(x)|| \leqq \frac{q^k}{1 - q}\, ||[\varphi_y(x_0, y_0)]^{-1}|| \, ||\varphi(x, y_0)||\,. \tag{11}$$

Bemerkung 2. Ist zusätzlich bekannt, daß in der betrachteten Umgebung $\varphi_x(x, y)$ existiert und beschränkt ist, $||\varphi(x, y)|| \leqq \alpha$, so gilt die Abschätzung

$$||f(x) - f(x_0)|| \leqq c_1\, ||x - x_0||\,. \tag{12}$$

In diesem Falle ist nämlich

$$||\varphi(x, y_0)|| = ||\varphi(x, y_0) - \varphi(x_0, y_0)|| \leqq \alpha \, ||x - x_0|| ,$$

und Gleichung (9) liefert das gewünschte Resultat.

Bemerkung 3. $\varphi_x(x, y)$ sei beschränkt, $||\varphi_x(x, y)|| \leqq \alpha$, und $\varphi_y(x, y)$ genüge der Ungleichung

$$||\varphi_y(x, y)|| - ||\varphi_y(x_0, y_0)|| \leqq \alpha \, ||x - x_0|| + b \, ||y - y_0|| . \tag{13}$$

Dann gilt folgende Abschätzung der Konvergenzgeschwindigkeit:

$$||f(x) - f_k(x)|| \leqq c_2 \, ||x - x_0||^k \, ||(\varphi(x, y_0)|| . \tag{14}$$

Satz 2. *Unter den Voraussetzungen von Satz 1 sei der Operator $\varphi(x, y)$ in einer Umgebung des Punktes (x_0, y_0) aus $E_x \oplus E_y$ eine n-mal differenzierbare Funktion.*

Dann ist der Operator $y = f(x)$ in der δ-Umgebung des Punktes x_0 ebenfalls eine n-mal differenzierbare Funktion.

Zunächst wählen wir $\varphi(x, y)$ als Polynom:

$$\varphi(x, y) = \sum_{k=1}^{n} a_k \, (x - x_0, y - y_0)^k .$$

Wir setzen $x - x_0 = h$, $y - y_0 = u$, $f(x) = y_0 + u(h)$. Dann kann der Operator $u(h)$ als Grenzwert der Näherungsfolge

$$u_0(h) = 0 ,$$

$$u_k(h) = u_{k-1}(h) - B^{-1} \, \varphi \left(x_0 + h, y_0 + u_{k-1}(h)\right) ,$$

$$B = \varphi_y(x_0, y_0)$$

gewonnen werden. Da die Einsetzung eines Polynoms in ein Polynom wieder ein Polynom ergibt, folgt durch vollständige Induktion, daß alle $u_k(h)$ Polynome in h sind.

In unserem Fall sind alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung der Funktion $\varphi(x, y)$ stetig und demzufolge auch in einer Umgebung des Punktes (x_0, y_0) beschränkt. Deshalb ist (s. Bemerkung 3)

$$||u(h) - u_n(h)|| \leqq c_2 \, ||h||^n \, ||\varphi \, (x_0 + h, y_0|| .$$

Da $u_n(h)$ ein Polynom ist und $||\varphi \, (x_0 + h, y_0|| \to 0$ strebt für $||h|| \to 0$, bedeutet die letzte Ungleichung, daß $u(h)$ im Punkt $h = 0$ n-mal differenzierbar ist. Folglich wird $y = f(x)$ im Punkt $x = x_0$ n-mal differenzierbar.

Wir gehen zum allgemeinen Fall über. Nach der Voraussetzung des Satzes ist

$$\varphi(x, y) = \tilde{\varphi}(x, y) + (||x - x_0|| + ||y - y_0||)^n \, \omega \, (x - x_0, y - y_0)$$

mit

$$\tilde{\varphi}(x, y) = \sum_{k=1}^{n} a_k \, (x - x_0, y - y_0)^k$$

und

$$||\omega \, (x - x_0, y - y_0)|| \to 0 \quad \text{für} \quad ||x - x_0||, \, ||y - y_0|| \to 0 .$$

Da die Funktion $\tilde{\varphi}(x, y)$ allen Bedingungen des Satzes 1 genügt und ein Polynom ist, existiert ein n-mal differenzierbarer Operator $\tilde{f}(x)$ mit $\tilde{\varphi}(x, \tilde{f}(x)) = 0$.

Aus den Identitäten

$$f(x) = B^{-1} \left(B f(x) - \varphi(x, f(x))\right) ,$$

$$\tilde{f}(x) = B^{-1} \left(B \tilde{f}(x) - \tilde{\varphi}(x, \tilde{f}(x))\right)$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} ||f(x) - \tilde{f}(x)|| &\leqq ||B^{-1}|| \; ||B(f(x) - \tilde{f}(x)) - \varphi(x, f(x)) + \varphi(x, \tilde{f}(x)) - \varphi(x, \tilde{f}(x)) \\ &\quad + \tilde{\varphi}(x, \tilde{f}(x))|| \leqq ||B^{-1}|| \; ||B(f(x) - \tilde{f}(x)) - (\varphi(x, f(x)) - \varphi(x, \tilde{f}(x)))|| \\ &\quad + ||B^{-1}|| \; ||\varphi(x, \tilde{f}(x)) - \tilde{\varphi}(x, \tilde{f}(x))|| \, . \end{aligned} \tag{15}$$

Wir führen einen Operator $B(x, y, \tilde{y})$ durch

$$\varphi(x, y) - \varphi(x, \tilde{y}) = \int_0^1 \varphi_y((x, \tilde{y}) + t\,(y - \tilde{y}))\, dt\, (y - \tilde{y}) \equiv B(x, y, \tilde{y})\, (y - \tilde{y})$$

ein. $B(x, y, \tilde{y})$ ist auf der Gesamtheit der Veränderlichen stetig. $B(x, y, \tilde{y})$ strebt für $x \to x_0$, $\tilde{y} \to y_0$ gegen B. Auf Grund der Stetigkeit der Operatoren $f(x)$ und $\tilde{f}(x)$ kann ein $\delta_0 > 0$ angegeben werden mit

$$||B^{-1}|| \; ||B - B(x, f(x), \tilde{f}(x))|| \leqq q < 1 \qquad \text{für} \qquad ||x - x_0|| \leqq \delta_0 \, . \tag{16}$$

Dann erhalten wir aus Gleichung (15)

$$||f(x) - \tilde{f}(x)|| \leqq \frac{1}{1 - q} ||B^{-1}|| \; ||\varphi(x, \tilde{f}(x)) - \tilde{\varphi}(x, \tilde{f}(x))|| \, ,$$

und folglich ist wegen $||\tilde{f}(x) - y_0|| \leqq c_1 \, ||x - x_0||$ (s. Bemerkung 2)

$$\begin{aligned} ||f(x) - \tilde{f}(x)|| &\leqq c \, ||\varphi(x, \tilde{f}(x)) - \tilde{\varphi}(x, \tilde{f}(x))|| \\ &\leqq c \, (||x - x_0|| + ||\tilde{f}(x) - y_0||)^n \, ||\omega\,(x - x_0, \tilde{f}(x) - y_0|| \\ &\leqq c \, (1 + c_1)^n \, ||x - x_0||^n \, ||\omega\,(x - x_0, \tilde{f}(x) - y_0||) \, . \end{aligned}$$

Wir finden

$$f(x) \overset{x - x_0}{\underset{n}{=}} \tilde{f}(x) \, . \tag{17}$$

Der Operator $\tilde{f}(x)$ ist n-mal differenzierbar im Punkt x_0. Dann folgt aus der letzten Beziehung, daß auch der Operator $f(x)$ n-mal in x_0 differenzierbar ist.

Durch analoge Überlegungen beweist man die Differenzierbarkeit des Operators $f(x)$ in den restlichen Punkten der Kugel $||x - x_0|| < \delta$.

Abschließend zeigen wir

$$df(x_0, h) = - \, [\varphi_y(x_0, y_0)]^{-1} \, \varphi_x(x_0, y_0) \;\; h \, , \tag{18}$$

d. h.

$$f'(x_0) = - \, [\varphi_y(x_0, y_0)]^{-1} \, \varphi_x(x_0, y_0) \, .$$

Nach Definition ist $u_1(h)$ ein Operator (ein Polynom in h) und

$$df(x_0, h) = d\tilde{f}(x_0, h) \overset{h}{\underset{1}{=}} u_1(h) \, .$$

Wegen

$$\varphi(x_0 + h, y_0) = \varphi(x_0 + h, y_0) - \varphi(x_0, y_0) \frac{h}{\overline{1}} \varphi_x(x_0, y_0)\, h$$

ist

$$u_1(h) = -[\varphi_y(x_0, y_0)]^{-1} \varphi(x_0 + h, y_0) \frac{h}{\overline{1}} - [\varphi_y'(x_0, y_0)]^{-1} \varphi_x(x_0, y_0)\,,$$

und daraus folgt (18).

§ 9. Anwendungen des Satzes über implizite Funktionen

Abhängigkeit der Lösung von der Gleichung. Wir untersuchen den Raum $C^1[G; E]$ der Funktionen $f(x)$, die auf der Teilmenge G von E definiert sind und deren Wertevorrat ebenfalls in E liegt, d. h., ist $x \in G$, so sei $f(x) \in E$. Die Funktionen $f(x)$ seien differenzierbar, sowie $f(x)$, $f'(x)$ stetig und von beschränkter Norm.

Es sei

$$\|f\| = \sup (\|f(x)\| + \|f'(x)\|)\,.$$

Dann ist $C^1[G; E]$ ein linearer normierter Raum.

Wir untersuchen die Gleichung

$$f(x) = 0 \quad \text{mit} \quad x \in G \quad \text{und} \quad f \in C^1[G; E]$$

und nehmen an, daß $f_0(x_0) = 0$ ist für ein $x_0 \in G$ und daß $f_0'(x_0) \in (E \to E)$ einen inversen Operator hat. Dann gilt der folgende

Satz 1. *Es existieren Konstanten $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ derart, daß für jedes $f \in C^1[G; E]$ mit $\|f - f_0\| < \delta$ die Gleichung $f(x) = 0$ eine Lösung $x = x_0 + \Delta x$ mit $\|\Delta x\| < \varepsilon$ hat; dabei geht $\Delta x \to 0$ für $f \to f_0$.*

Beweis. Wir sehen $f(x)$ als Funktion von $x \in G$ und $f \in C^1[G; E]$ an: $f(x) = \Phi(f, x)$. Aus der Definition von $\Phi(f, x)$ folgt, daß $\Phi(f, x)$ und $\Phi_x(f, x)$ stetig sind. Es ist $\Phi_x(f, x) = f'(x)$. Nach Voraussetzung ist $f_0(x_0) = 0$, und es existiert $[f_0'(x_0)]^{-1}$. Dies bedeutet, daß $\Phi(f_0, x_0) = 0$ ist und $[\Phi_x(f_0, x_0)]^{-1}$ existiert. Auf Grund des Satzes über implizite Funktionen ergibt sich: Es gibt Werte $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$, so daß die Gleichung $\Phi(f_0 + \Delta f, x_0 + \Delta x) = 0$ eine Lösung $x_0 + \Delta x$ mit $\|\Delta x\| < \varepsilon$ besitzt, wenn nur $\|\Delta f\| \leqq \delta$ ist. Das heißt, es ist $f(x) = 0$, $f = f_0 + \Delta f$ und $x = x_0 + \Delta x$. Hierbei strebt $\Delta x \to 0$, wenn $\delta \to 0$ geht. Damit ist unser Satz bewiesen.

Bemerkung. Für $\Phi(f, x) = f(x)$ existiert das Differential $\Phi_f(f, x)\, \Delta f = \Delta f$. Aus der Existenz von $\Phi_f(f, x)$ folgt, daß x eine differenzierbare Funktion von f ist, und es gilt

$$\Delta x \frac{\Delta f}{\overline{1}} - [\Phi_x(f_0, x_0)]^{-1} [\Phi_f(f_0, x_0)\, \Delta f] = -[f'(x_0)]^{-1} \Delta f\,.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist ein gleichmäßiges Differential der Funktion $x = \varphi(f)$ für $x = x_0$, d. h. gleich $d\varphi(f_0, \Delta f)$.

Anwendung auf Eigenelemente. Wir betrachten die direkte Summe $H_1 = H \oplus R$, dabei sei H ein reeller HILBERT-Raum und R die Zahlengerade, und bezeichnen mit $\{x, t\}$ das Element aus H_1 mit $x \in H$ und $t \in R$. f sei ein nichtlinearer Operator aus $(H_1 \to H_1)$

$$f(A; x, t) = [y, \tau], \quad x \in H, t \in R.$$

Er habe die spezielle Gestalt

$$y = A\,x - t\,x \in H, \quad \tau = (x, x) - 1.$$

Dabei sei A ein vollstetiger linearer selbstadjungierter Operator aus $(H \to H)$.

Die Gleichung $f(A; x, t) = 0$ lautet also

$$A\,x - t\,x = 0, \quad (x, x) = 1,$$

d. h., t ist ein Eigenwert und x ein entsprechendes normiertes Eigenelement des Operators A. Wenn $\{x, t\}$ den Zuwachs $\{\Delta x, \Delta t\}$ erfährt, dann ändert sich $f(A; x, t)$ um

$$\{A\,\Delta x - t\,\Delta x - \Delta t\,x - \Delta t\,\Delta x, 2(x, \Delta x) + (\Delta x, \Delta x)\}.$$

Der lineare Anteil dieses Zuwachses ist

$$df_{H_1}(A; x, t; \Delta x, \Delta t) = \{A\,\Delta x - t\,\Delta x - \Delta t\,x, 2(x, \Delta x)\}.$$

$f'(A; x, t)$ ist infolgedessen ein linearer Operator aus $(H_1 \to H_1)$. Er führt $\{\Delta x, \Delta t\}$ in $\{A\,\Delta x - t\,\Delta x - \Delta t\,x, 2(x, \Delta x)\}$ über.

Ist t_0 ein einfacher Eigenwert des Operators A_0[1]) und x_0 ein zugehöriges Eigenelement, so existiert ein inverser Operator

$$[f_{H_1}(A_0; x_0, t_0)]^{-1},$$

d. h., für jedes $\{y, \tau\} \in H_1$ haben die Gleichungen

$$A_0\,\Delta x - t_0\,\Delta x - x_0\,\Delta t = y, \quad 2(x_0, \Delta x) = \tau \tag{1}$$

die Lösung $\{\Delta x, \Delta t\}$, und diese Lösung ist eindeutig bestimmt.

Es ist $\Delta x = a\,x_0 + (\Delta x)_1$ für $a = (\Delta x, x_0)$ und $((\Delta x)_1, x_0) = 0$. Analog ist $y = b\,x_0 + y_1$ für $b = (y, x_0)$ und $(y_1, x_0) = 0$. Da $(A_0 - t_0\,E)\,x_0 = 0$ ist, folgt weiter

$$(A_0\,\Delta x - t_0\,\Delta x) - x_0\,\Delta t = (A_0 - t_0\,E)\,(\Delta x)_1 - x_0\,\Delta t$$

und $((A_0 - t_0\,E)\,(\Delta x)_1, x_0) = ((A - t_0\,E)\,x_0, (\Delta x)_1) = 0$. Hieraus und aus (1) ergibt sich

$$(A_0 - t_0\,E)\,(\Delta x)_1 = y_1, \tag{2}$$

$$\Delta t = -b = -(y, x_0), \quad 2\,a = \tau. \tag{3}$$

Weil die rechte Seite von (2) orthogonal zu x_0 ist (d. h. orthogonal zu allen zum Eigenwert t_0 gehörenden Eigenelementen), hat diese Gleichung eine eindeutige zu x_0 orthogonale Lösung

$$(\Delta x)_1 = (A_0 - t_0\,E)_1^{-1}\,y_1 = (A_0 - t_0\,E)_1^{-1}\,[y - (y, x_0)\,x_0].$$

---

[1]) D. h. ein Eigenwert der Vielfachheit 1.

Hier ist mit $(A_0 - t_0 E)_1$ der auf den Unterraum der zu x_0 orthogonalen Elemente eingeschränkte Operator $A_0 - t_0 E$ bezeichnet.

Die Gleichung (1) hat also für jedes $\{y, \tau\} \in H_1$ die Lösung

$$\Delta x = \frac{\tau}{2} x_0 + (A_0 - t_0 E)_1^{-1} [y - (y, x_0) x_0], \qquad \Delta t = -(y, x_0).$$

Hieraus folgt die Existenz des Operators $[f'(A_0; x_0, t_0)]^{-1}$.

Auf Grund des Satzes 1 gibt es Werte $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ derart, daß für $||\Delta A|| < \delta$ ein Eigenwert $t_0 + \Delta t$ und ein normiertes Eigenelement $x_0 + \Delta x$ des Operators $A = A_0 + \Delta A$ existieren

$$[(A_0 + \Delta A) - (t + \Delta t) E] (x_0 + \Delta x) = 0,$$
$$(x_0 + \Delta x, x_0 + \Delta x) = 1;$$

für $||\Delta x|| + |\Delta t| < \varepsilon$ sind hierbei Eigenwerte und Eigenelemente eindeutig bestimmt.

Die erste Näherung $\{\Delta_1 x, \Delta_1 t\}$ von $\{\Delta x, \Delta t\}$ findet man aus den Gleichungen

$$A_0 \Delta_1 x - t_0 \Delta_1 x - \Delta_1 t\, x_0 + \Delta A\, x_0 = 0,$$
$$(x_0, \Delta_1 x) = 0.$$

Wenn wir die erste dieser Gleichungen skalar mit x_0 multiplizieren und beachten, daß

$$\big((A_0 - t_0 E)\, \Delta_1 x, x_0\big) = \big((A_0 - t_0 E)\, x_0, \Delta_1 x\big) = 0$$

ist, so erhalten wir

$$\Delta_1 t = (\Delta A\, x_0, x_0).$$

Weiter ergibt sich

$$(A_0 - t_0 E)\, \Delta_1 x = \Delta_1 t\, x_0 - \Delta A\, x_0. \tag{4}$$

Die Gleichung (4) hat immer eine Lösung, weil ihre rechte Seite orthogonal zu x_0 ist:

$$(\Delta_1 t\, x_0, x_0) - (\Delta A\, x_0, x_0) = \Delta_1 t - (\Delta A\, x_0, x_0) = 0.$$

Folglich ist

$$\Delta_1 x = (A_0 - t_0 E)_1^{-1} [\Delta_1 t\, x_0 - \Delta A\, x_0].$$

Parameterabhängige Gleichungen. Satz 2. *$y = y(t, x)$ sei eine Funktion des Elementes $x \in E$ und des Zahlenparameters t. Ihr Wertevorrat liege wiederum in E. Ferner sei $y(t, x)$ n-mal nach t und x differenzierbar. Die Gleichung $y(t_0, x) = 0$ habe die Lösung $x = x_0$, und es existiere der Operator $[y_x(t_0, x_0)]^{-1}$. Dann existieren Werte $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ derart, daß für $|t - t_0| < \delta$ die Gleichung*

$$y(t, x) = 0 \tag{5}$$

genau eine Lösung $x = x(t)$ mit $||x(t) - x_0|| < \varepsilon$ hat. $x(t)$ ist nach t n-mal differenzierbar.

Dies ist eine unmittelbare Folgerung aus dem Satz über implizite Funktionen.

Beispiel. $A(t)$ sei ein vollstetiger linearer Operator aus $(H \to H)$ und als Funktion von t n-mal differenzierbar. Der Operator $A(t_0)$ habe einen einfachen

Eigenwert λ_0 mit dem normierten Eigenelement x_0:

$$A(t_0)\, x_0 - \lambda_0\, x_0 = 0\,, \qquad (x_0, x_0) = 1\,.$$

Wir betrachten die direkte Summe $H \oplus R$ und definieren eine Funktion $\Phi(t; x, \lambda)$ mit

$$\{x, \lambda\} \in H \oplus R\,, \qquad \Phi(t; x, \lambda) \quad H \oplus R$$

durch

$$\Phi(t; x, \lambda) = \{A(t)\, x - \lambda\, x, (x, x) - 1\}\,.$$

Die Gleichung für ein normiertes Eigenelement $x(t)$ und für einen Eigenwert $\lambda(t)$ des Operators $A(t)$ hat die Form

$$\Phi(t; x, \lambda) = 0\,.$$

Weil $A(t)$ n-mal nach t differenzierbar ist, so hat $\Phi(t; x, \lambda)$ auch diese Eigenschaft. Wie im vorhergehenden Abschnitt überzeugen wir uns davon, daß

$$\left[\frac{\partial}{\partial\,\{x, \lambda\}}\, \Phi(t_0; x_0, \lambda_0)\right]^{-1}$$

existiert. Dann kann aber Satz 2 angewendet werden. Demzufolge hat

$$\Phi(t; x, \lambda) = 0\,,$$

d. h.

$$A(t)\, x - \lambda\, x = 0 \quad \text{mit} \quad (x, x) = 1 \tag{6}$$

die Lösung $\{x(t), \lambda(t)\}$. Sie ist n-mal nach t differenzierbar.

Variationsgleichungen. Unter den Voraussetzungen von Satz 2 ist die Lösung $x(t)$ von (5) eine nach t differenzierbare Funktion. Die Ableitung $x'(t)$ der Funktion $x(t)$ nach t für $t = t_0$ heißt *Variation*

$$\delta x = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0}.$$

Entsprechend ist für $y = y(t, x)$

$$\delta y = \left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=t_0}.$$

Die Gleichung $y(t, x(t)) = 0$ ist eine Identität. Differentiation nach t liefert

$$\frac{\partial y(t, x(t))}{\partial t} + \frac{\partial y(t, x(t))}{\partial x}\, x'(t) = 0\,.$$

Für $t = t_0$ erhalten wir

$$\delta y + y_x(t_0, x_0)\, \delta x = 0\,. \tag{7}$$

(7) heißt *Variationsgleichung* für $y(t, x) = 0$.

Weil $[y_x(t_0, x_0)]^{-1}$ existiert, ist

$$\delta x = -\,[y_x(t_0, x_0)]^{-1}\, \delta y\,. \tag{8}$$

Zum Beispiel kann $(A - \lambda\, E)\, \Delta x + \Delta A\, x - \Delta\lambda\, x = 0$ als Variationsgleichung für (6) angesehen werden, wenn ΔA, Δx, $\Delta\lambda$ durch δA, δx, $\delta\lambda$ ersetzt werden.

Wir erhalten dann

$$\delta x = -(A - \lambda E)_1^{-1} (\delta A\, x - \delta \lambda\, x)\,, \qquad \delta\lambda = (\delta A\, x, x)\,.$$

Anwendungen auf Differentialgleichungen. Wir kommen auf die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \qquad \text{mit} \qquad x(0) = x_0 \tag{9}$$

zurück. Hier sind $f(x, t)$ und x Elemente des Raumes E. (9) ist äquivalent mit der Integralgleichung

$$x(t) - x_0 = \int_0^t f(\tau, x(\tau))\, d\tau = 0\,. \tag{10}$$

Wir bezeichnen die linke Seite der Gleichung (10) mit $F(x_0, x(t))$. Die Funktionen $x(t)$ sind aus $C_1^E[0, 1]$[1]), $F(x_0, x(t))$ ist ein Operator, der die direkte Summe

$$E \oplus C_1^E[0, 1]$$

in $C_1^E[0, 1]$ abbildet. Wenn $f(t, x)$ n-mal nach x differenzierbar ist und $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$ stetig in (t, x) ist, dann ist $x(t) - \int_0^t f(\tau, x(\tau))\, d\tau$ ein n-mal differenzierbarer Operator aus $(C_1^E[0, 1] \to C_1^E[0, 1])$. Hieraus folgt, daß $F(x_0, x(t))$ ein n-mal nach $x(t)$ differenzierbarer Operator ist. Weil x_0 als einzelner Summand in F eingeht, ist F eine n-mal differenzierbare Funktion in $E \oplus C_1^E[0, 1]$.

Wenn $x = x(t)$ den Zuwachs $\Delta x = x(t)$ erfährt, dann ist

$$F_x\, \Delta x = \Delta x(t) - \int_0^t f_x(\tau, x(\tau))\, \Delta x(\tau)\, d\tau \tag{11}$$

der bezüglich Δx lineare Anteil des Zuwachses von $F(x_0, x)$. Die rechte Seite von (11) ist ein Operator aus $(C_1^E[0, 1] \to C_1^E[0, 1])$. Er besitzt einen inversen Operator. Denn für jedes $y(t)$ aus $C_1^E[0, 1]$ ist

$$F_x\, \Delta x = y(t)$$

oder

$$\Delta x(t) - \int_0^t f_x(\tau, x(\tau))\, \Delta x(\tau)\, d\tau = y(t)$$

äquivalent mit der Differentialgleichung für $\Delta x(t)$

$$\frac{d\Delta x(t)}{dt} = f_x(t, x(t))\, \Delta x(t) + y'(t) \qquad \text{und} \qquad \Delta x(0) = y(0)\,.$$

Die letzte Gleichung hat auf Grund des Existenzsatzes eine eindeutig bestimmte Lösung (die rechte Seite ist linear bezüglich $\Delta x(t)$ — die Lipschitz-Bedingung in bezug auf Δx ist automatisch erfüllt). Diese Lösung stellt den inversen Operator

$$\Delta x(t) = \Delta x = [F_x]^{-1}\, y(t)$$

dar.

---

[1]) C_1^E ist die Menge der stetig differenzierbaren Funktion $x(t)$ mit $t \in [0, 1]$ und $x(t) \in E$.

Die Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen sind erfüllt.

Die Lösung $x = x(t)$ der Gleichung (9) kann als Funktion des Anfangswertes x_0 angesehen werden: $x = x(t, x_0)$ und $x(t, x_0)$ ist n-mal nach x_0 differenzierbar.

Ist E insbesondere ein n-dimensionaler Raum, dann erhalten wir den Satz über die stetig differenzierbare Abhängigkeit der Lösung von den Anfangswerten.

§ 10. Tangentialmannigfaltigkeiten

Der Fall einer direkten Summe. Die Funktion $\varphi(x)$ bilde den BANACH-Raum E_x in den BANACH-Raum E_y ab: $x \in E_x$, $\varphi(x) \in E_y$. Wir betrachten die Gesamtheit $\mathfrak{M}$ der Elemente x, die der Gleichung

$$\varphi(x) = 0$$

genügen. Es sei ferner $\varphi(x_0) = 0$, d. h. $x_0 \in \mathfrak{M}$, und die Funktion $\varphi(x)$ sei in einer Umgebung des Punktes x_0 differenzierbar, d. h., es gelte

$$\varphi\,(x_0 + h) \overset{h}{\underset{1}{=}} \varphi'(x_0)\, h\, .$$

Bildet der Operator $\varphi'(x_0) \in (E_x \to E_y)$ den Raum E_x auf den ganzen Raum E_y ab, so werden wir das Element x_0 *regulär* nennen.

Für das folgende sei stets x_0 regulär. Die Gesamtheit der Elemente $h \in E_x$, für die

$$\varphi'(x_0)\, h = 0$$

gilt, werden wir mit T_0 bezeichnen. T_0 ist ein Unterraum von E_x.

Die Menge der Elemente $x_0 + h$ mit $h \in T_0$ nennen wir *lineare Tangentialmannigfaltigkeit* T_{x_0} von $\mathfrak{M}$ im Punkt x_0.

Zunächst sei E_x direkte Summe von T_0 und einem Unterraum T_ξ. Jedes Element $x \in E_x$ ist also von der Form

$$x = h + \xi \quad \text{mit} \quad h \in T_0 \quad \text{und} \quad \xi \in T_\xi\, .$$

Der lineare Operator $\varphi'(x_0)$ bildet T_ξ auf ganz E_y ab. In der Tat, $\varphi'(x_0)$ bildet E_x auf den ganzen Raum E_y ab, also läßt sich für jedes $y \in E_y$ ein Element $x \in E_x$ derart finden, daß

$$\varphi'(x_0)\, x = y$$

ist. Nun ist aber $x = h + \xi$ mit $h \in T_0$, $\xi \in T_\xi$ und $\varphi'(x_0)\, h = 0$. Somit ist

$$\varphi'(x_0)\, \xi = \varphi'(x_0)\, x = y\, .$$

Wir definieren einen linearen Operator A aus $(T_\xi \to E_y)$ durch $A\, \xi = \varphi'(x_0)\, \xi$.

A bildet nach dem, was eben bewiesen wurde, T_ξ auf ganz E_y ab. Sind dabei $\xi, \xi_1 \in T_\xi$ und gilt $A\, \xi = A\, \xi_1$, so folgt $\xi = \xi_1$. Denn wegen

$$A\,(\xi - \xi_1) = 0\, , \quad \text{d. h.} \quad \varphi'(x_0)\,(\xi - \xi_1) = 0$$

ist $\xi - \xi_1 \in T_0$. E_x ist aber direkte Summe von T_0 und T_ξ. Also folgt $\xi - \xi_1 = 0$ und damit $\xi - \xi_1$.

Nach dem Satz von BANACH hat der Operator A einen inversen linearen Operator A^{-1}.

Satz 1. *Wenn E_x direkte Summe der Unterräume T_0 und T_ξ ist, dann gibt es eine topologische (d. h. umkehrbar eindeutige und umkehrbar stetige) Abbildung, die eine Umgebung von x_0 in der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ und eine Umgebung desselben Elementes x_0 in der linearen Tangentialmannigfaltigkeit T_{x_0} ineinander überführt. Dabei haben entsprechende Punkte einen Abstand, der von höherer Ordnung klein wird als ihre Entfernung von x_0.*

Beweis. In der Umgebung von x_0 haben die Elemente die Form

$$x = x_0 + h + \xi \quad \text{mit} \quad h \in T_0, \xi \in T_\xi .$$

Die Definitionsgleichung von $\mathfrak{M}$ schreiben wir in der Form

$$\Phi(h, \xi) = \varphi(x_0 + h + \xi) = 0 . \tag{1}$$

Für $h = 0$ und $\xi = 0$ ist (1) erfüllt. Ferner hat das partielle Differential der Funktion $\Phi(h, \xi)$, das dem Zuwachs $\Delta\xi$ entspricht, für $h = 0$, $\xi = 0$ die Gestalt

$$\Phi_\xi(0, 0)\, \Delta\xi = \varphi'(x_0)\, \Delta\xi = A\, \Delta\xi . \tag{2}$$

Der Operator $A = \Phi_\xi(0, 0)$ hat einen inversen Operator. Darum ist nach dem Satz über implizite Funktionen in einer Umgebung von $h = 0$, $\xi = 0$ die Gleichung (1) äquivalent mit

$$\xi = \psi(h) ,$$

wo $\psi(h)$ eine differenzierbare Funktion mit $\psi(0) = 0$ ist. Somit können wir jeden Punkt $x \in \mathfrak{M}$ in einer Umgebung von x_0 durch

$$x = x_0 + h + \psi(h) , \quad h \in T_0 , \quad \psi(h) \in T_\xi ,$$

darstellen. Wir haben also eine Abbildung konstruiert, die jedem Punkt $\bar{x} = x_0 + h$ einer Umgebung von x_0 in T_{x_0} umkehrbar eindeutig und stetig ein $x = x_0 + h + \psi(h)$ aus einer Umgebung von x_0 in $\mathfrak{M}$ zuordnet. Die Abbildung ist also topologisch. Wegen

$$\Phi_h(0, 0)\, h + \Phi_\xi(0, 0)\, \psi'(0)\, h = \Phi_h(0, 0)\, h + A\, \psi'(0)\, h = 0$$

erhalten wir

$$d\psi(0, h) = \psi'(0)\, h = - A^{-1}\, \Phi_h(0, 0)\, h = - A^{-1}\, \psi'(x_0)\, h = - A^{-1}\, 0 = 0 .$$

Darum gilt

$$\psi(h) \frac{h}{\overline{1}} \psi(0) + \psi'(0)\, h = 0 ,$$

d. h. $||\psi(h)|| = o(||h||)$. $o(||h||)$ wird von höherer als erster Ordnung in $||h||$ für $||h|| \to 0$ klein. $||\psi(h)||$ ist aber der Abstand des Punktes $x_0 + h$ der linearen Tangentialmannigfaltigkeit T_{x_0} von dem entsprechenden Punkt $x = x_0 + h + \psi(h)$ von $\mathfrak{M}$. Dieser Abstand geht von höherer Ordnung gegen Null als $||h||$ oder $||h + \psi(h)||$, d. h. als der Abstand der Punkte $x_0 + h$ und $x_0 + h + \psi(h)$ vom Berührungspunkt x_0, q.e.d.

Allgemeiner Fall. Im allgemeinen können wir die Existenz eines Unterraumes T_ξ, so daß $E = T_0 \oplus T_\xi$ ist, nicht annehmen; dennoch ist der Satz 1 in einer etwas abgeschwächten Form richtig, wie wir sehen werden.

Wir bilden den Faktorraum E_x/T_0 der Nebenklassen in bezug auf T_0 (s. S. 41). Jedes Element T des Faktorraumes E/T_0 ist eine Menge von Elementen aus E_x. Wenn x_1 und x_2 aus T sind, so ist $x_1 - x_2 \in T_0$, d. h. $\varphi'(x_0)\,(x_1 - x_2) = 0$. Deshalb gilt

$$\varphi'(x_0)\, x_1 = \varphi'(x_0)\, x_2 .$$

Der Operator $\varphi'(x_0) \in (E_x \to E_y)$ transformiert die beliebigen Elemente x_1 und x_2 aus T in eines aus E_y. Ist umgekehrt

$$\varphi'(x_0)\, x_1 = \varphi'(x_0)\, x_2 ,$$

so folgt

$$\varphi'(x_0)\,(x_1 - x_2) = 0 , \quad \text{d. h.} \quad x_1 - x_2 \in T_0 ,$$

also gehören x_1 und x_2 derselben Klasse T aus E_x/T_0 an. Infolgedessen erzeugt der Operator $\varphi'(x_0)$ einen linearen Operator A, der E_x/T_0 in E_y abbildet, und zwar ist

$$A\,T = \varphi'(x_0)\, x ,$$

wenn $T \in E_x/T_0$ und x ein beliebiger Punkt aus T ist. Nach diesen Überlegungen hängt $A\,T$ nicht von der Wahl von $x \in T$ ab.

y sei ein willkürlich gewähltes Element aus E_y. Nach Voraussetzung bildet der Operator $\varphi'(x_0)$ den Raum E_x in ganz E_y ab. Deshalb läßt sich ein Element $x \in E_x$ finden, so daß $\varphi'(x_0)\, x = y$ ist. x gehört aber zu einem bestimmten T aus E_x/T_0. Nach Definition ist $A\,T = \varphi'(x_0)\, x = y$. Der Operator A hat somit eine Inverse A^{-1}. Nach dem Satz von Banach ist A^{-1} ebenfalls beschränkt.

Satz 2. *Jedem Punkt der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ kann man einen Punkt der Tangentialmannigfaltigkeit T_{x_0} zuordnen, und umgekehrt gehört zu jedem Element von T_{x_0} eines von $\mathfrak{M}$, so daß der Abstand zwischen entsprechenden Punkten von höherer Ordnung klein wird als ihr Abstand vom Berührungspunkt x_0 (diese Zuordnung ist nicht eindeutig).*

Man beweist diesen Satz ähnlich wie den über implizite Funktionen.

Beweis. Es sei $h \in T_0$. Wir konstruieren eine Folge $\{T_n\}$ von Elementen aus E_x/T_0 und von Punkten $\{\xi_n\}$ mit $\xi_n \in T_n$: Es sei $\xi_0 = 0 \in T_0$, und es seien alle ξ_i, T_i mit $i = 1, 2, \ldots, n-1$ konstruiert. Wir definieren dann T_n und ξ_n wie folgt:

$$T_n = T_{n-1} - A^{-1}\,\varphi\,(x_0 + h + \xi_{n-1}) \tag{3}$$

und entnehmen der Nebenklasse T_n ein ξ_n mit

$$\|\xi_n - \xi_{n-1}\| \leqq 2\, \|T_n - T_{n-1}\| .$$

Eine solche Wahl ist möglich, denn es ist

$$\|T_n - T_{n-1}\| = \inf_{\xi \in T_n} \|\xi - \xi_{n-1}\| .$$

Weil ξ_{n-1} in T_{n-1} liegt, erhalten wir nach Definition des Operators A

$$A\, T_{n-1} = \varphi'(x_0)\, \xi_{n-1}.$$

Deshalb können wir (3) auch in der Form

$$T_n = -A^{-1}\, [\varphi\,(x_0 + h + \xi_{n-1}) - \varphi'(x_0)\, \xi_{n-1}]$$

schreiben. Nun ist ebenso

$$T_{n-1} = -A^{-1}\, [\varphi\,(x_0 + h + \xi_{n-2}) - \varphi'(x_0)\, \xi_{n-2}]\,.$$

Daraus folgt

$$T_n - T_{n-1} = -A^{-1}\, [\varphi\,(x_0 + h + \xi_{n-1}) - \varphi\,(x_0 + h + \xi_{n-2}) - \varphi'\,(x_0)\,(\xi_{n-1} - \xi_{n-2})]\,.$$

Wir setzen

$$\xi_t = \xi_{n-2} + t\,(\xi_{n-1} - \xi_{n-2})$$

und erhalten

$$\varphi\,(x_0 + h + \xi_{n-1}) - \varphi\,(x_0 + h + \xi_{n-2}) = \int_0^1 \varphi'\,(x_0 + h + \xi_t)\, dt\,(\xi_{n-1} - \xi_{n-2})\,.$$

Somit folgt

$$T_n - T_{n-1} = -A^{-1} \int_0^1 [\varphi'\,(x_0 + h + \xi_t) - \varphi'(x_0)]\, dt\,(\xi_{n-1} - \xi_{n-2})\,. \tag{4}$$

Es sei

$$||h|| \leqq r\,, \quad ||\xi_{n-2}|| \leqq r\,, \quad ||\xi_{n-1}|| \leqq r\,.$$

Dann ergibt sich

$$||\xi_t|| \leqq r\,,$$

also auch

$$||h + \xi_t|| \leqq 2\,r\,.$$

Wegen der Stetigkeit von $\varphi'(x)$ im Punkt x_0 gibt es für jedes $r > 0$ eine Zahl ε_r mit $\varepsilon_r \to 0$ für $r \to 0$ derart, daß

$$||\varphi'(x) = \varphi'(x_0)|| \leqq \varepsilon_r \quad \text{für} \quad ||x - x_0|| \leqq 2\,r$$

ist. Daraus ergibt sich

$$||\varphi'\,(x_0 + h + \xi_t) - \varphi'(x_0)|| \leqq \varepsilon_r\,,$$

und aus (4) folgt

$$||T_n - T_{n-1}|| \leqq ||A^{-1}|| \int_0^1 ||\varphi'\,(x_0 + h + \xi_t) - \varphi'(x_0)||\, dt\; ||\xi_{n-1} - \xi_{n-2}|| \leqq ||A^{-1}||\, \varepsilon_r\, ||\xi_{n-1} - \xi_{n-2}||$$

und

$$||\xi_n - \xi_{n-1}|| \leqq 2\, ||T_n - T_{n-1}|| \leqq 2\, ||A^{-1}||\, \varepsilon_r\, ||\xi_{n-1} - \xi_{n-2}||\,.$$

Für hinreichend kleines r ist

$$2\, ||A^{-1}||\, \varepsilon_r \leqq \frac{1}{2}\,,$$

also auch

$$||\xi_n - \xi_{n-1}|| \leqq \frac{1}{2} ||\xi_{n-1} - \xi_{n-2}|| .$$

Nun sei $||h|| = r$ und $||\xi_i|| \leqq r$ für $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Dann ist

$$||\xi_n - \xi_{n-1}|| \leqq \frac{1}{2} ||\xi_{n-1} - \xi_{n-2}|| \leqq \cdots \leqq \frac{1}{2^{n-1}} ||\xi_1 - \xi_2|| = \frac{1}{2^{n-1}} ||\xi_1||$$

und

$$\begin{aligned} ||\xi_n|| &= ||\xi_1 + (\xi_2 - \xi_1) + \cdots + (\xi_n - \xi_{n-1})|| \\ &\leqq ||\xi_1|| + ||\xi_2 - \xi_1|| + \cdots + ||\xi_n - \xi_{n-1}|| \\ &\leqq ||\xi_1|| \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \leqq 2\, ||\xi_1|| . \end{aligned}$$

Wegen $\xi_0 = 0$ ist $T_1 = - A^{-1} \varphi(x_0 + h)$ und

$$||\xi_1|| \leqq 2\, ||T_1|| \leqq 2\, ||A^{-1}||\, ||\varphi(x_0 + h)|| .$$

Ferner gilt

$$\varphi(x_0 + h) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)\, h + \varepsilon(h) \qquad \text{mit} \qquad ||\varepsilon(h)|| = o(||h||) .$$

Nun ist aber $\varphi(x_0) = 0$, und h liegt in T_0; folglich ist auch

$$\varphi'(x_0)\, h = 0$$

und

$$\varphi(x_0 + h) = \varepsilon(h) .$$

Hieraus erhalten wir

$$||\xi_1|| \leqq 2\, ||A^{-1}||\, ||\varepsilon_h|| . \tag{5}$$

Für hinreichend kleines $r > 0$ und $||h|| \leqq r$ ist

$$||\varepsilon(h)|| \leqq \frac{1}{4\, ||A^{-1}||} ||h|| .$$

Daraus gewinnen wir

$$||\xi_1|| \leqq \frac{1}{2} ||h|| \leqq \frac{1}{2} r$$

und schließlich $||\xi_n|| \leqq r$.

Es gilt für alle n

$$||\xi_n - \xi_{n-1}|| \leqq \frac{1}{2} ||\xi_{n-1} - \xi_{n-2}|| .$$

Deshalb konvergiert die Folge $\{\xi_n\}$ gegen ein Element $\xi \in E_x$ mit $||\xi|| \leqq ||h||$, und darüber hinaus ist wegen (5)

$$||\xi|| \leqq 2\, ||\xi_1|| \leqq 4\, ||A^{-1}||\, ||\varepsilon(h)|| . \tag{6}$$

Entsprechend konvergieren die T_n aus E_x/T_0 gegen ein T aus E_x/T_0, und es ist $\xi \in T$.

Da $\xi_n \to \xi$ und $T_n \to T$ streben, geht die Gleichung (3) in

$$T = T - A^{-1} \varphi(x_0 + h + \xi) ,$$

d. h.

$$A^{-1}\,\varphi\,(x_0 + h + \xi) = 0$$

oder

$$\varphi\,(x_0 + h + \xi) = 0$$

über. Demzufolge ist

$$x_0 + h + \xi \in \mathfrak{M}\,.$$

Diesen Punkt ordnen wir $x_0 + h \in T_0$ zu.

Diese Ungleichung (6) zeigt, daß

$$||\xi|| = o(||h||)$$

gilt, d. h., der Abstand $||\xi||$ von $x_0 + h \in T_{x_0}$ und dem entsprechenden Punkt $x_0 + h + \xi \in \mathfrak{M}$ wird von höherer Ordnung klein als der Abstand $||h||$ vom Berührungspunkt x_0.

Der Punkt $x = x_0 + u$ liege nun in $\mathfrak{M}$, also gelte

$$\varphi\,(x_0 + u) = \varphi(x_0) = 0\,.$$

Wir erhalten hieraus

$$\varphi\,(x_0 + u) - \varphi(x_0) = \varphi'(x_0)\,u + \varepsilon(u) = 0$$

mit $||\varepsilon(u)|| = o(||u||)$. Daraus folgt

$$\varphi'(x_0)\,u = -\,\varepsilon(u)\,.$$

Mit T bezeichnen wir die Klasse aus E_x/T_0, welche u enthält. Dann ist $\varphi'(x_0)\,u = A\,T$ oder $A\,T = -\,\varepsilon(u)$, woraus sich

$$T = -\,A^{-1}\,\varepsilon(u)\,, \qquad ||T|| \leqq ||A^{-1}||\;||\varepsilon(u)||$$

ergibt. Unter den Elementen des Raumes E_x, die zu T gehören, sei ξ ein Element, für das

$$||\xi|| \leqq 2\,||T|| \leqq 2\,||A^{-1}||\;||\varepsilon(u)||$$

gilt. Da $\xi \in T$ und $u \in T$ ist, so folgt

$$u - \xi \in T_0\,, \qquad x_0 + u - \xi \in T_{x_0}\,.$$

Diesen Punkt ordnen wir $x = x_0 + u$ zu. Für den Abstand $||\xi||$ dieser Punkte gewinnen wir die Abschätzung

$$||\xi|| = o(||u||)\,.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Im Kleinen lineare Räume. Mit dem Begriff der Tangentialmannigfaltigkeit steht der Begriff „im Kleinen linearer Raum" im Zusammenhang. Er ist für gewisse Untersuchungen wichtig.

Wir betrachten zwei metrische Räume X und Y, und es sei φ eine topologische Abbildung von X auf Y. Dem Punkt $x \in X$ entspreche $\varphi(x) \in Y$. Die Abbildung φ heißt *fastisometrisch im Punkt* $x_0 \in X$, wenn der Abstand zweier beliebiger Elemente x_1 und x_2 aus X mit der Entfernung ihrer Bilder in Y durch

die Ungleichung

$$\varrho(x_1, x_2)\,(1-\varepsilon) \leqq \varrho(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) \leqq \varrho(x_1, x_2)\,(1+\varepsilon)$$

verknüpft ist, worin ε mit $\varrho(x_0, x_1) + \varrho(x_0, x_2)$ gegen Null strebt.

Beispiel. Es sei $\mathfrak{M}$ eine Mannigfaltigkeit in E_x, die durch $\psi(x) = 0$ gegeben ist, T_{x_0} die zu $\mathfrak{M}$ gehörige lineare Tangentialmannigfaltigkeit im regulären Punkt $x_0 \in \mathfrak{M}$ und $E_x = T_0 \oplus T_\xi$, wobei T_0 die Gesamtheit der Elemente h mit $\varphi'(x_0)\,h = 0$ bedeutet. Für ein $r > 0$ ordnen wir jedem Element

$$x_0 + h \quad \text{aus} \quad T_{x_0} \quad \text{mit} \quad ||h|| \leqq r$$

das Element

$$x_0 + h + \xi(h) \quad \text{aus} \quad \mathfrak{M}$$

zu (s. Satz 1). Wir erhalten eine topologische Abbildung χ der Umgebung des Punktes x_0 in T_{x_0} auf eine Umgebung von x_0 in $\mathfrak{M}$.

Die Abbildung χ ist fast isometrisch in $x_0 \in T_0$ (oder $x_0 \in \mathfrak{M}$). Denn sind $x_1, x_2 \in T_{x_0}$, $x_i = x_0 + h_i$, $||h_i|| \leqq r$, dann gehört zu x_1 der Punkt $\chi(x_1) = x_0 + h_1 + \xi(h_1) \in \mathfrak{M}$, zu x_2 der Punkt $\chi(x_2) = x_0 + h_2 + \xi(h_2) \in \mathfrak{M}$.

Es ist

$$\chi(x_1) - \chi(x_2) = h_1 - h_2 + [\xi(h_1) - \xi(h_2)]\,,$$

woraus sich

$$||h_1 - h_2|| - ||\xi(h_1) - \xi(h_2)|| \leqq ||\chi(x_1) - \chi(x_2)|| \leqq ||h_1 - h_2|| + ||\xi(h_1) - \xi(h_2)|| \tag{7}$$

ergibt. Die Funktion $\xi(h)$ hat eine stetige Ableitung $\xi'(h)$ mit $\xi'(0) = 0$. Darum ist für $||h|| \leqq r$ die Norm $||\xi'(h)|| \leqq \varepsilon_r$, wobei $\varepsilon_r \to 0$ geht für $r \to 0$.

Ferner gilt

$$||\xi(h_1) - \xi(h_2)|| = \left|\left|\int_0^1 \xi'(h_2 + t\,(h_1 - h_2))\,dt\,(h_1 - h_2)\right|\right|$$

$$\leqq \int_0^1 ||\xi'\,(h_2 + t\,(h_1 - h_2))||\,dt\,||h_1 - h_2||\,.$$

Ist

$$||h_1|| + ||h_2|| \leqq r\,,$$

so sind

$$||h_1|| \leqq r\,, \qquad ||h_2|| \leqq r\,;$$

für $0 \leqq t \leqq 1$ gilt folglich

$$||h_2 + t\,(h_1 - h_2)|| \leqq r$$

und demnach

$$||\xi(h_1) - \xi(h_2)|| \leqq \varepsilon_r\,||h_1 - h_2||\,.$$

Deshalb wird aus (7)

$$||x_1 - x_2||\,(1 - \varepsilon_r) \leqq ||\chi(x_1) - \chi(x_2)|| \leqq ||x_1 - x_2||\,(1 + \varepsilon_r)\,.$$

Damit ist bewiesen, daß unsere Abbildung fastisometrisch ist.

Wir definieren nun den im Kleinen linearen Raum.

Gegeben ist ein metrischer Raum X. Wenn jede hinreichend kleine Umgebung eines Punktes $x \in X$ fast isometrisch auf eine Umgebung von 0 eines Banach-Raumes abgebildet werden kann, dann heißt X *im Kleinen linear*.

Das vorhergehende Beispiel zeigt, daß in einem Banach-Raum jede Mannigfaltigkeit, deren sämtliche Punkte regulär sind, einen im Kleinen linearen Raum bildet.

Man kann den Begriff des Differentials auf Funktionen ausdehnen, die auf solchen Räumen definiert sind. Die Räume der zulässigen Funktionen bei verschiedenen klassischen Variationsaufgaben sind im Kleinen linear. Die Variationen der dort betrachteten Funktionale sind Differentiale von Funktionen in im Kleinen linearen Räumen.

§ 11. Extrema

Wir bringen nun Anwendungen aus der Variationsrechnung. $f(x)$ sei ein im Raum E definiertes Funktional. $f(x)$ besitzt in $x_0 \in E$ ein *Minimum* (bzw. *Maximum*), wenn für alle Punkte einer Umgebung von x_0 $f(x) \geqq f(x_0)$ (bzw. $f(x) \leqq f(x_0)$) ist. Minima und Maxima heißen *Extrema.*

Satz 1. *Hat das Funktional $f(x)$ in x_0 ein Extremum und ist es in x_0 differenzierbar $(df(x_0, h) = f'(x_0)\, h)$, dann gilt $f'(x_0) = 0$, d. h., es ist $df(x_0, h) = 0$ für alle $h \in E$.*

Beweis. Zunächst ist

$$f'(x_0)\, h = \frac{d}{dt} f(x_0 + t\, h)_{t=0}\,.$$

$f(x_0 + t\, h)$ ist aber eine Funktion von t, ihre Werte sind reell und für $t = 0$ nimmt sie ein Extremum an; darum gilt

$$df(x_0, h) = f'(x_0)\, h = \frac{d}{dt} f(x_0 + t\, h)_{t=0} = 0\,.$$

Weil h ein beliebiges Element aus E_x war, ist das Gewünschte gezeigt.

Wir untersuchen jetzt Extrema mit Nebenbedingungen. $\varphi(x)$ sei eine Funktion, die auf E_x definiert ist und deren Wertevorrat in E_y liegt. Außerdem sei $f(x)$ ein auf E_x definiertes Funktional.

$f(x)$ besitzt in x_0 mit $\varphi(x_0) = 0$ ein *Minimum* (bzw. *Maximum*) *mit der Nebenbedingung* $\varphi(x) = 0$, wenn $f(x) \geqq f(x_0)$ (bzw. $f(x) \leqq f(x_0)$) ist für alle x einer Umgebung von x_0, für die $\varphi(x) = 0$ gilt.

Satz 2. *Wenn $f(x)$ in x_0 ein Minimum unter der Bedingung $\varphi(x) = 0$ hat, und x_0 ein regulärer Punkt der Mannigfaltigkeit $\varphi(x) = 0$ ist, dann existiert ein lineares Funktional l, das auf E_y definiert ist, und zwar so, daß für das Funktional*

$$F(x) = f(x) - l\, \varphi(x)$$

gilt

$$F'(x_0) = 0\,, \quad d.\,h. \quad dF(x_0, h) = 0$$

für jedes $h \in E_x$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß $df(x_0, h) = 0$ ist für alle h aus T_0. Angenommen, es wäre

$$h \in T_0 \quad \text{und} \quad df(x_0, h) = c \neq 0\,.$$

Für jedes t entspricht dem Punkt $x_0 + t\, h$ nach Satz 2 aus § 10 ein Punkt $x_0 + t\, h + u(t)$ der Mannigfaltigkeit $\varphi(x) = 0$ mit $\|u(t)\| = o(\|t\, h\|)$.

Nach Definition des Differentials erhalten wir

$$\begin{aligned} f\left(x_0 + t\,h + u(t)\right) &= f(x_0) + df\left(x_0, t\,h + u(t)\right) + \omega(t) \\ &= f(x_0) + f'(x_0)\,t\,h + f'(x_0)\,u(t) + \omega(t) \\ &= f(x_0) + c\,t + f'(x_0)\,u(t) + \omega(t)\,. \end{aligned}$$

Für $t \to 0$ wird $f'(x_0)\,u(t) + \omega(t)$ von höherer Ordnung Null als $c\,t$. Deshalb stimmt das Vorzeichen der Differenz

$$f\left(x_0 + t\,h + u(t)\right) - f(x_0)$$

mit dem von $c\,t$ überein, so daß t und diese Differenz gleichzeitig ihr Vorzeichen wechseln. Dann kann aber x nicht Stelle eines Extremums von $f(x)$ sein. Folglich ist die Annahme $c \neq 0$ falsch.

Unter der Voraussetzungen des Satzes gilt also

$$df(x_0, h) = 0$$

für alle h mit $\varphi'(x_0)\,h = 0$, d. h.

$$d\varphi(x_0, h) = 0\,.$$

Daraus folgt

$$df(x_0, h_1) = df(x_0, h_2)\,,$$

wenn h_1 und h_2 derselben Nebenklasse $T \in E_x/T_0$ angehören. Wir führen das Funktional

$$\chi(T) = df(x_0, h)$$

ein, wobei h beliebig aus T ist. Es ist

$$|\chi(T)| = |df(x_0, h)| = |f'(x_0)\,h| \leq ||f'(x_0)||\;||h||\,,$$

und durch Übergang zur unteren Grenze für alle $h \in T$ gewinnen wir

$$|\chi(T)| \leq ||f'(x_0)||\;||T||\,.$$

Infolgedessen ist $\chi(T)$ ein lineares Funktional auf E_x/T_0. Andersereits gilt

$$T = [\varphi'(x_0)]^{-1}\,y\,,$$

dabei ist y ein Element aus E_y mit $\varphi'(x_0)\,h = y$ für alle $h \in T$ (s. S. 344). Es folgt

$$df(x_0, h) = \chi(T) = \chi\,\{[\varphi'(x_0)]^{-1}\} = l(y)\,.$$

Wegen $y = \varphi'(x_0)\,h = d\varphi(x_0, h)$ ist

$$df(x_0, h) = l[d\varphi(x_0, h)]\,.$$

Setzen wir

$$F(x) = f(x) - l[\varphi(x)]\,,$$

so ergibt sich

$$dF(x_0, h) = 0$$

für alle $h \in E_x$, q.e.d.

Beispiel. *Eine isoperimetrische Aufgabe.* Wir wollen ein Extremum des Funktionals $f(x)$ unter den Bedingungen $\varphi_i(x_0) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, suchen. f, φ_i seien auf E definierte Funktionale. Wir sehen die φ_i als Komponenten eines n-dimensionalen Vektors $\bar{\varphi}$ an und bezeichnen mit $\bar{\varphi}(x)$ den Vektor mit den Komponenten $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Es liege im Punkt $x_0 \in E$ ein Extremum vor. Nach Satz 2 gibt es ein lineares Funktional l derart, daß für $F(x) = f(x) - l[\bar{\varphi}(x)]$ $dF(x_0, h) = 0$ ist. Im n-dimensionalen Raum der Vektoren φ ist jedoch

$$l(\bar{\varphi}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i ,$$

dabei sind die λ_i Konstanten. Daraus folgt

$$F(x) = f(x) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i(x) .$$

Also gilt im Punkt x_0

$$f'(x_0) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i'(x_0) = 0 .$$

Wir sind so zu der Regel für die Lagrangeschen Multiplikatoren gekommen.

ANHANG

I. Die Klassen L_p, $p > 1$

Man sagt, eine auf dem abgeschlossenen Intervall [0, 1] definierte und meßbare Funktion $x(t)$ *gehöre zur Klasse* L_p [0, 1], wenn

$$\int_0^1 |x(t)|^p \, dt < \infty$$

ist. Das Integral wird im LEBESGUEschen Sinne aufgefaßt; p bedeutet eine positive Zahl.

Im folgenden nehmen wir $p \geqq 1$ an. Ist $p = 1$, so handelt es sich um die Klasse der *integrablen Funktionen*, sie wird mit $L\,[0, 1]$ bezeichnet.

Ist $x(t) \in L_p\,[0, 1]$ und $y(t) \in L_p\,[0, 1]$, so ist auch

$$x(t) + y(t) \in L_p\,[0, 1]\,.$$

Für beliebige Zahlen a und b gilt

$$|a + b| \leqq |a| + |b|\,.$$

Wir untersuchen 2 Fälle:

1. Ist $|a| > |b|$, dann folgt

$$|a + b| \leqq 2\,|a|$$

und

$$|a + b|^p \leqq 2^p\,|a|^p \leqq 2^p\,(|a|^p + |b|^p)\,.$$

2. Ist $|b| \geqq |a|$, dann gilt

$$|a + b|^p \leqq 2^p\,|b|^p \leqq 2^p\,(|a|^p + |b|^p)\,.$$

Also ist stets

$$|a + b|^p \leqq 2^p\,(|a|^p + |b|^p)\,.$$

Wir setzen nun $a = x(t)$, $b = y(t)$ und erhalten

$$|x(t) + y(t)|^p \leqq 2^p\left(|x(t)|^p + |y(t)|^p\right).$$

Weil

$$\int_0^1 |x(t)|^p \, dt < \infty \quad \text{und} \quad \int_0^1 |y(t)|^p \, dt < \infty$$

ist, gilt auch

$$\int_0^1 |x(t) + y(t)|^p \, dt < \infty ,$$

q.e.d.

Gegeben sei die Menge der Zahlenfolgen $x = \{\xi_i\}$ mit

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < \infty .$$

Wir bezeichnen diese Menge mit l_p. Wie im vorhergehenden Falle überzeugen wir uns davon, daß auch $x + y \in l_p$ ist, wenn $x \in l_p$ und $y \in l_p$ sind. Das heißt, wenn

$$x = \{\xi_i\} , \qquad y = \{\eta_i\} , \qquad \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < \infty \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^p < \infty$$

vorausgesetzt werden, folgt

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i + \eta_i|^p < \infty .$$

Die Höldersche **Ungleichung.** Bei vielen Untersuchungen wird die Schwarzsche Ungleichung verwendet. Wir beweisen anschließend eine Verallgemeinerung dieser Ungleichung, die von Hölder stammt.

Wir betrachten die Funktion $\tau = t^\alpha$ mit $\alpha > 0$. Es ist $\tau' = \alpha\, t^{\alpha-1} > 0$ für $t > 0$ und somit $\tau = t^\alpha$ eine wachsende Funktion für positive t. Für diese t ist die eindeutige Funktion $t = \tau^{1/\alpha}$ definiert.

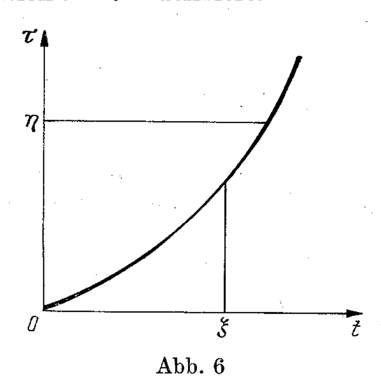


Abb. 6

Wir stellen die Funktion $\tau = t^\alpha$ graphisch dar, wählen zwei reelle positive Zahlen ξ und η, markieren die ihnen entsprechenden Punkte auf der t- bzw. τ-Achse und ziehen durch diese Punkte achsenparallele Geraden.

Wir erhalten zwei krummlinig begrenzte „Dreiecke" (Abb. 6), deren Flächeninhalte durch

$$S_1 = \frac{\xi^{\alpha+1}}{\alpha + 1} \qquad \text{und} \qquad S_2 = \frac{\eta^{\frac{1}{\alpha}+1}}{\frac{1}{\alpha} + 1}$$

gegeben sind. Andererseits ist klar, daß

$$S_1 + S_2 \geqq \xi\,\eta$$

gilt, und es steht nur für $\eta = \xi^\alpha$ das Gleichheitszeichen. So ergibt sich

$$\xi\,\eta \leqq \frac{\xi^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{\eta^{\frac{1}{\alpha}+1}}{\frac{1}{\alpha}+1}.$$

Wir setzen $\alpha + 1 = p$ und $\frac{1}{\alpha} + 1 = q$. Dann sind p und q durch

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{1}$$

verknüpft. Solche Zahlen p und q heißen *zueinander konjugiert*. Offenbar ist für $p > 1$ auch $q > 1$. Wir erhalten somit für beliebige ξ und η und für alle Paare konjugierter Zahlen p und q

$$\xi\,\eta \leqq \frac{\xi^p}{p} + \frac{\eta^q}{q}. \tag{2}$$

Wir nehmen Funktionen $x(t) \in L_p[0, 1]$ und $y(t) \in L_q[0, 1]$ und setzen

$$\xi = \frac{|x(t)|}{\left(\int_0^1 |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p}} \quad \text{bzw.} \quad \eta = \frac{|y(t)|}{\left(\int_0^1 |y(t)|^q\,dt\right)^{1/q}}.$$

Wenn wir diese Größen in (2) einführen, finden wir

$$\frac{|x(t)|\;|y(t)|}{\left(\int_0^1 |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p}\left(\int_0^1 |y(t)|^q\,dt\right)^{1/q}} \leqq \frac{|x(t)|^p}{p\int_0^1 |x(t)|^p\,dt} + \frac{|y(t)|^q}{q\int_0^1 |y(t)|^q\,dt}.$$

Auf der rechten Seite stehen integrable Funktionen. Also ist auch die linke Seite der Gleichung integrabel. Wir integrieren und erhalten

$$\frac{\int_0^1 |x(t)|\;|y(t)|\,dt}{\left(\int_0^1 |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p}\left(\int_0^1 |y(t)|^q\,dt\right)^{1/q}} \leqq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

oder

$$\int_0^1 |x(t)\,y(t)|\,dt \leqq \left(\int_0^1 |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p}\left(\int_0^1 |y(t)|^q\,dt\right)^{1/q}. \tag{3}$$

Dies ist die HÖLDER*sche Ungleichung für Integrale*. Für den Spezialfall $p = q = 2$ stellt sie die SCHWARZsche Ungleichung dar.

Es sei nun $x = \{\xi_i\}$, $y = \{\eta_i\}$ mit $x \in l_p$, $y \in l_q$. Wir setzen in die Ungleichung (2)

$$\xi = \frac{|\xi_i|}{\left(\sum_{i=1}^\infty |\xi_i|^p\right)^{1/p}} \quad \text{und} \quad \eta = \frac{|\eta_i|}{\left(\sum_{i=1}^\infty |\eta_i|^q\right)^{1/q}}$$

ein. Dann erhalten wir

$$\frac{|\xi_i|\,|\eta_i|}{\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^q\right)^{1/q}} \leqq \frac{|\xi_i|^p}{p\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p} + \frac{|\eta_i|^q}{q\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^q}\,.$$

Wenn wir über i summieren, gewinnen wir die HÖLDER*sche Ungleichung für Summen*

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i\,\eta_i| \leqq \left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^q\right)^{1/q}. \tag{4}$$

Für $p = q = 2$ geht sie in die SCHWARZsche Ungleichung für Summen über.

Die MINKOWSKIsche Ungleichung. Gehören $x(t)$ und $y(t)$ dem Raum $L_p\,[0, 1]$ an, dann gilt die MINKOWSKIsche Ungleichung

$$\left(\int_0^1 |x(t) + y(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \leqq \left(\int_0^1 |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p} + \left(\int_0^1 |y(t)|^p\,dt\right)^{1/p}. \tag{5}$$

Zum Beweis erwähnen wir zunächst:

Ist $z(t) \in L_p\,[0, 1]$, so ist $|z(t)|^{p-1} \in L_q\,[0, 1]$. Es ist nämlich

$$(|z(t)|^{p-1})^q = |z(t)|^{(p-1)\frac{p}{p-1}} = |z(t)|^p\,.$$

Daraus ergibt sich aber, daß $(|z(t)|^{p-1})^q$ eine integrable Funktion ist.

Wir untersuchen nun

$$\int_0^1 |x(t) + y(t)|^p\,dt\,.$$

Durch zweimalige Anwendung der HÖLDERschen Ungleichung auf die Funktionen $|x(t) + y(t)|^{p-1} \in L_q\,[0, 1]$ und $x(t) \in L_p\,[0, 1]$ bzw. $y(t) \in L_p\,[0, 1]$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 |x(t) + y(t)|^p\,dt \\
&\quad \leqq \int_0^1 |x(t) + y(t)|^{p-1}\,|x(t)|\,dt + \int_0^1 |x(t) + y(t)|^{p-1}\,|y(t)|\,dt \\
&\quad \leqq \left(\int_0^1 |x(t) + y(t)|^{(p-1)q}\,dt\right)^{1/q}\left(\int_0^1 |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \\
&\qquad + \left(\int_0^1 |x(t) + y(t)|^{(p-1)q}\,dt\right)^{1/q}\left(\int_0^1 |y(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \\
&\quad = \left(\int_0^1 |x(t) + y(t)|^p\,dt\right)^{1/q}\left[\left(\int_0^1 |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p} + \left(\int_0^1 |y(t)|^p\,dt\right)^{1/p}\right].
\end{aligned}$$

Wir dividieren beide Seiten durch

$$\left(\int_0^1 |x(t) + y(t)|^p\,dt\right)^{1/q}$$

und beachten, daß $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$ ist. Damit haben wir die MINKOWSKI*sche Ungleichung* (5) *für Integrale* gefunden.

Nun seien $x = \{\xi_i\} \in l_p$ *und* $y = \{\eta_i\} \in l_p$. *Wir beweisen*

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i + \eta_i|^p\right)^{1/p} \leqq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^p\right)^{1/p}. \tag{6}$$

Entsprechend wie im ersten Falle zeigen wir, daß aus $z = \{\zeta_i\} \in l_p$

$$z' = \{|\zeta_i|^{p-1}\} \in l_q$$

folgt.

Wir untersuchen

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i + \eta_i|^p .$$

Durch zweimalige Anwendung der HÖLDERschen Ungleichung auf die Folgen $\{|\xi_i + \eta_i|^{p-1}\} \in l_q$ und $\{\xi_i\} \in l_p$ bzw. $\{\eta_i\} \in l_p$ gewinnen wir

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i + \eta_i|^p &\leqq \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - + \eta_i|^{p-1} |\xi_i| + \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i + \eta_i|^{p-1} |\eta_i| \\ &\leqq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i + \eta_i|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \left[\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^p\right)^{1/p}\right] \\ &\leqq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i + \eta_i|^p\right)^{1/q} \left[\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^p\right)^{1/p}\right].\end{aligned}$$

Wenn wir beide Seiten durch

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i + \eta_i|^p\right)^{1/p}$$

dividieren und beachten, daß $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$ ist, finden wir die MINKOWSKI*sche Ungleichung* (6) *für Summen*.

Zum Abschluß bemerken wir, daß das Gleichheitszeichen in den Formeln (5) und (6) nur dann gilt, wenn fast überall auf $[0, 1]$

$$y(t) = k\,x(t) \qquad \text{mit} \qquad k > 0$$

bzw. wenn

$$\eta_i = k\,\xi_i \qquad \text{mit} \qquad k > 0 \qquad \text{für} \qquad i = 1, 2, 3, \ldots$$

ist.

Alle erhaltenen Ungleichungen lassen sich leicht auf Funktionen von mehreren unabhängigen Variablen übertragen.

II. Die Stetigkeit im Mittel in der Funktionenklasse $L_p(G)$

Wir bezeichnen mit $L_p(G)$ die Klasse der Funktionen $\varphi(x, y)$, die in einem ebenen Gebiet G definiert sind und integrable p-te Potenzen, $p \geqq 1$, besitzen. In $L_p(G)$ kann eine Norm eingeführt werden:

$$||\varphi|| = \left(\iint_G |\varphi^p| \, dx\, dy\right)^{1/p}.$$

Die Eigenschaften der Klassen und Räume $L_p[0, 1]$, die HÖLDERsche und die MINKOWSKIsche Ungleichung, die Vollständigkeit usw. übertragen sich unmittelbar auf $L_p(G)$.

Wir beweisen einen Satz, der gewöhnlich nicht in den Lehrbüchern über Funktionen einer reellen Veränderlichen behandelt wird.

Satz. *Eine beliebige Funktion $\varphi(x, y) \in L_p(G)$ ist im Mittel stetig, d. h., für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit*

$$\left(\iint_G |\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x, y)|^p \, dx \, dy\right)^{1/p} < \varepsilon$$

für $\sqrt{h^2 + k^2} < \delta$.

Dabei setzen wir, falls $(x + h, y + k)$ außerhalb des Gebietes G liegt, $\varphi(x + h, y + k) = 0$.

H_ϱ sei der Randstreifen, der aus den Punkten des Bereiches G besteht, die vom Rand nicht weiter als ϱ entfernt sind, und weiter sei $G_\varrho = G \backslash H_\varrho$.

Wir werden ϱ so klein wählen, daß $\operatorname{mes}(H_\varrho) < \eta$ wird, wobei η eine vorgegebene positive Zahl ist (der Rand des Bereichs G soll genügend glatt sein). Da auf G_ϱ die Funktion $\varphi(x, y) \in L_p(G_\varrho)$ integrabel ist, gibt es nach dem Satz von LUSIN eine abgeschlossene Menge $F_\eta^1 \subset G_\varrho$, so daß auf F_η^1 die Funktion $\varphi(x, y)$ stetig und $\operatorname{mes}(G_\varrho \backslash F^1) < \eta$ ist. Dabei wird offenbar $\operatorname{mes}(G \backslash F_\eta^1) < 2\eta$.

h und k mögen der Bedingung $\sqrt{h^2 + k^2} < \varrho$ genügen. Für feste, dieser Bedingung genügende h und k bezeichnen wir mit F_η^2 die Menge aller Punkte $(x - h, y - k)$ mit $(x, y) \in F_\eta^1$. Es ist $F_\eta^2 \subset G$, und die Menge F_η^2 ist abgeschlossen, da sie aus F_η^1 durch Verschiebung um den Vektor $\overline{l} = (-h, -k)$ entsteht. Es gilt $\operatorname{mes}(F_\eta^2) = \operatorname{mes}(F_\eta^1)$. Deshalb ist auch $\operatorname{mes}(G \backslash F_\eta^2) < 2\eta$.

Schließlich sei $F_\eta = F_\eta^1 \cap F_\eta^2$. Dann ist F_η eine abgeschlossene Menge und die Funktion $\varphi(x, y)$ auf ihr stetig und damit gleichmäßig stetig. Außerdem gilt

$$\operatorname{mes}(G \backslash F_\eta) = \operatorname{mes}((G \backslash F_\eta^1) \cup (G \backslash F_\eta^2) \leqq \operatorname{mes}(G \backslash F_\eta^1) + \operatorname{mes}(G \backslash F_\eta^2) < 4\eta .$$

Wir wählen η nun so klein, daß bei gegebenem $\varepsilon > 0$

$$\left(\iint_E |\varphi(x, y)|^p\right)^{1/p} < \frac{\varepsilon}{4} \tag{1}$$

wird, wenn $E \subset G$ und $\operatorname{mes}(E) < 4\eta$ ist.

Wir schätzen das Integral

$$\left(\iint_G |\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x, y)|^p \, dx \, dy\right)^{1/p}$$

ab. Es ist

$$\begin{aligned} &\left(\iint_G |\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x, y)|^p \, dx \, dy\right)^{1/p} \\ &\qquad \leqq \left(\iint_{F_\eta} |\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x, y)|^p \, dx \, dy\right)^{1/p} \\ &\qquad\quad + \left(\iint_{G \backslash F_\eta} |\varphi(x+h, y+k)|^p \, dx \, dy\right)^{1/p} \\ &\qquad\quad + \left(\iint_{G \backslash F_\eta} |\varphi(x, y)|^p \, dx \, dy\right)^{1/p} \end{aligned}$$

und wegen (1)

$$\left(\iint\limits_{G\setminus F_\eta} |\varphi(x+h, y+k|^p\, dx\, dy\right)^{1/p} + \left(\iint\limits_{G\setminus F_\eta} |\varphi(x, y)|^p\, dx\, dy\right)^{1/p} < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Wir wählen weiter $\delta < \varrho$ so klein, daß für $\sqrt{h^2 + k^2} < \delta$ gleichmäßig auf F

$$|\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x, y)| < \frac{\varepsilon}{2\,[\operatorname{mes}(G)]^{1/p}}$$

ist. Dann gilt

$$\left(\iint\limits_{F_\eta} |\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x, y)|^p\, dx\, dy\right)^{1/p} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt

$$\left(\iint\limits_{G} |\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x, y)|^p\, dx\, dy\right)^{1/p} < \varepsilon.$$

wenn $\sqrt{h^2 + k^2} < \delta$ ist. Der Satz ist damit bewiesen.

III. Der Satz von Bolyai-Brouwer

Wir beweisen hier den bekannten Satz von Bolyai-Brouwer über die Existenz eines Fixpunktes bei einer stetigen Abbildung eines abgeschlossenen konvexen Körpers des n-dimensionalen euklidischen Raumes in sich. Dieser Satz findet in der Funktionalanalysis breite Anwendung beim Existenzbeweis für Lösungen von Operatorgleichungen. Da alle abgeschlossenen konvexen Körper des n-dimensionalen euklidischen Raumes einander homöomorph sind, genügt es, den Satz von Bolyai-Brouwer für eine stetige Abbildung eines n-dimensionalen Simplex in sich nachzuweisen.[1]) Wir führen hier den Beweis nach Knaster, Kuratowski und Mazurkiewitsch.

Wir betrachten ein n-dimensionales Simplex s_0 und bezeichnen mit $x_0, x_1, \ldots, x_n$ seine Ecken. Einen beliebigen k-dimensionalen Rand des Simplexes $(0 \leqq k \leqq n)$ bezeichnen wir mit $(x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$, wobei x_{i_m}, $m = 0, 1, \ldots, k$, die Gesamtheit der Ecken dieses Randes ist. Das Simplex s_0 möge in Simplexe s zerfallen. Jeder Ecke x der Simplexe s ordnen wir eine Zahl $\varphi(x)$ auf folgende Weise zu.

Wir betrachten denjenigen Rand des Grundsimplexes s_0, der die niedrigste Dimension hat und den Punkt x enthält. Es möge dies der Rand $(x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ sein. Die Zahl $\varphi(x)$ setzen wir gleich einem der Indizes $i_0, i_1, \ldots, i_k$. Wenn beispielsweise x mit einer Ecke x_i des Simplexes s_0 zusammenfällt, so wird $\varphi(x) = i$; liegt x auf dem eindimensionalen Rand (x_i, x_j) und fällt es nicht mit einer von dessen Ecken zusammen, so können wir $\varphi(x)$ gleich i oder j setzen usw. Liegt x schließlich im Innern von s_0 (gehört also nicht zu einem k-dimensionalen Rand, $k = 0, 1, \ldots, n-1$), so kann $\varphi(x)$ gleich einer der $n+1$ Zahlen $0, 1, \ldots, n$ gesetzt werden. Wir nennen $\varphi(x)$ eine *normale Eckenfunktion.*

---

[1]) Zu den hier vorkommenden topologischen Begriffen s. [30].

Ein Simplex s unserer Zerlegung heißt *repräsentativ*, wenn seinen Ecken die $n + 1$ verschiedenen Zahlen $0, 1, \ldots, n$ zugeordnet sind.

In Abb. 7 zeigt die Zerlegung eines zweidimensionalen Simplexes mit einer entsprechenden Zuordnung der Zahlen 0, 1, 2 zu den Ecken der Teilsimplexe. Das schraffierte Dreieck ist ein repräsentatives Simplex.

Hilfssatz 1 (SPERNER). *Zu einer beliebigen Simplexzerlegung von s_0 und einer beliebigen, auf den Ecken der Zerlegungssimplexe gegebenen normalen Eckenfunktion existieren immer repräsentative Simplexe, und zwar in einer ungeraden Anzahl.*

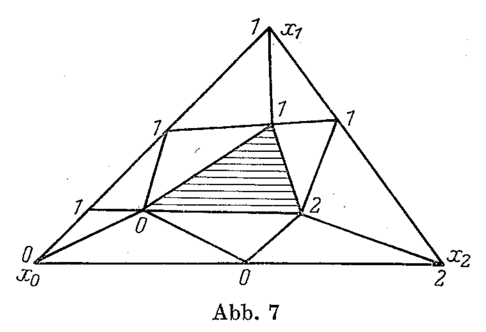


Abb. 7

Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion. Für den Fall $n = 0$, wo das Simplex aus einem Punkt besteht, ist der Satz trivial. Der Satz sei für $n - 1$ Dimensionen bewiesen, wir beweisen ihn für n Dimensionen.

Gegeben ist also eine Simplexzerlegung des n-dimensionalen Simplex s_0; auf den Ecken x der Simplexe s der Zerlegung ist eine normale Eckenfunktion $\varphi(x)$ erklärt. Wir nennen einen $(n - 1)$-dimensionalen Rand der Simplexe der Zerlegung, bei dem auf n Ecken die Funktion $\varphi(x)$ die Werte $0, 1, \ldots, n - 1$ annimmt, einen $(n - 1)$-dimensionalen repräsentativen Rand. Die Anzahl der $(n - 1)$-dimensionalen repräsentativen Ränder eines Simplexes s der Zerlegung bezeichnen wir mit $\alpha(s)$.

Es sind drei Fälle möglich.

1. Die Funktion $\varphi(x)$ nimmt auf den Ecken eines Simplexes s_1 alle $n + 1$ Werte $0, 1, 2, \ldots, n$ an, d. h., s_1 ist ein repräsentatives Simplex und enthält einen eindeutigen repräsentativen $(n - 1)$-dimensionalen Rand und zwar gegenüber der Ecke x, für die $\varphi(x) = n$ ist. Hieraus folgt $\alpha(s_1) = 1$ und

$$\sum \alpha(s_1) = \varrho_n; \tag{1}$$

ϱ_n ist die Anzahl der n-dimensionalen repräsentativen Simplexe (auf der linken Seite der Gleichung wird über alle repräsentativen Simplexe summiert).

2. Die Funktion $\varphi(x)$ nimmt auf den Ecken eines nichtrepräsentativen Simplexes s_2 die n Werte $0, 1, 2, \ldots, n - 1$ an. Einen dieser Werte muß sie zweimal annehmen. Folglich besitzt s_2 zwei repräsentative $(n - 1)$-dimensionale Ränder, $\alpha(s_2) = 2$.

3. Die Funktion $\varphi(x)$ läßt auf den Ecken eines Simplexes s_3 einen der Werte $0, 1, 2, \ldots, n-1$ aus; folglich ist $\alpha(s_3) = 0$.

Hieraus folgt

$$\sum \alpha(s) \equiv \sum \alpha(s_1) \pmod 2 . \tag{2}$$

Die linke Summe erstreckt sich über alle n-dimensionalen Simplexe s der Zerlegung, die rechte über die repräsentativen n-dimensionalen Simplexe s_1 dieser Zerlegung.

Wir führen eine andere Zählung der $(n-1)$-dimensionalen repräsentativen Ränder durch. Zwei Fälle sind möglich.

1. Der repräsentative Rand fällt in das Innere des Grundsimplexes s_0; er ist der gemeinsame Rand zweier Simplexe der Zerlegung, und in der Summe $\sum \alpha(s)$ zählen wir ihn zweimal.

2. Der repräsentative Rand fällt auf die Begrenzung von s_0. Aus der Definition dieses Randes und der Funktion $\varphi(x)$ folgt, daß er sich nur auf dem $(n-1)$-dimensionalen Rand $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ des Grundsimplexes befinden kann. Wir bezeichnen mit ϱ_{n-1} die Anzahl der $(n-1)$-dimensionalen zu $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ gehörigen repräsentativen Ränder.

Wir bekommen

$$\sum \alpha(s) \equiv \varrho_{n-1} \pmod 2 . \tag{3}$$

Aus (1), (2) und (3) folgt

$$\varrho_n \equiv \varrho_{n-1} \pmod 2 .$$

Für die $(n-1)$-dimensionalen Simplexe galt der Hilfssatz als bewiesen, ϱ_{n-1} ist ungerade, folglich ist auch ϱ_n ungerade und deshalb von Null verschieden. Der Hilfssatz ist damit vollständig bewiesen.

Hilfssatz 2. *Das Simplex s_0 werde von $n+1$ abgeschlossenen Mengen $F_0, F_1, \ldots, F_n$ derart überdeckt, daß jeder k-dimensionale Rand $(x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ von den Mengen $F_{i_0}, F_{i_1}, \ldots, F_{i_k}$ überdeckt wird. Dann existiert in s_0 ein Punkt, der allen $n+1$ Mengen F_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, angehört.*

Wir führen eine Simplexzerlegung von s_0 durch. Auf den Ecken x der Zerlegungssimplexe definieren wir folgende Funktion $\varphi(x)$: Wir betrachten den Rand $(x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$, $0 \leq k \leq n$, mit der kleinsten Dimension, der den Punkt x umfaßt. Dieser Punkt fällt in eine der Mengen $F_{i_0}, F_{i_1}, \ldots, F_{i_k}$, die $(x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ überdecken. Wir setzen $\varphi(x)$ gleich dem Index jener Menge, die x enthält (oder gleich einem beliebigen solchen Index, wenn der Punkt in mehreren der Mengen $F_{i_0}, F_{i_1}, \ldots, F_{i_k}$ liegt). $\varphi(x)$ ist dann eine normale Eckenfunktion.

Auf Grund des Hilfssatzes von Sperner muß unter den Simplexen unserer Zerlegung ein repräsentatives Simplex s_1 vorkommen. Auf seinen Ecken x nimmt die Funktion $\varphi(x)$ alle $n+1$ Werte $0, 1, \ldots, n$ an, d. h., die Ecken von s_1 gehören $n+1$ verschiedenen Mengen F_i an.

Wir werden Simplexzerlegungen in immer kleiner werdende Simplexe vornehmen. Die Durchmesser der Simplexe der m-ten Zerlegung mögen nicht

größer als δ_m sein, wo $\delta_m \to 0$ für $m \to \infty$ strebt. Wir betrachten die Folge der repräsentativen Simplexe $s_1, s_2, \ldots, s_m, \ldots$ der ersten, zweiten, ..., m-ten, ... Zerlegung. Infolge der Kompaktheit von s_0 hat die Menge der Ecken der Simplexe s_m einen Häufungspunkt x^*. Wir wählen ein beliebiges $\delta > 0$ und betrachten die Simplexe s_m, für die $\delta_m < \frac{\delta}{2}$ ist. In die Kugel vom Radius $\frac{\delta}{2}$ mit dem Mittelpunkt in x^* fällt mindestens eine Ecke eines Simplexes s_m, folglich liegen in der Kugel vom Radius δ um x^* alle $n+1$ Ecken dieses Simplexes. Da die Ecken von s_m den $n+1$ verschiedenen Mengen $F_0, F_1, \ldots, F_n$ angehören, gibt es in einer beliebigen δ-Umgebung von x^* Punkte aller Mengen F_i, $i = 0, 1, \ldots, n$. Mithin ist x^* ein Häufungspunkt für alle F_i; da die F_i abgeschlossen sind, gehört x^* allen F_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, an.

Der Satz von BOLYAI-BROUWER. *Zu jeder Abbildung $f(x)$ eines n-dimensionalen Simplexes s in sich existiert ein Fixpunkt, d. h. ein Punkt $x^* \in s$ derart, daß*

$$f(x^*) = x^*$$

ist.

Wir führen auf s baryzentrische Koordinaten ein:

$$\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n, \qquad \sum_{i=0}^{n} \mu_i = 1 .$$

Für die Punkte von s sind alle $\mu_i \geqq 0$. Der Punkt $x(\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n) \in s$ möge bei der Abbildung f in den Punkt $y(\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_n) \in s$, $y = f(x)$, übergehen. Wiederum ist $\sum_{i=0}^{n} \nu_i = 1$, $\nu_i \geqq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Der Punkt $x(\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n)$ liege auf dem Rand $(x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$, $0 \leqq k \leqq n$. Die Koordinaten μ_j des Punktes x sind für $j \neq i_0, i_1, \ldots, i_k$ gleich Null.

Wegen

$$1 = \mu_{i_0} + \mu_{i_1} + \cdots + \mu_{i_k} = \sum_{i=0}^{n} \nu_i \geqq \nu_{i_0} + \nu_{i_1} + \cdots + \nu_{i_k}$$

ist die gleichzeitige Erfüllung der Ungleichungen

$$\mu_{i_0} < \nu_{i_0}, \mu_{i_1} < \nu_{i_1}, \ldots, \mu_{i_k} < \nu_{i_k}$$

nicht möglich, und für mindestens eine Koordinate gilt

$$\mu_{i_r} \geqq \nu_{i_r} .$$

Bezeichnet F_i die Menge aller Punkte, für die die Koordinate μ_i bei der Abbildung f nicht wächst, so wird also jeder Punkt x des Randes $(x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ von einer der Mengen $F_{i_0}, F_{i_1}, \ldots, F_{i_k}$ überdeckt.

Die Mengen F_i genügen allen Voraussetzungen des vorangehenden Hilfssatzes.[1]) Deshalb existiert auf s ein Punkt $x^*(\mu_0^*, \mu_1^*, \ldots, \mu_n^*)$, der allen diesen Mengen angehört. Keine der Koordinaten μ_i^* vergrößert sich bei der Abbil-

[1]) Die Abgeschlossenheit der F_i folgt aus der Stetigkeit von f.

dung f, und bei $f(x^*) = y^*(\nu_0^*, \nu_1^*, \ldots, \nu_n^*)$ wird

$$\mu_i^* \geqq \nu_i^*, \qquad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Aus (4) und den Eigenschaften der baryzentrischen Koordinaten folgt

$$1 = \sum_{i=0}^{n} \mu_i^* \geqq \sum_{i=0}^{n} \nu_i^* = 1. \tag{5}$$

Aus (4) und (5) ergibt sich

$$\mu_i^* = \nu_i^*, \qquad i = 0, 1, \ldots, n,$$

d. h. $f(x^*) = x^*$, und demnach ist x^* ein Fixpunkt der Abbildung.

Der Satz von BOLYAI-BROUWER ist hiermit bewiesen.

Folgerung. *Eine stetige Abbildung eines beschränkten abgeschlossenen konvexen Körpers S des n-dimensionalen* BANACH-*Raumes E in sich besitzt einen Fixpunkt.*

Es sei $e_1, e_2, \ldots, e_n$ eine Basis in E. Dem Element

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n$$

ordnen wir den Punkt

$$\tilde{x} = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\} \in E_n$$

zu, wobei E_n ein n-dimensionaler euklidischer Raum ist. Diese Zuordnung φ ist isometrisch und isomorph und führt eine abgeschlossene konvexe Menge $S \subset E$ in eine abgeschlossene konvexe Menge $\tilde{S} \subset E_n$ über. f sei eine stetige Abbildung von S in sich.

Dann ist $\tilde{f} = \varphi f \varphi^{-1}$ eine stetige Abbildung von $\tilde{S}$ in sich. Nach dem Satz von BOLYAI-BROUWER existiert ein Fixpunkt $\tilde{x}^*$ dieser Abbildung:

$$\varphi f \varphi^{-1}(\tilde{x}^*) = \tilde{x}^*.$$

Dann aber ist

$$f \varphi^{-1}(\tilde{x}^*) = \varphi^{-1}(\tilde{x}^*),$$

und $x^* = \varphi^{-1}(\tilde{x}^*)$ ist ein Fixpunkt der Abbildung f.

IV. Definitionen der n-ten Ableitung einer Funktion von reellen Variablen

Es gibt zwei Definitionen für die n-te Ableitung einer Funktion $x(t)$ im Punkt t.

1. Wir führen die Bezeichnung

$$\delta_{\Delta t}^n x(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} x\left(t + \left(k - \frac{n}{2}\right) \Delta t\right)$$

ein und nennen $\delta_{\Delta t}^n(t)$ eine *zentrale Differenz n-ter Ordnung* von $x(t)$. Dann sei

$$x^{(n)}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{(\Delta t)^n} \delta_{\Delta t}^n x(t)$$

unter der Voraussetzung, daß dieser Limes existiert.

Geht die rechte Seite dieser Gleichung auf dem Intervall $a \leqq t \leqq b$ gleichmäßig gegen $x^{(n)}(t)$, so heißt $x^{(n)}(t)$ *gleichmäßige Differenzenableitung n-ter Ordnung.*

2. Wir erklären nun die n-te Ableitung der Funktion $x(t)$ und bezeichnen sie mit $x^{(n)}(t)_0$. $x^{(n)}(t)_0$ ist durch n-maliges sukzessives Differenzieren der Funktion $x(t)$ definiert, vorausgesetzt, daß alle vorhergehenden Ableitungen $x'(t)_0$, $x''(t)_0, \ldots, x^{(n-1)}(t)_0$ in einer Umgebung des Punktes t existieren.

$x^{(n)}(t)_0$ sei auf dem Intervall $a \leqq t \leqq b$ definiert und für diese t stetig. Dann existiert auch $x^{(n)}(t)$, und es gilt

$$x^{(n)}(t) = x^{(n)}(t)_0 .$$

Wie man sofort erkennt, ist

$$\frac{1}{(\Delta t)^n}\, \delta^n_{\Delta t} x(t) = x^{(n)}(t + \theta\, \Delta t)_0 , \qquad -\frac{n}{2} < \theta < \frac{n}{2} .$$

Da für $\Delta t \to 0$ die rechte Seite gleichmäßig gegen $x^{(n)}(t)_0$ strebt, folgt

$$x^{(n)}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{(\Delta t)^n}\, \delta^n_{\Delta t} x(t) = x^{(n)}(t)_0 .$$

Man kann auch die Umkehrung zeigen. Aus der Existenz der stetigen gleichmäßigen Differenzenableitung $x^{(n)}(t)$ in einem abgeschlossenen Intervall folgt die Existenz der n-ten Ableitung $x^{(n)}(t)_0$, und es gilt

$$x^{(n)}(t)_0 = x^{(n)}(t) .$$

Wir führen den Beweis für $n = 2$ durch. Die Funktion $x(t)$ habe auf dem Intervall $[0, 1]$ eine stetige zweite Differenzenableitung $x''(t)$. Durch

$$y(t) = \int_0^t \int_0^{\tau_1} x''(\tau)\, d\tau\, d\tau_1$$

führen wir eine Funktion $y(t)$ ein.

Die zweite Ableitung $y''(t)_0$ ist gleich dem Integranden $x''(t)$. Weil aber $y''(t) = x''(t)$ stetig ist, gilt nach dem Vorhergehenden

$$y''(t)_0 = y''(t) .$$

Also ist

$$[y(t) - x(t)]'' = 0 .$$

Wir zeigen nun, daß die Differenz $\alpha(t) = y(t) - x(t)$ nur linear in t sein kann:

$$x(t) = y(t) + a + b\, t .$$

Da die Funktion $y(t) + a + b\, t$ die zweite Ableitung $y''(t)_0 = x''(t)_0$ besitzt, ist $x''(t)_0 = x''(t)$.

Für das Intervall $[0, 1]$ gelte also $\alpha''(t) = 0$. Wir setzen

$$\alpha_1(t) = \alpha(t) - \{\alpha(0) + [\alpha(1) - \alpha(0)]\, t\} .$$

Es ist $\alpha_1(0) = \alpha_1(1) = 0$ und $\alpha_1''(t) \equiv 0$.

ε sei eine beliebige positive Zahl. Wir betrachten die Funktion

$$\beta(t) = \alpha_1(t) + \varepsilon\, t^2 .$$

Wegen $(\varepsilon\, t^2)'' = 2\,\varepsilon > 0$ ist $\beta''(t) = 2\,\varepsilon > 0$. Für $0 \leqq t \leqq 1$ ergibt sich $\beta(t) \leqq \varepsilon$. Wäre für ein $t \in [0, 1]$ doch $\beta(t) > \varepsilon$, so wäre das Maximum von $\beta(t)$ größer als ε. Da aber $\beta(0) = 0$ und $\beta(1) = \varepsilon$ ist, wird dieses Maximum für einen inneren Punkt t_0 von $[0, 1]$ angenommen. In t_0 ist die zweite zentrale Differenz

$$\Delta^2_{\Delta t}\beta(t_0) = \beta\,(t_0 + \Delta t) - 2\,\beta(t_0) + \beta\,(t_0 - \Delta t) \leqq 0\,,$$

weil

$$\beta(t_0) \geqq \beta\,(t_0 \pm \Delta t)$$

gilt. Hieraus folgt

$$\beta''(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta^2\, \Delta t\, \beta(t_0)}{(\Delta t)^2} \leqq 0\,,$$

und damit haben wir einen Widerspruch zu $\beta''(t_0) > \varepsilon > 0$ erhalten.

Infolgedessen ist

$$\beta(t) \leqq \varepsilon \qquad \text{für} \qquad 0 \leqq t \leqq 1\,.$$

Dann ist für $0 \leqq t \leqq 1$ aber auch

$$\alpha_1(t) = \beta(t) - \varepsilon\, t^2 \leqq \beta(t) \leqq \varepsilon\,.$$

Analog beweist man die Gültigkeit der Ungleichung

$$\alpha_1(t) \geqq -\,\varepsilon\,.$$

Also erhalten wir für ein beliebiges ε $(\varepsilon > 0)$

$$-\,\varepsilon \leqq \alpha_1(t) \leqq \varepsilon\,.$$

Daraus folgt

$$\alpha_1(t) \equiv 0$$

und schließlich

$$\alpha(t) = \alpha(0) + [\alpha(1) - \alpha(0)]\, t = a + b\, t\,,$$

q.e.d.

Für eine Funktion $x(t_1, \ldots, t_n)$ von n reellen Veränderlichen setzen wir

$$\Delta^n_{t_1,t_2,\ldots,t_n;\,\Delta t} x(t_1, \ldots, t_n) = \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k} (-1)^{n-k}\, x(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)\,.$$

Dabei ist $\tau_i = t_i + \Delta t$ für $i = i_1, i_2, \ldots, i_k$ und $\tau_i = t_i$ für die übrigen i; die Summe wird über alle Untermengen $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ von $(1, 2, \ldots, n)$ erstreckt, für die $0 \leqq i_1 \leqq i_2 \leqq \cdots \leqq i_k \leqq n$ ist.

Zum Abschluß beweisen wir, daß dann die Gleichung

$$\Delta^n_{t_1,t_2,\ldots,t_n;\Delta t}\, x(t_1, t_2, \ldots, t_n) = (\Delta t)^n \left\{ \frac{\partial}{\partial t_{k_1}} \left[\ldots \frac{\partial}{\partial t_{k_n}} x(t_1 + \theta_1\, \Delta t, \ldots, t_n + \theta_n\, \Delta t) \ldots \right] \right\} \tag{1}$$

gilt. Die θ_i sind Zahlen zwischen 0 und 1.

Wir beweisen (1) durch Induktion. Für $n = 1$ führt (6) auf den Mittelwertsatz. Angenommen, (1) wäre richtig für partielle Differenzen $(n - 1)$-ter Ord-

nung. Es gilt dann

$$\begin{aligned}
&\Delta^n_{t_1,t_2,\ldots,t_n;\Delta t} x(t_1, t_2, \ldots, t_n) \\
&= \Delta^{n-1}_{t_1,\ldots,t_k-1,\,t_{k_1}+1,\ldots,t_n;\Delta t} x(t_1, \ldots, t_{k_1} + \Delta t, \ldots, t_n) \\
&\quad - \Delta^{n-1}_{t_1,\ldots,t_{k_1}-1,t_{k_1}+1,\ldots,t_n;\Delta t} x(t_1, \ldots, t_{k_1}, \ldots, t_n) \\
&= \Delta t \frac{\partial}{\partial t_{k_1}} \left[\Delta^{n-1}_{t_1,\ldots,t_{k_1}-1,t_{k_1}+1,\ldots,t_n;\Delta t} x\,(t_1, \ldots, t_{k1} + \theta_{k1}\,\Delta t, \ldots, t_n) \right] \qquad (2)
\end{aligned}$$

(dies gewinnt man durch Anwendung des Mittelwertsatzes). Auf Grund der Induktionsannahme ergibt sich aber

$$\begin{aligned}
&\Delta^{n-1}_{t_1,\ldots,t_{k_1}-1,\,t_{k_1}+1,\ldots,t_n;\Delta t} x(t_1, \ldots, t_{k1} + \theta_{k1}\,\Delta t, \ldots, t_n) \\
&= \frac{\partial}{\partial t_{k_2}} \left\{ \ldots \frac{\partial}{\partial t_{k\,n}} x\,(t_1 + \theta_1\,\Delta t, \ldots, t_n + \theta_n\,\Delta t) \ldots \right\} (\Delta t)^{n-1}\,.
\end{aligned}$$

Daraus und aus (2) folgt (1).



LITERATURVERZEICHNIS

[1] Achieser, N. I., Vorlesungen über Approximationstheorie. 2. Aufl., Akademie-Verlag, Berlin 1967.

[2] Achieser, N. I., und Glasmann, I. M., Theorie der linearen Operatoren im Hilbertraum. 5. Aufl., Akademie-Verlag, Berlin 1968.

[3] Alexandroff, P. S., Einführung in die Mengenlehre. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1956.

[4] Banach, S., Lehrgang der Funktionalanalysis. Kiew 1948 (ukrainisch).

[5] Birkhoff, H., Lattice theory. New York 1948.

[6] Dunford, N., und Schwartz, J. T., Linear operators. Interscience Publishers, New York 1958.

[7] Ditkin, W. A., Operatorenrechnung (Диткин, В. А., Операционное исчисление). Uspechi mat. nauk **2**, 6 (22) (1947).

[8] Ditkin, W. A., und Prudnikow, A. P., Integraltransformationen und Operatorenrechnung (Диткин, В. А., и Прудников, А. П., Интегральные преобразования и операционное исчисление). Fismatgis, Moskau 1961.

[9] Gelfand, I. M., Raikow, D. A., und Schilow, G. E., Kommutative normierte Algebren. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1966.

[10] Hausdorff, F., Mengenlehre. 2. Aufl., W. de Gruyter, Berlin 1927.

[11] Hilbert, D., Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. B. G. Teubner, Leipzig 1912.

[12] Hilbert, D., und Courant, R., Methoden der mathematischen Physik. Springer-Verlag, Berlin 1931.

[13] Hille, E., and Phillips, R. S., Functional analysis and semi-groups. New York 1957.

[14] Kantorowitsch, L. W., und Akilow, G. P., Funktionalanalysis in normierten Räumen. Akademie-Verlag, Berlin 1964.

[15] Kantorowitsch, L. W., Funktionalanalysis und angewandte Mathematik (Канторович, Л. В., Функциональный анализ и прикладная математика). Uspechi mat. nauk **3**, 6 (28) (1948).

[16] Kolmogorow, A. N., und Fomin, S. W., Elemente der Funktionentheorie und der Funktionalanalysis (Колмогоров, А. Н., и Фомин, С. В., Элементы теории функций и финкционального анализа). Verlag der Moskauer Universität, Moskau 1954.

[17] Kolmogorow, A. N., Zur Normierbarkeit eines allgemeinen topologischen linearen Raumes. Studia Math. **5** (1934).

[18] Krasnoselski, M. A., Topologische Methoden in der Theorie nichtlinearer Integralgleichungen (Красносельский, М. А., Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений). GTTI, 1956.

[19] Krein, M. G., und Krein, S. G., Sur l'espace des fonctions continues définies sur un bicompact de Hausdorff et ses sousespaces semi-ordonéns. Mat. Sbornik **13** (55) (1943).

[20] Krein, M. G., und Rutman, M. A., Lineare Operatoren, die einen Kegel im Banach-Raum invariant lassen (Крейн, М. Г., и Рутман, М. А., Линейные опера-

торы, оставляющие инвариантным конус в банаховом пространстве). Uspechi mat. nauk **3**, 1 (23) (1948).

[21] LAPPO-DANILEWSKIJ, I. A., Theorie der Matrizenfunktionen und linearer Differentialgleichungssysteme (Лаппо-Данилевский, И. А., Теория функций от матриц и системы линейных дифференциальных уравнений). GTTI, 1934.

[22] MICHLIN, S. G., Vorlesungen über lineare Integralgleichungen. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1962.

[23] NEUMARK, M. A., Lineare Differentialoperatoren. 3. Aufl., Akademie-Verlag, Berlin 1967.

[24] NATANSON, I. P., Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen. 2. Aufl., Akademie-Verlag, Berlin 1961.

[25] NATANSON, I. P., Konstruktive Funktionentheorie. Akademie-Verlag, Berlin 1955.

[26] NEMYZKIJ, W. W., Die Methode der Fixpunkte in der Analysis (Немыцкий, В. В., Метод неподвижных точек в анализе). Uspechi mat. nauk **1** (1936).

[27] PLESSNER, A. I., Spektraltheorie linearer Operatoren I (Плеснер, А. И., Спектральная теория линейных операторов I). Uspechi mat. nauk **9** (1941).

[28] PLESSNER, A. I., und ROCHLIN, W. A., Spektraltheorie linearer Operatoren II (Плеснер, А. И., и Рохлин, В. А., Спектральная теория линейных операторов II). Uspechi mat. nauk **1**, 1 (11) (1946).

[29] PLESSNER, A. I., Spektraltheorie linearer Operatoren (Плеснер, А. И., Спектральная теория линейных операторов). Verlag Nauka, Moskau 1967.

[30] PONTRJAGIN, L. S., Grundzüge der kombinatorischen Topologie. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1956.

[31] RIESZ, F., und SZ.-NAGY, B., Vorlesungen über Funktionalanalysis. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1956.

[32] RICHTMAJER, R. D., Differenzenmethoden zur Lösung von Randwertaufgaben. Moskau 1960.

[33] SMIRNOW, W. I., Lehrgang der höheren Mathematik V. 2. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1967.

[34] SOBOLEW, S. L., Einige Anwendungen der Funktionalanalysis auf Gleichungen der mathematischen Physik. Akademie-Verlag, Berlin 1964.

[35] TITCHMARSH, E., Introduction to the theory of Fourier integrals. Oxford 1937.

[36] URYSON, P. S., Arbeiten über Topologie und andere Gebiete der Mathematik, Bd. I (Урысон, П. С., Труды по топологии и другим областям математики, т. I). GTTI, 1951.

[37] WHITTAKER, E., and WATSON, G., A course of modern analysis. 4th edition, At the University Press, Cambridge 1952.

[38] WILENKIN, N. J., u. a., Funktionalanalysis (Виленкин, Н. Я., и др., Функциональный анализ). Verlag Nauka, Moskau 1964.

[39] WULICH, B. S., Einführung in die Funktionalanalysis. B. G. Teubner, Leipzig 1961.

NAMENVERZEICHNIS

SACHVERZEICHNIS

